Bernd Dreseler

Funktionentheorie I

Sommersemester 1991

Vorlesungsmitschrift von J.Breitenbach

Siegen 2002

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung

Unter der Funktionentheorie versteht man die Analysis einer komplexen Veränderlichen. Der heutige Kanon einer einführenden Vorlesung (wie beispielsweise dieser) besteht aus Ergebnissen, die weitestgehend im Verlauf weniger Jahrzehnte des 19. Jahrunderts entstanden sind und geht vor allem auf die Arbeiten dreier Personen zurück:

Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857)
Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866)
Karl Wilhem Theodor Weierstrass (1815 – 1897)

Dass die Funktionentheorie allerdings zu dieser Zeit ein außerordentlich fruchtbares Forschungsgebiet war, zeigt allein schon, nach wie vielen und welchen Personen die Sätze benannt sind.

Was den Reiz der Funktionentheorie ausmacht, ist neben ihren zahlreichen Verbindungen zu anderen mathematischen Disziplinen (Algebra, Zahlentheorie, Topologie, um nur einige zu nennen) auch die Eleganz ihrer Ergebnisse und Methoden.
So ist eine Funktion, die in einer offenen Umgebung komplex differenzierbar ist, sofort beliebig oft komplex differenzierbar, ja sogar analytisch — etwas, das in der reellen Analysis undenkbar ist.
Unter den Methoden, die die Funktionentheorie bietet, sticht vor allem die Möglichkeit hervor, uneigentliche Integrale rationaler reeller Funktionen mit einem Umweg über $\mathbb{C}$ zu berechnen.

Der Inhalt der Vorlesung sei im Folgenden kurz angerissen: Das einleitende nullte Kapitel zeigt die Unterschiede zwischen reeller und komplexer Interpretation einer Funktion $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auf.

Kapitel 1 führt den Begriff der komplexen Differentiation und der Holomorphie ein. Dabei gehen wir eigentlich nur davon aus, dass ein Differentialquotient

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

auch über $\mathbb{C}$ Sinn macht. Eine Funktion, für die in einer vollen Umgebung um z_0 dieser Differentialquotient existiert, nennen wir *holomorph*. Wie komplexe Differenzierbarkeit in einem Punkt oder eben Holomorphie reell durch die Komponentenfunktionen $u+iv$ charakterisiert werden kann, ist Gegenstand dieses Kapitels.
Kapitel 2 befasst sich mit Kurvenintegralen. Diese sind der zentrale Bestandteil von Cauchys Zugang zur Funktionentheorie und nehmen auch im Verlauf dieser Vorlesung einen breiten Raum ein. Ziel dieses Kapitels ist, die wichtigsten Rechenregeln über sie zu erarbeiten.
Die wesentlichen Ergebnisse finden sich in Kapitel 3:

- der Cauchysche Integralsatz, der besagt, dass ein Kurvenintegral einer holomorphen Funktion nur von Anfangs- und Endpunkt des Integrationsweges abhängt,
- die lokale Darstellbarkeit einer holomorphen Funktion durch eine Potenzreihe (was Weierstrass' Zugang zur Funktionentheorie war),
- die lokale Darstellbarkeit durch eine Laurentreihe

  $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

- das Verhalten in der Nähe von Nullstellen oder isolierten Singularitäten.

Kapitel 4 widmet sich der Frage, wie die gewonnenen Ergebnisse sich übertragen lassen, wenn ein Integrationsweg mehrfach durchlaufen wird.
Eine der wichtigen Folgerungen aus Kapitel 4 ist der Residuensatz, der sich als mächtiges Werkzeug bei der Berechnung von uneigentlichen Integralen oder Reihen herausstellt. Diese Berechnungen werden in Kapitel 5 näher untersucht.
Zum Abschluss geht die Vorlesung auf Umkehrfunktionen ein und zeigt, mit welchen Schwierigkeiten dabei zu rechnen ist.

Jens Breitenbach

Kapitel 0

Abbildungen $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$

Dieses Kapitel dient der Vorbereitung auf einen der zentralen Begriffe der Funktionentheorie, der komplexen Differenzierbarkeit. Ziel dieser Vorbereitung ist es, einige Zusammenhänge aufzuzeigen zwischen Funktionen von $\mathbb{R}^2$ in sich auf der einen Seite und Funktionen von $\mathbb{C}$ in sich andererseits.

