# Vorbemerkung

Unter der Funktionentheorie versteht man die Analysis einer komplexen Veränderlichen. Der heutige Kanon einer einführenden Vorlesung (wie beispielsweise dieser) besteht aus Ergebnissen, die weitestgehend im Verlauf weniger Jahrzehnte des 19. Jahrunderts entstanden sind und geht vor allem auf die Arbeiten dreier Personen zurück:

Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857)
Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866)
Karl Wilhem Theodor Weierstrass (1815 – 1897)

Dass die Funktionentheorie allerdings zu dieser Zeit ein außerordentlich fruchtbares Forschungsgebiet war, zeigt allein schon, nach wie vielen und welchen Personen die Sätze benannt sind.

Was den Reiz der Funktionentheorie ausmacht, ist neben ihren zahlreichen Verbindungen zu anderen mathematischen Disziplinen (Algebra, Zahlentheorie, Topologie, um nur einige zu nennen) auch die Eleganz ihrer Ergebnisse und Methoden.
So ist eine Funktion, die in einer offenen Umgebung komplex differenzierbar ist, sofort beliebig oft komplex differenzierbar, ja sogar analytisch — etwas, das in der reellen Analysis undenkbar ist.
Unter den Methoden, die die Funktionentheorie bietet, sticht vor allem die Möglichkeit hervor, uneigentliche Integrale rationaler reeller Funktionen mit einem Umweg über $\mathbb{C}$ zu berechnen.

Der Inhalt der Vorlesung sei im Folgenden kurz angerissen: Das einleitende nullte Kapitel zeigt die Unterschiede zwischen reeller und komplexer Interpretation einer Funktion $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auf.

Kapitel 1 führt den Begriff der komplexen Differentiation und der Holomorphie ein. Dabei gehen wir eigentlich nur davon aus, dass ein Differentialquotient

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

auch über $\mathbb{C}$ Sinn macht. Eine Funktion, für die in einer vollen Umgebung um $z_0$ dieser Differentialquotient existiert, nennen wir *holomorph*. Wie komplexe Differenzierbarkeit in einem Punkt oder eben Holomorphie reell durch die Komponentenfunktionen $u+iv$ charakterisiert werden kann, ist Gegenstand dieses Kapitels.
Kapitel 2 befasst sich mit Kurvenintegralen. Diese sind der zentrale Bestandteil von CAUCHYs Zugang zur Funktionentheorie und nehmen auch im Verlauf dieser Vorlesung einen breiten Raum ein. Ziel dieses Kapitels ist, die wichtigsten Rechenregeln über sie zu erarbeiten.
Die wesentlichen Ergebnisse finden sich in Kapitel 3:

- der CAUCHYsche Integralsatz, der besagt, dass ein Kurvenintegral einer holomorphen Funktion nur von Anfangs- und Endpunkt des Integrationsweges abhängt,
- die lokale Darstellbarkeit einer holomorphen Funktion durch eine Potenzreihe (was WEIERSTRASS' Zugang zur Funktionentheorie war),
- die lokale Darstellbarkeit durch eine LAURENTreihe

  $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

- das Verhalten in der Nähe von Nullstellen oder isolierten Singularitäten.

Kapitel 4 widmet sich der Frage, wie die gewonnenen Ergebnisse sich übertragen lassen, wenn ein Integrationsweg mehrfach durchlaufen wird.
Eine der wichtigen Folgerungen aus Kapitel 4 ist der Residuensatz, der sich als mächtiges Werkzeug bei der Berechnung von uneigentlichen Integralen oder Reihen herausstellt. Diese Berechnungen werden in Kapitel 5 näher untersucht.
Zum Abschluss geht die Vorlesung auf Umkehrfunktionen ein und zeigt, mit welchen Schwierigkeiten dabei zu rechnen ist.

JENS BREITENBACH

# Kapitel 0

# Abbildungen $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$

Dieses Kapitel dient der Vorbereitung auf einen der zentralen Begriffe der Funktionentheorie, der komplexen Differenzierbarkeit. Ziel dieser Vorbereitung ist es, einige Zusammenhänge aufzuzeigen zwischen Funktionen von $\mathbb{R}^2$ in sich auf der einen Seite und Funktionen von $\mathbb{C}$ in sich andererseits.

