

Übungen zu Gew. Differentialgleichungen

SS 2019

Blatt 2/3

1. Die Steigung einer Kurve  $k$  ist in jedem Punkt  $P(x, y)$  gleich dem doppelten Wert der Summe seiner Koordinaten. Bestimmen Sie die Gleichung der Kurve  $k$ , die durch den Punkt  $(0,1)$  geht.

2. ( $C^{14}$ -Methode nach Libby)

Berechnen Sie das Alter eines fossilen Knochens, wenn nur noch 15% des ursprünglichen  $C^{14}$ -Anteil in ihm enthalten ist. Die Halbwertszeit von  $C^{14}$  beträgt 5730 Jahre.

3. Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen.

a)  $y' + y \sin x = \sin^3 x$

b)  $2x \sinh\left(\frac{y}{x}\right) + 3y \cosh\left(\frac{y}{x}\right) = 3xy' \cosh\left(\frac{y}{x}\right)$

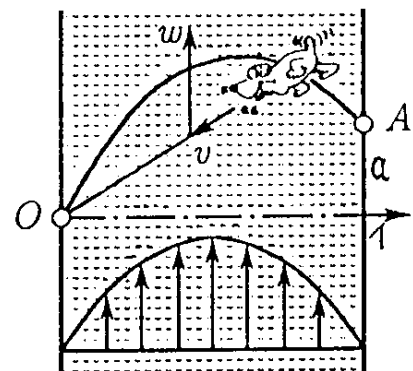
4. a) Skizzieren Sie für die Differentialgleichung  $y' = xy$  das Richtungsfeld und einige sogenannte Isoklinen, das sind Kurven, für die gilt:  $y' = f(x, y) = \text{const.}$

b) Geben Sie sämtliche Lösungen an.

5. Bestimmen Sie die Lösung des AWP

$$1 + y = (1 + x)y' \quad , \quad y(0) = 2$$

6. Ein treuer Hund steht im Punkt  $A(1, a)$  an einem reißenden Fluß, sieht seinen Herrn am anderen Ufer im Punkt  $O(0, 0)$ , springt spontan ins Wasser und strampelt sofort los, die Schnauze stets auf seinen Herrn gerichtet. Der Fluß habe die Breite 1, die Wassergeschwindigkeit  $w = 2x(1 - x)$  und die Geschwindigkeit des Hundes  $v = 1$  (ohne Einheiten).



a) Verifizieren Sie, dass

$$2x(1-x)\sqrt{x^2+y^2} - y + xy' = 0$$

die Differentialgleichung der Bahnen ist und lösen Sie das AWP  $y(1) = a$  mit der Substitution  $y(x) = x u(x)$ .

b) Wie lange braucht der Hund von  $A$  nach  $O$ , falls  $a = 0$ ?

$$\left( \int_0^1 \cosh x^2 dx \approx 1.10, \quad \int_0^1 \sinh x^2 dx \approx 0.36 \right).$$

7. Bestimmen Sie die Gleichung der Kurve, für deren Punkte gilt: Der Achsenabschnitt der Tangente in einem Kurvenpunkt  $P(x, y)$  ist gleich  $y^2$ .

Lösen Sie folgende Differentialgleichungen:

a)  $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x} \quad ; \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

b)  $y' = (y - 4x)^2 \quad \text{Hinweis: } v(x) = y - 4x$

8. (Fortsetzung der Aufgabe 6) An welchem Punkt  $A$  muß der Hund ins Wasser springen, um schnellstens gestreichelt zu werden.  
Wieviel Zeit gewinnt er?