Rufen wir uns zunächst einige Ergebnisse der Analysis der Funktionen zweier reeller Veränderlicher in Erinnerung:
Eine Funktion $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist im reellen Sinne erst einmal lediglich eine $\mathbb{R}^2$–wertige Funktion in zwei Veränderlichen: $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) =: \mathrm{Re} f(x, y) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im} f(x, y)$.
Mit $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\mathrm{dist}((x, y), (x', y')) = \|(x - x', y - y')\|$ wird eine Metrik auf U erzeugt. (U, dist) ist damit ein metrischer Raum, der darüber hinaus vollständig ist, falls U in $\mathbb{R}^2$ abgeschlossen ist.
Wir können also den aus Analysis I bis III bekannten Apparat von Beriffen anwenden, etwa

- Stetigkeit von f in (x_0, y_0) oder auf U,
- partielle Differenzierbarkeit von f in (x_0, y_0), (reelle!) totale Differenzierbarkeit in (x_0, y_0), ebenso den Begriff der stetigen Differenzierbarkeit,
- Analytizität von f, d. h. f_1 und f_2 sind in (x_0, y_0) durch ihre TAYLORreihe darstellbar.

Beispiel 0.1

1. $U = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x \cdot y$ oder allgemein:

$$f(x, y) = c_{n,m} x^n y^m + c_{n,m-1} x^n y^{m-1} + \ldots, c_{i,j} \in \mathbb{R};$$

dies ist eine reellwertige Funktion.

2. $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$ (Polynom über $\mathbb{C}$). Sind f, g Polynome über $\mathbb{C}$ mit $g(z) \not\equiv 0$, kann man auch $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ betrachten; eine solche Funktion wird üblicherweise als *gebrochen rationale* Funktion bezeichnet.

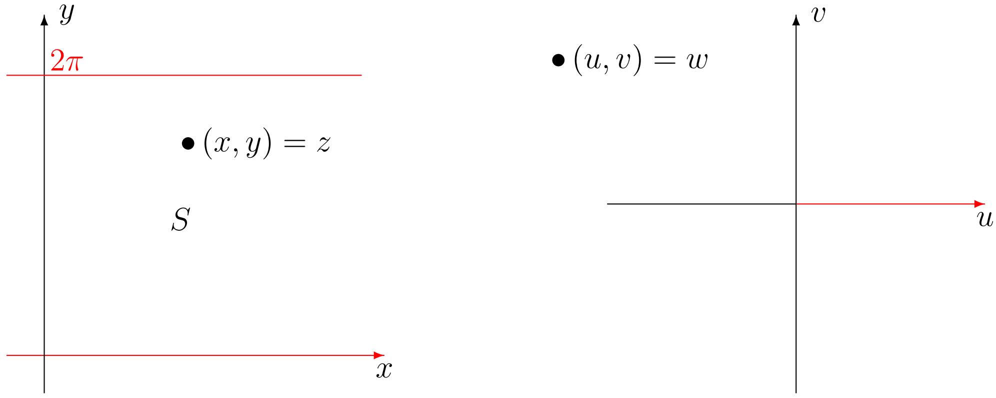
3. Funktionen e^z, $\sin z$, $\cos z$ oder allgemein: analytische Funktionen, d. h. Funktionen, die durch eine Potenzreihe dargestellt werden:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Betrachten wir eine dieser Funktionen etwas näher, nämlich die Exponentialfunktion:

Schreiben wir $z = x + \mathrm{i}y$, gilt $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$.

In y–Richtung ist diese Funktion 2π–periodisch; allerdings ist sie bijektiv von dem Streifen $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}; 0 < y < 2\pi\} = \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$ aufs Bild $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+^0$



Die Umkehrfunktion ist der Logarithmus, der wohldefiniert ist als Abbildung $\log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+^0 \to S$.

Die Umkehrbarkeit von Abbildungen und das Objekt der RIEMANNschen Fläche sind Gegenstand von Kapitel 6.

4. $U = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x, -y)$, oder in komplexer Schreibweise: $z \mapsto \overline{z}$

Um den Graphen einer Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bildlich darzustellen, hat man — anders als bei Funktionen von $\mathbb{R}$ in sich — ein prinzipielles Problem: der Graph ist eine dreidimensionale Fläche im vierdimensionalen Raum, was auf einem zweidimensionalen Blatt Papier nicht einfach zu zeichnen ist. Man zeichnet daher in der Regel Real- und Imaginärteil der Funktion separat.
Nehmen wir als Beispiel die Funktion $f(z) = z^2$ — oder in reeller Schreibweise $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Es sind zwei Arten gebräuchlich, Real- und Imaginärteil zu zeichnen: zum einen als Fläche mittels diagonaler Perspektive, zum anderen als „Draufsicht“ und Darstellung des Funktionsverlaufs durch Niveaulinien.

