Übungsblatt 2

Funktionentheorie II SS 2018/19

18.10.2018

Aufgabe 1: Verkettung harmonischer mit holomorphen Funktionen
Die Funktion $f : \Omega \to \Omega'$ sei auf $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ holomorph, wobei Ω, Ω' nichtleere und offene Teilmengen von $\mathbb{C}$ sind. Es sei $f(x+\mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}\,v(x,y)$ für $u := \mathrm{Re}(f)$, $v := \mathrm{Im}(f)$, wobei x, y reelle Zahlen mit $x+\mathrm{i}y \in \Omega$ sind. Die zweimal stetig differenzierbare Funktion $\varphi : \Omega' \to \mathbb{R}$ sei harmonisch, also $\Delta\varphi = 0$ auf Ω'. Man zeige, dass $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\psi(x,y) = \varphi(u(x,y), v(x,y))$, $\psi = \varphi \circ f$, harmonisch auf Ω ist.

Beachte: Wir identifizieren hier $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x+\mathrm{i}y \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 2: Die holomorphe Ergänzung einer harmonischen Funktion
Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein sternförmiges Gebiet und $z_0 = (x_0, y_0)$ ein Sternzentrum von Ω. Die C^2-Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ sei harmonisch. Wir definieren nun mit der Abkürzung $z = (x,y)$ die Funktion $v : \Omega \to \mathbb{R}$ gemäß

$$v(x,y) = \int_0^1 \left[\, (y-y_0)u_x\big(z_0 + t(z-z_0)\big) - (x-x_0)u_y\big(z_0+t(z-z_0)\big) \,\right] \mathrm{d}t\,.$$

Man zeige, dass durch $f(x+\mathrm{i}y) := u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ eine holomorphe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ gegeben ist und auch v eine harmonische C^2-Funktion ist. Außerdem zeige man, dass man mit diesem Resultat auch unmittelbar eine Lösung der Aufgabe 8.2 erhält.

Hinweis: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt sternförmig bzgl. des Sternzentrums $z_0 \in \Omega$, wenn Ω offen ist, und für alle $z \in \Omega$ das abgeschlossene Geradensegment von z_0 bis z komplett in Ω liegt. Dann ist Ω auch ein Gebiet.