Rufen wir uns zunächst einige Ergebnisse der Analysis der Funktionen zweier reeller Veränderlicher in Erinnerung:
Eine Funktion $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist im reellen Sinne erst einmal lediglich eine $\mathbb{R}^2$–wertige Funktion in zwei Veränderlichen: $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) =: \mathrm{Re} f(x, y) + \mathrm{i}\, \mathrm{Im} f(x, y)$.
Mit $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\mathrm{dist}((x, y), (x', y')) = \|(x - x', y - y')\|$ wird eine Metrik auf $U$ erzeugt. $(U, \mathrm{dist})$ ist damit ein metrischer Raum, der darüber hinaus vollständig ist, falls $U$ in $\mathbb{R}^2$ abgeschlossen ist.
Wir können also den aus Analysis I bis III bekannten Apparat von Beriffen anwenden, etwa

- Stetigkeit von $f$ in $(x_0, y_0)$ oder auf $U$,
- partielle Differenzierbarkeit von $f$ in $(x_0, y_0)$, (reelle!) totale Differenzierbarkeit in $(x_0, y_0)$, ebenso den Begriff der stetigen Differenzierbarkeit,
- Analytizität von $f$, d. h. $f_1$ und $f_2$ sind in $(x_0, y_0)$ durch ihre Taylorreihe darstellbar.

**Beispiel 0.1**

1. $U = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x \cdot y$ oder allgemein:

$$f(x, y) = c_{n,m}x^n y^m + c_{n,m-1}x^n y^{m-1} + \ldots, c_{i,j} \in \mathbb{R};$$

   dies ist eine reellwertige Funktion.

2. $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$ (Polynom über $\mathbb{C}$). Sind $f, g$ Polynome über $\mathbb{C}$ mit $g(z) \not\equiv 0$, kann man auch $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ betrachten; eine solche Funktion wird üblicherweise als *gebrochen rationale* Funktion bezeichnet.

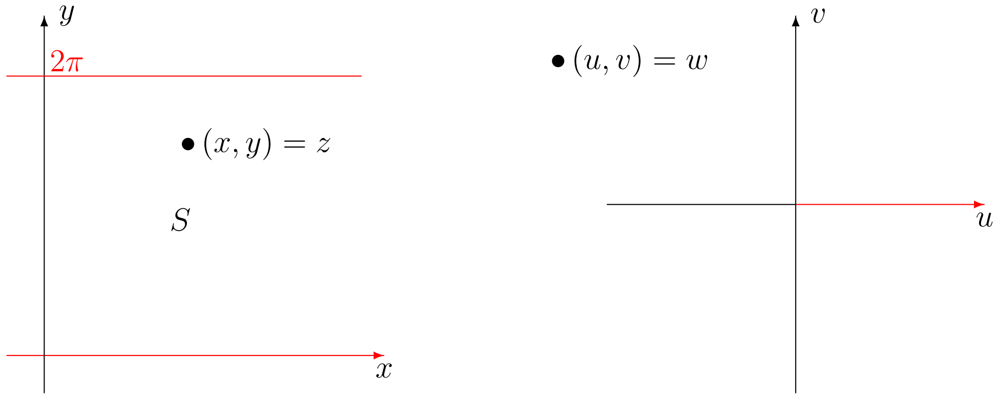
3. Funktionen $\mathrm{e}^z$, $\sin z$, $\cos z$ oder allgemein: analytische Funktionen, d. h. Funktionen, die durch eine Potenzreihe dargestellt werden:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

   Betrachten wir eine dieser Funktionen etwas näher, nämlich die Exponentialfunktion:

   Schreiben wir $z = x + \mathrm{i}y$, gilt $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$.

   In $y$–Richtung ist diese Funktion $2\pi$–periodisch; allerdings ist sie bijektiv von dem Streifen $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}; 0 < y < 2\pi\} = \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$ aufs Bild $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+^0$




   Die Umkehrfunktion ist der Logarithmus, der wohldefiniert ist als Abbildung $\log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+^0 \to S$.

   Die Umkehrbarkeit von Abbildungen und das Objekt der Riemannschen Fläche sind Gegenstand von Kapitel 6.