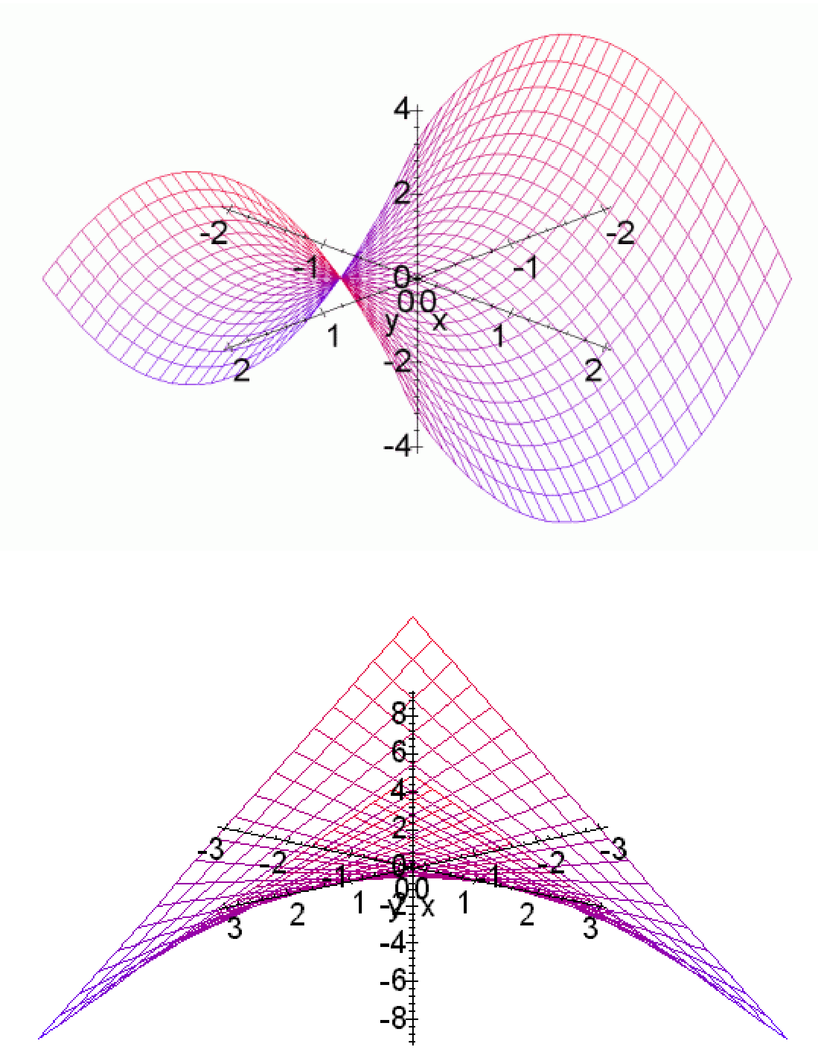


Abbildung 1: *Real- und Imaginärteil von $w = z^2$ in Flächendarstellung*

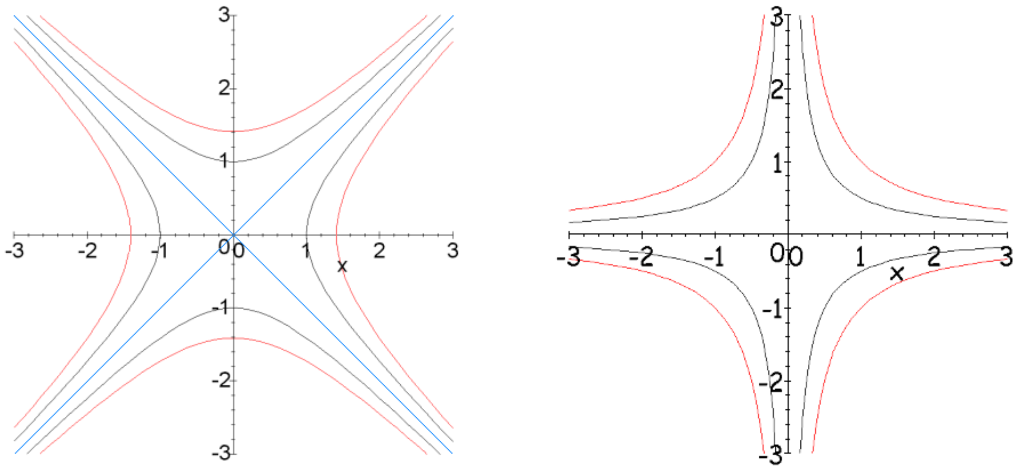


Abbildung 2: *Real- und Imaginärteil von $w = z^2$ in Niveauliniendarstellung. Die Linien stehen für die Werte* $\mathrm{Re}w = 0$*,* $\mathrm{Re}w = \pm 1$*,* $\mathrm{Re}w = \pm 2$ *und* $\mathrm{Im}w = \pm 1$*,* $\mathrm{Im}w = \pm 2$

