Übungsblatt 5

Fourieranalyse

29.11.2018

Aufgabe 1 : Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ meßbar und $p > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx = p \int_0^\infty t^{p-1} \lambda^1 \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > t\} \, dt.$$

Aufgabe 2 : Seien $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ und definiere $h : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ durch $h(t) = f(t)g(t)$. Zeigen Sie, dass

(a) $h \in L^1(\mathbb{T})$

(b) Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\hat{h}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\hat{g}(n-k)$$

(c) Die Reihe in (b) konvergiert absolut.

Hinweis zu (b): Cauchy-Produkt für Reihen.

Aufgabe 3 : Seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ sowie $f \in L^p(\mathbb{T})$ und $g \in L^q(\mathbb{T})$. Für $x \in \mathbb{T}$ sei $h_x : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$h_x(t) = f(x+t)g(t).$$

Zeigen Sie:

(a) $h_x \in L^1(\mathbb{T})$.

(b) $\hat{h}_x(n) \to 0$ für $|n| \to \infty$ gleichmäßig in $x \in \mathbb{T}$.

Hinweis zu (b): Zeigen Sie, dass das L^1-Stetigkeitsmodul von h_x gleichmäßig in x gegen Null konvergiert und benutzen Sie einen Satz aus der Vorlesung.