4. $U = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x, -y)$, oder in komplexer Schreibweise: $z \mapsto \overline{z}$

Um den Graphen einer Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bildlich darzustellen, hat man — anders als bei Funktionen von $\mathbb{R}$ in sich — ein prinzipielles Problem: der Graph ist eine dreidimensionale Fläche im vierdimensionalen Raum, was auf einem zweidimensionalen Blatt Papier nicht einfach zu zeichnen ist. Man zeichnet daher in der Regel Real- und Imaginärteil der Funktion separat.
Nehmen wir als Beispiel die Funktion $f(z) = z^2$ — oder in reeller Schreibweise $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Es sind zwei Arten gebräuchlich, Real- und Imaginärteil zu zeichnen: zum einen als Fläche mittels diagonaler Perspektive, zum anderen als „Draufsicht“ und Darstellung des Funktionsverlaufs durch Niveaulinien.

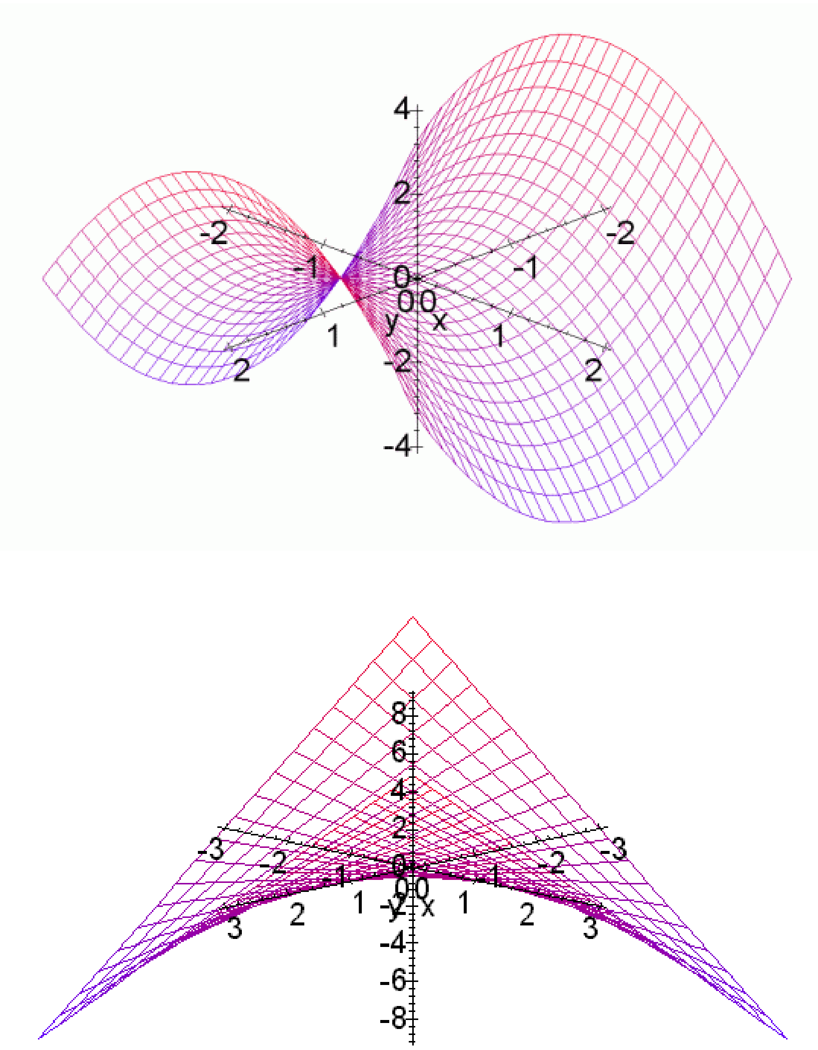
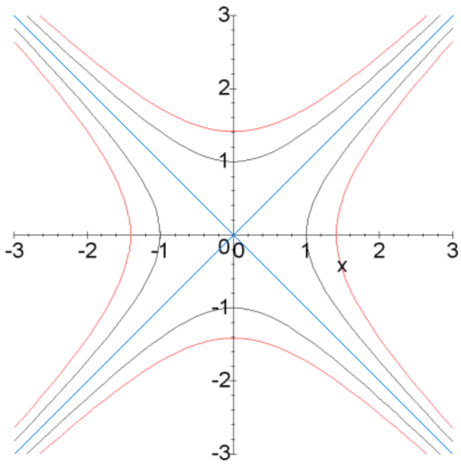