Rufen wir uns als nächstes einige Ergebnisse der Linearen Algebra in Erinnerung: $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei eine lineare Abbildung mit Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Spezielle Fälle sind Drehungen,

$$A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi),$$

Streckungen,

$$A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}_+,$$

und Drehstreckungen

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2+b^2} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}.$$

Zu einer Drehstreckung A gibt es genau ein $t \in [0, 2\pi)$ mit

$$A = \sqrt{a^2+b^2} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Bekanntlich ist $\mathbb{R}^2$ mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation ein reeller Vektorraum mit kanonischer Basis $\{(1,0), (0,1)\}$. Wir definieren:

Definition 0.2 *1.* $\mathrm{i} := (0,1)$ *und* $\mathrm{i}^2 := (-1,0)$.

2. Wir betten $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{C}$ *ein vermöge der Abbildung*

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto (x,0) \end{cases}$$

Wir schreiben kurz $(x,0) =: x$.

Φ ist offensichtlich injektiv, und wir können die Multiplikation auf $\mathbb{R}$ ebenfalls in $\mathbb{C}$ einbetten: $(x,0)(y,0) := (xy,0)$; insbesondere: $(1,0)(x,0) = (x,0)$.
Die Fortsetzung der Multiplikation von der Basis $\{(1,0),(0,1)\}$ ergibt:

$$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

$(\mathbb{C},+,\cdot)$ ist ein kommutativer Körper mit $\Phi(\mathbb{R})$ (also $\mathbb{R}$) als Unterkörper.
Die Multiplikation auf $\mathbb{C}$ ist eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung. Die (reelle) Matrix der Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (a,b)(x,y)$ ist bezüglich der kanonischen Basis

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

also gerade eine Drehstreckung.
Vermöge der Abbildung

$$(a,b) \overset{\Phi}{\mapsto} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

bilden die reellen 2×2–Matrizen dieser Gestalt einen zu $\mathbb{C}$ isomorphen Körper.

Bemerkung: Die Isomorphie erhält man auch durch eine andere Überlegung: eine komplexe Zahl $z = a + b\mathrm{i}$ lässt sich auch in der Form $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ schreiben, d. h. die multiplikative Gruppe $\mathbb{C}^\times$ ist das direkte Produkt der (multiplikativen) Gruppen $\mathbb{R}_+^\times$ und S^1. Mit der Isomorphie $S^1 \cong \mathrm{SO}(2)$ ist also $\mathbb{C}^\times \cong \mathbb{R}_+^\times \times \mathrm{SO}(2)$, dementsprechend

$$\mathbb{C} \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}; a,b \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Versehen wir $\mathrm{Mat}(2,\mathbb{R}) (\cong \mathbb{R}^4)$ mit der EUKLIDischen Norm, so gilt:

$$\|\Phi(a,b)\| = \left\| \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2a^2 + 2b^2} = \sqrt{2}\|(a,b)\|,$$

mit anderen Worten: Φ erhält bis auf einen konstanten Faktor die Norm.
Wir setzen:

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{für } z = (x,y).$$

Lemma 0.3 *Der Betrag einer komplexen Zahl hat die folgenden Eigenschaften:*

1. $|z| = 0 \iff z = 0$

2. $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Beweis:

1. offensichtlich.

2. $|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1 \overline{z_1})(z_2 \overline{z_2}) = |z_1|^2 |z_2|^2$

3. $\underline{\alpha)}$ $z_1 + z_2 = 0$. Dieser Fall ist klar.

   $\underline{\beta)}$ Sei $z_1 + z_2 \neq 0$. Dann ist

   $$1 = \frac{z_1}{z_1 + z_2} + \frac{z_2}{z_1 + z_2}.$$

   Es folgt

   $$\begin{aligned} |\mathrm{Re}\, 1| &= \left| \mathrm{Re} \frac{z_1}{z_1 + z_2} + \mathrm{Re} \frac{z_2}{z_1 + z_2} \right| \\ &\leq \left| \frac{z_1}{z_1 + z_2} \right| + \left| \frac{z_2}{z_1 + z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_1 + z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_1 + z_2|} \end{aligned}$$

□

Beispiel 0.4 Beispiele für Funktionen in z:

1. $f(z) = c$, $c \in \mathbb{C}$ (konstante Funktion)

2. $f(z) = z$ (identische Funktion)

3. $f(z) = \overline{z}$ (Konjugation)

4. $f(z) = a \cdot z$, $a \neq 0$ (Drehstreckung mittels a)

5. $f(z) = \mathrm{Re}\, z$ (Projektion auf x–Achse)

6. $f(z) = \operatorname{Im} z$ (Projektion auf y–Achse)

