Übungsblatt 4

Fourieranalysis

08.11.2018

Aufgabe 1: Es sei $f \in L^1(\mathbb{T})$ und $k, m \in \mathbb{N}$ fest mit $k - m \geq 1$. Zeigen Sie, dass aus $\hat{f}(n) = O(|n|^{-k})$ für $|n| \to \infty$ folgt, dass f m-mal fast überall auf $\mathbb{T}$ differenzierbar ist und dass $f^{(m)} \in L^2(\mathbb{T})$ gilt.

Aufgabe 2 : Es sei $f \in L^1(\mathbb{T})$ so dass für ein $\alpha > 0$ gilt

$$\int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)| \, dx = O(|h|^\alpha) \quad \text{für } h \to 0.$$

Sei $f_1 = f$ und für $k \geq 2$ sei $f_k = f * f_{k-1}$. Zeigen Sie:

(a) $f_k \in L^2(\mathbb{T})$ für $k > 1/(2\alpha)$.

(b) Ist $k > 1/\alpha$, so ist f_k eine stetige Funktion.

(*Hinweis zu (b):* Es gilt $f_k = f_{k-l} * f_l$ für $1 \leq l < k$. Nun Teil (a) und Höldersche Ungleichung anwenden.)

Aufgabe 3 : Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1_{(-1,1)}(x)$. Zeigen Sie, dass für die Maximalfunktion

$$M_f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(y)| \, dy$$

gilt

$$M_f(x) \geq \frac{C}{|x|} \quad \text{für } |x| \text{ groß}$$

für eine Konstante $C > 0$ und schliessen Sie daraus, dass $f \notin L^1(\mathbb{R})$ gilt.

Aufgabe 4 : Es sei $f \in L^1(\mathbb{T})$ differenzierbar mit $f' \in L^2(\mathbb{T})$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)| \leq \|f\|_1 + \left(2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\right)^{1/2} \|f'\|_2.$$

gilt. (*Hinweis:* Cauchy-Schwarzsche Ungleichung).