Abbildung 1: *Real- und Imaginärteil von $w = z^2$ in Flächendarstellung*



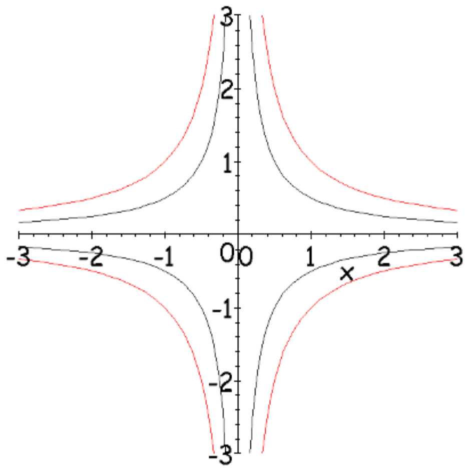




Abbildung 2: *Real- und Imaginärteil von $w = z^2$ in Niveauliniendarstellung. Die Linien stehen für die Werte* $\mathrm{Re}w = 0$, $\mathrm{Re}w = \pm 1$, $\mathrm{Re}w = \pm 2$ *und* $\mathrm{Im}w = \pm 1$, $\mathrm{Im}w = \pm 2$

Rufen wir uns als nächstes einige Ergebnisse der Linearen Algebra in Erinnerung: $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei eine lineare Abbildung mit Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Spezielle Fälle sind Drehungen,

$$A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi),$$

Streckungen,

$$A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}_+,$$

und Drehstreckungen

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}.$$

Zu einer Drehstreckung $A$ gibt es genau ein $t \in [0, 2\pi)$ mit

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Bekanntlich ist $\mathbb{R}^2$ mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation ein reeller Vektorraum mit kanonischer Basis $\{(1, 0), (0, 1)\}$. Wir definieren:

**Definition 0.2** *1.* $\mathrm{i} := (0, 1)$ *und* $\mathrm{i}^2 := (-1, 0)$.

*2. Wir betten* $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{C}$ *ein vermöge der Abbildung*

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto (x, 0) \end{cases}$$

*Wir schreiben kurz* $(x, 0) =: x$.

$\Phi$ ist offensichtlich injektiv, und wir können die Multiplikation auf $\mathbb{R}$ ebenfalls in $\mathbb{C}$ einbetten: $(x, 0)(y, 0) := (xy, 0)$; insbesondere: $(1, 0)(x, 0) = (x, 0)$.
Die Fortsetzung der Multiplikation von der Basis $\{(1, 0), (0, 1)\}$ ergibt:

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Körper mit $\Phi(\mathbb{R})$ (also $\mathbb{R}$) als Unterkörper.
Die Multiplikation auf $\mathbb{C}$ ist eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung. Die (reelle) Matrix der Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (a, b)(x, y)$ ist bezüglich der kanonischen Basis

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

also gerade eine Drehstreckung.
Vermöge der Abbildung

$$(a, b) \stackrel{\Phi}{\mapsto} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

bilden die reellen $2 \times 2$–Matrizen dieser Gestalt einen zu $\mathbb{C}$ isomorphen Körper.

**Bemerkung:** Die Isomorphie erhält man auch durch eine andere Überlegung: eine komplexe Zahl $z = a + b\mathrm{i}$ lässt sich auch in der Form $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ schreiben, d. h. die multiplikative Gruppe $\mathbb{C}^\times$ ist das direkte Produkt der (multiplikativen) Gruppen $\mathbb{R}_+^\times$ und $S^1$. Mit der Isomorphie $S^1 \cong \mathrm{SO}(2)$ ist also $\mathbb{C}^\times \cong \mathbb{R}_+^\times \times \mathrm{SO}(2)$, dementsprechend

$$\mathbb{C} \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Versehen wir $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{R})(\cong \mathbb{R}^4)$ mit der EUKLIDischen Norm, so gilt:

$$\|\Phi(a, b)\| = \left\| \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2a^2 + 2b^2} = \sqrt{2}\|(a, b)\|,$$

mit anderen Worten: $\Phi$ erhält bis auf einen konstanten Faktor die Norm.
Wir setzen:

$$|z| := \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{für } z = (x,y).$$

**Lemma 0.3** *Der Betrag einer komplexen Zahl hat die folgenden Eigenschaften:*

1. $|z| = 0 \iff z = 0$
2. $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