7. $f(z) = |z|$

8. $f(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$, $a_\nu \in \mathbb{C}$ (Polynom über $\mathbb{C}$)

9. $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$, p, q Polynome, $z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C}; q(z) = 0\}$ (rationale Funktion).
   Ein Spezialfall hiervon ist eine *lineare Transformation*

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, z \neq -\frac{d}{c}.$$

10. Wir schreiben $z = x + \mathrm{i}y$. Sei

$$f(z) = \sum_{\substack{\mu=1,\ldots,m \\ \nu=1,\ldots,n}} a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu.$$

   Dann lässt sich dieses Polynom auch als Polynom in z und $\overline{z}$ schreiben:

$$f(z) = \sum_{\substack{\kappa=1,\ldots,k \\ \lambda=1,\ldots,l}} b_{\kappa\lambda} z^\kappa \overline{z}^\lambda.$$

11. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, $a_n \in \mathbb{C}$ (Potenzreihe). Bereits aus der reellen Analysis bekannte Potzenzreihen wie

$$\begin{aligned}
\exp(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} =: \mathrm{e}^z \\
\sin z &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
\cos z &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n} \frac{z^{2n}}{(2n)!}
\end{aligned}$$

   lassen sich ebenso über $\mathbb{C}$ definieren.

Wie über $\mathbb{R}$ gelten die EULERschen Formeln

$$\sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}), \quad \cos z = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$$

sowie die Identität

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i} \sin z.$$

Schreiben wir $z = x + \mathrm{i}y$ folgt

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} \Rightarrow |\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}z}, \arg(\mathrm{e}^z) = \mathrm{Im}z.$$

Bekanntermaßen gilt $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1$. Es folgt daher für $k \in \mathbb{Z}$: $\mathrm{e}^{z+2k\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^z(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}})^k = \mathrm{e}^z$. Also hat die Abbildung $\mathbb{C} \ni z \mapsto \mathrm{e}^z \in \mathbb{C}$ die Perioden $2\pi\mathrm{i} \cdot k$. Dies sind gleichzeitig die einzigen Perioden, denn

$$\mathrm{e}^{z_1} = \mathrm{e}^{z_2} \Rightarrow 1 = \mathrm{e}^{z_1 - z_2} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) \text{ mit } z_1 - z_2 = x + \mathrm{i}y.$$

Aus dem Verhalten von exp, sin und cos auf $\mathbb{R}$ folgt $x = 0$ und $\sin y = 0 \wedge \cos y = 1 \Rightarrow y = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Bemerkung: $\exp : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^\times, \cdot)$ ist ein Homomorphismus mit Kern $2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$. Hieraus erhalten wir ein weiteres Resultat: Sei $z = x + \mathrm{i}y$. Es gilt $\sin z = 0 \iff \mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} = 1 \iff z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Mit $\cos z = \sin(z + \pi/2)$ folgt:
Der komplexe Sinus und Cosinus haben nur reelle Nullstellen und die Perioden $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Sie haben keine weiteren Perioden.

Kapitel 1

Holomorphe Funktionen

Zur Erinnerung: $I \subset \mathbb{R}$ sei ein offenes Intervall, und sei $z_0 \in I$. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in z_0, falls der Limes

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$$

existiert. Dazu ist äquivalent: Es existiert eine in z_0 stetige Funktion Δ auf I mit

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\Delta(z), \ z \in I.$$

Es gilt $\Delta(z_0) = f'(z_0)$.
Auf $\mathbb{R}^2$ sieht dies analog aus: $U \subset \mathbb{R}^2$ sei offen, $f : U \to \mathbb{R}^2$ heißt (reell) differenzierbar in z_0, falls eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ existiert mit

$$f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + o(\|z - z_0\|) \quad (z \to z_0).$$

Schreiben wir $z = (x, y)$, $f = (f_1, f_2)$, hat A die folgende Matrixdarstellung (Jacobimatrix):

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix}$$

Eine äquivalente Formulierung der totalen reellen Differenzierbarkeit von f ist: Es existiert eine in z_0 stetige Abbildung $A : U \to \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R})$, $z \mapsto \left(\begin{smallmatrix} A_1(z) & B_1(z) \\ A_2(z) & B_2(z) \end{smallmatrix}\right)$, so dass für alle $z \in U$ gilt: $f(z) = f(z_0) + A(z)(z - z_0)$. Es gilt $A(z_0) = Df(z_0)$.

Unser Ziel ist, herauszuarbeiten, wie der Differentialquotient, der ja auch für komplexe Zahlen sinnvoll ist, mit der Jacobimatrix in Einklang gebracht werden kann.

Wir schreiben dazu zuerst $f := g + \mathrm{i}h$ mit reellwertigen Funktionen g und h, ferner $z = x + \mathrm{i}y$, $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$. Dann bedeutet (reelle) Differenzierbarkeit

$$\begin{aligned} f(z) &= \begin{pmatrix} g(z) \\ h(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(z_0) \\ h(z_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1(z) & B_1(z) \\ A_2(z) & B_2(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g(z_0) \\ h(z_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1(z)(x - x_0) & B_1(z)(y - y_0) \\ A_2(z)(x - x_0) & B_2(z)(y - y_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g(z_0) \\ h(z_0) \end{pmatrix} + (x - x_0) \underbrace{\begin{pmatrix} A_1(z) \\ A_2(z) \end{pmatrix}}_{=:\Delta_1(z)} + (y - y_0) \underbrace{\begin{pmatrix} B_1(z) \\ B_2(z) \end{pmatrix}}_{=:\Delta_2(z)} \end{aligned}$$

Die Funktionen $\Delta_1, \Delta_2 : U \to \mathbb{C}$ sind in z_0 stetig mit

$$\Delta_1(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0), \quad \Delta_2(z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0).$$

Definition 1.1 *$U \subset \mathbb{C}$ sei offen, $f : U \to \mathbb{C}$, $z_0 \in U$. f heißt* (komplex) differenzierbar in z_0, *falls der Grenzwert*

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{1.1}$$

existiert.
$f : U \to \mathbb{C}$ wird komplex differenzierbar genannt, falls f in allen Punkten $z_0 \in D$ komplex differenzierbar ist.
f heißt holomorph *in $z_0 \in U$, falls f in einer Umgebung um z_0 komplex differenzierbar ist.*

Äquivalent zu (1.1) ist: es existiert eine in z_0 stetige Funktion $\Delta : U \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = f(z_0) + \Delta(z)(z - z_0)$. Dazu setzt man als $\Delta(z)$ gerade den Differenzenquotienten in (1.1)

Bemerkung: Sei $z \in \mathbb{C}$. $\mathbb{C} \ni w \mapsto \Delta(z) \cdot w \in \mathbb{C}$ (Multiplikation in $\mathbb{C}$) ist $\mathbb{C}$–linear, also auch $\mathbb{R}$–linear.
Folglich gilt: Falls $f = g + \mathrm{i}h$ in z_0 komplex differenzierbar ist, ist f auch reell differenzierbar (man wähle $A(z) = \Delta(z)$), und es gilt

$$A(z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial h}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial h}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix}$$

mit folgenden Gleichungen

$$(1.2) \qquad \frac{\partial g}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial h}{\partial y}(z_0), \quad \frac{\partial h}{\partial x}(z_0) = -\frac{\partial g}{\partial y}(z_0)$$

(Cauchy–Riemannsche Differentialgleichungen) oder in Kurzschreibweise

$$g_x = h_y, \quad h_x = -g_y$$

Die Umkehrung gilt auch: Sei f in $z_0 \in U$ reell differenzierbar, und gelte $f(z) = f(z_0) + A(z)(z - z_0)$, $A \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R})$, $z \mapsto A(z)$ in z_0 stetig, und gelten die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen in z_0. Dann hat $A(z_0)$ die Gestalt einer komplexen Zahl vermöge des Isomorphismus $\Phi : (x, y) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x & -y \\ y & x \end{smallmatrix}\right)$.
Die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen bedeuten also nichts Anderes als dass die (reelle) Jacobimatrix von f die Form einer Drehstreckung hat und damit mit einer komplexen Zahl identifiziert werden kann.

Satz 1.2 *$f : U \to \mathbb{C}$ ist genau dann reell differenzierbar in $z_0 \in U$, wenn es in z_0 stetige Funktionen $A_1, A_2 : U \to \mathbb{C}$ gibt mit*

$$f(z) = f(z_0) + A_1(z)(z - z_0) + A_2(z)(\overline{z} - \overline{z_0})$$

Beweis: Reelle Differenzierbarkeit von f in z_0 ist äquivalent zu der Aussage

$$(1.3) \qquad f(z) = f(z_0) + (x - x_0)\Delta_1(z) + (y - y_0)\Delta_2(z)$$

mit in z_0 stetigen Funktionen $\Delta_1, \Delta_2 : U \to \mathbb{C}$.
Nun gilt

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(z - z_0 + \overline{z} - \overline{z_0}), \quad y - y_0 = \frac{1}{2i}(z - z_0 - \overline{z} + \overline{z_0}).$$

Setzen wir dies in Gleichung (1.3) ein, erhalten wir

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\underbrace{\frac{1}{2}\big(\Delta_1(z) + \mathrm{i}\Delta_2(z)\big)}_{=:A_1(z)} + (\overline{z} - \overline{z_0})\underbrace{\frac{1}{2}\big(\Delta_1(z) - \mathrm{i}\Delta_2(z)\big)}_{=:A_2(z)}.$$