**Beweis:**

1. offensichtlich.
2. $|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1 \overline{z_1})(z_2 \overline{z_2}) = |z_1|^2 |z_2|^2$
3. $\underline{\alpha)}$ $z_1 + z_2 = 0$. Dieser Fall ist klar.
   $\underline{\beta)}$ Sei $z_1 + z_2 \neq 0$. Dann ist
   $$1 = \frac{z_1}{z_1+z_2} + \frac{z_2}{z_1+z_2}.$$
   Es folgt
   $$\begin{aligned} |\mathrm{Re}\, 1| &= \left| \mathrm{Re} \frac{z_1}{z_1+z_2} + \mathrm{Re} \frac{z_2}{z_1+z_2} \right| \\ &\leq \left| \frac{z_1}{z_1+z_2} \right| + \left| \frac{z_2}{z_1+z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_1+z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_1+z_2|} \end{aligned}$$

□

**Beispiel 0.4** Beispiele für Funktionen in $z$:

1. $f(z) = c$, $c \in \mathbb{C}$ (konstante Funktion)
2. $f(z) = z$ (identische Funktion)
3. $f(z) = \overline{z}$ (Konjugation)
4. $f(z) = a \cdot z$, $a \neq 0$ (Drehstreckung mittels $a$)
5. $f(z) = \mathrm{Re}\, z$ (Projektion auf $x$–Achse)

6. $f(z) = \operatorname{Im} z$ (Projektion auf $y$–Achse)

7. $f(z) = |z|$

8. $f(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$, $a_\nu \in \mathbb{C}$ (Polynom über $\mathbb{C}$)

9. $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$, $p, q$ Polynome, $z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C}; q(z) = 0\}$ (rationale Funktion).
   Ein Spezialfall hiervon ist eine *lineare Transformation*
   $$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, z \neq -\frac{d}{c}.$$

10. Wir schreiben $z = x + \mathrm{i}y$. Sei
    $$f(z) = \sum_{\substack{\mu=1,\ldots,m \\ \nu=1,\ldots,n}} a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu.$$
    Dann lässt sich dieses Polynom auch als Polynom in $z$ und $\overline{z}$ schreiben:
    $$f(z) = \sum_{\substack{\kappa=1,\ldots,k \\ \lambda=1,\ldots,l}} b_{\kappa\lambda} z^\kappa \overline{z}^\lambda.$$

11. $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n (z - z_0)^n$, $a_n \in \mathbb{C}$ (Potenzreihe). Bereits aus der reellen Analysis bekannte Potzenzreihen wie
    $$\begin{aligned} \exp(z) &:= \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!} =: \mathrm{e}^z \\ \sin z &:= \sum_{n=0}^\infty (-1)^{2n+1} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cos z &:= \sum_{n=0}^\infty (-1)^{2n} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$
    lassen sich ebenso über $\mathbb{C}$ definieren.

Wie über $\mathbb{R}$ gelten die Eulerschen Formeln
$$\sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}), \quad \cos z = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$$
sowie die Identität
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i} \sin z.$$

Schreiben wir $z = x + \mathrm{i}y$ folgt

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} \Rightarrow |\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}z}, \arg(\mathrm{e}^z) = \mathrm{Im}z.$$

Bekanntermaßen gilt $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1$. Es folgt daher für $k \in \mathbb{Z}$: $\mathrm{e}^{z+2k\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^z(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}})^k = \mathrm{e}^z$. Also hat die Abbildung $\mathbb{C} \ni z \mapsto \mathrm{e}^z \in \mathbb{C}$ die Perioden $2\pi\mathrm{i} \cdot k$. Dies sind gleichzeitig die einzigen Perioden, denn

$$\mathrm{e}^{z_1} = \mathrm{e}^{z_2} \Rightarrow 1 = \mathrm{e}^{z_1 - z_2} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) \text{ mit } z_1 - z_2 = x + \mathrm{i}y.$$

Aus dem Verhalten von exp, sin und cos auf $\mathbb{R}$ folgt $x = 0$ und $\sin y = 0 \wedge \cos y = 1 \Rightarrow y = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

**Bemerkung:** $\exp : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^\times, \cdot)$ ist ein Homomorphismus mit Kern $2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$. Hieraus erhalten wir ein weiteres Resultat: Sei $z = x + \mathrm{i}y$. Es gilt $\sin z = 0 \iff \mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} = 1 \iff z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Mit $\cos z = \sin(z + \pi/2)$ folgt:
Der komplexe Sinus und Cosinus haben nur reelle Nullstellen und die Perioden $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Sie haben keine weiteren Perioden.