Umgekehrt kann man aus zwei Funktionen A_1, A_2, die diese Gleichung erfüllen, wiederum zwei Funktionen $B_1, B_2 : U \to \mathbb{C}$ gewinnen, so dass

$$f(z) = f(z_0) + (x - x_0)B_1(z) + (y - y_0)B_2(z).$$

Diese Rechnung bleibt dem Leser zur Übung überlassen. □

Die Aussage des Satzes legt es nahe, z und $\overline{z}$ als unabhängige Variablen zu betrachten. Man definiert daher die sogenannten WIRTINGERschen Ableitungen[1]

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) := \frac{1}{2}(f_x - \mathrm{i} f_y), \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) := \frac{1}{2}(f_x + \mathrm{i} f_y), \tag{1.4}$$

Diese Definition wird klarer, wenn man sich folgende Rechnung vor Augen führt: Wir schreiben $f = g + \mathrm{i}h$. Dann ist

$$f' = \begin{pmatrix} g_x & g_y \\ h_x & h_y \end{pmatrix}.$$

Falls f komplex differenzierbar ist, gelten die CAUCHY–RIEMANNschen Differentialgleichungen, und f' kann mit der komplexen Zahl $g_x - \mathrm{i} g_y$ identifiziert werden. Gleichzeitig gilt

$$f_x = g_x + \mathrm{i}h_x = g_x - \mathrm{i}g_y, \quad f_y = g_y + \mathrm{i}h_y = g_y + \mathrm{i}g_x,$$

und für $\partial f/\partial z$ und $\partial f/\partial \overline{z}$ folgt:

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial f}{\partial z} &= f_x - \mathrm{i} f_y \\ &= g_x - \mathrm{i}g_y - \mathrm{i}(g_y + \mathrm{i}g_x) = 2g_x - 2\mathrm{i}g_y = 2f' \\ 2\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= f_x + \mathrm{i} f_y \\ &= g_x - \mathrm{i}g_y + \mathrm{i}(g_y + \mathrm{i}g_x) = 0 \end{aligned}$$

Wir haben damit die Aussage, dass, falls f komplex differenzierbar in z_0 ist, gilt:

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0), \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$$

Die Bedeutung der zweiten Gleichung wird vor allem durch den folgenden Satz deutlich

Satz 1.3 *Sei $f : U \to \mathbb{C}$, und sei $z_0 \in U$. Dann ist f in z_0 komplex differenzierbar genau dann, wenn f in z_0 reell differenzierbar und $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$ ist.*

[1]Nach Wilhelm WIRTINGER (1865 – 1945). Die Operatoren wurden von Henri POINCARÉ eingeführt, die Theorie um sie wurde jedoch von WIRTINGER ausgebaut, weshalb sich vor allem im deutschsprachigen Raum der Begriff WIRTINGERkalkül eingebürgert hat.

Beweis: Die Richtung „$\Longrightarrow$“ wurde bereits in obiger Rechnung gezeigt.

„$\Longleftarrow$“: Sei f reell differenzierbar und gelte $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} f_x + \mathrm{i} f_y = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad g_x + \mathrm{i} h_x + \mathrm{i}(g_y + \mathrm{i} h_y) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad g_x - h_y + \mathrm{i}(h_x + g_y) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad g_x = h_y \wedge h_x = -g_y. \end{aligned}$$

□

Beispiel 1.4 Beispiele und Regeln für komplexe Differentiation:

1. $f(z) = \overline{z}$ ist nirgends komplex differenzierbar, denn $Df = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ erfüllt nicht die CAUCHY–RIEMANNschen Differentialgleichungen.
2. $f \mapsto f'$ ist $\mathbb{C}$-linear.
3. Es gelten Produkt-, Quotienten- und Kettenregel.
4. Sei $f(z) = z^n$. Dann ist $f'(z) = nz^{n-1}$.
5. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ mit Konvergenzradius $R > 0$.

   Behauptung: f ist auf der offenen Kreisscheibe $B_R(z_0)$ holomorph.

   1. Beweis:

   (a) Man zeigt: f ist in z_0 differenzierbar; dies ist offensichtlich.

   (b) Man zeigt durch Umentwicklung: f ist in z_1 differenzierbar mit $|z_1 - z_0| < R$.

   2. Beweis: OBdA. nehmen wir an, der Entwicklungspunkt sei $z_0 = 0$ und damit $f(z) = \sum_n a_n z^n$.

   Sei $b \in \mathbb{C}$ mit $|b| < R$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(z) - f(b) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z^n - b^n) \\ &\overset{!}{=} (z - b)\Delta(z) \text{ mit } \Delta : B_R(0) \to \mathbb{C} \text{ in } b \text{ stetig} \\ &= (z - b) \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} \frac{z^n - b^n}{z - b}. \end{aligned}$$

   Was wir also zeigen müssen, ist die Stetigkeit dieser Reihe in b.

Nebenrechnung:

$$\frac{z^n - b^n}{z-b} = \sum_{k=1}^{n-1} z^{n-1-k} b^k$$

ist ein Polynom vom Grad n-1. Sei

$$\varphi_n(z) := \begin{cases} \frac{z^n-b^n}{z-b},\ z \neq b \\ nb^{n-1},\ z = b \end{cases}$$

Sei nun $r < R$, und gelte $|b| \leq r$, $|z| \leq r$. Dann ist

$$|\varphi_n(z)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{|z|}_{\leq r}{}^{n-1-k} \underbrace{|b|}_{\leq r}{}^{k} \leq nr^{n-1}$$

Wir haben also die Abschätzung

$$\Big| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(z) \Big| = \Big| \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \varphi_{n+1}(z) \Big| \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1) r^n.$$

Es bleibt zu zeigen: die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n$ hat auch den Konvergenzradius R.

Sei R' der Konvergenzradius dieser Reihe, also

$$\frac{1}{R'} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} = \underbrace{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}}_{=1} \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{n+1}|}.$$

Es bleibt zu zeigen: $R = R'$.

$\underline{\alpha)}$ R' sei der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n$. Dann ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + z \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n \Rightarrow R' \leq R.$$

$\underline{\beta)}$ Sei $|z| < R, z \neq 0$. Dann ist nach Voraussetzung $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| < \infty$. Es folgt

$$\sum_{n=0} |a_{n+1} z^n| \leq \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| - \frac{1}{z}|a_0|.$$

Lemma 1.5 (Regeln für die Wirtingerschen Ableitungen) *1.* $\dfrac{\partial}{\partial z}$ *und* $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$ *sind* $\mathbb{C}$*–lineare Operatoren, für die die* LEIBNIZ*sche Regel gilt.*

2. $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \overline{\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}}$.

3. $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$, *falls* f *holomorph,* $\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0$, *falls* $\overline{f}$ *holomorph.*

4. $\dfrac{\partial z}{\partial z} = 1, \quad \dfrac{\partial z}{\partial \overline{z}} = 0, \quad \dfrac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}} = 1.$

5. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = \dfrac{1}{4} \underbrace{\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)}_{=:\Delta f}$

6. *Sei* $w = f(z)$*. Dann gilt*

$$\frac{\partial}{\partial z}(g \circ f) = \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \overline{w}}\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(g \circ f) = \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}.$$

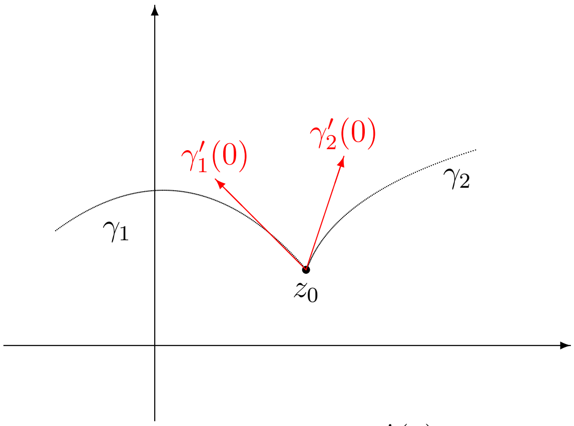
7. *Sei* $U \subset \mathbb{C}$ *offen und seien* $\varphi : [a,b] \to U$ *und* $f = g + \mathrm{i}h : U \to \mathbb{C}$ *reell differenzierbar. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \varphi)(t_0) &= Df(\varphi(t_0))\varphi'(t_0) = \left.\begin{matrix} g_x & g_y \\ h_x & h_y \end{matrix}\right) \begin{pmatrix} \varphi_1'(t_0) \\ \varphi_2'(t_0) \end{pmatrix} \\
&= \left.\begin{matrix} g_x\varphi_1'(t_0) + g_y\varphi_2'(t_0) \\ h_x\varphi_1'(t_0) + h_y\varphi_2'(t_0) \end{matrix}\right) \\
&= f_x\varphi_1'(t_0) + f_y\varphi_2'(t_0).
\end{aligned}$$

In komplexer Schreibweise ist dies

$$\begin{aligned}
\ldots &= \frac{1}{2}\big(f_x - \mathrm{i}f_y\big)(\varphi_1'(t_0) + \mathrm{i}\varphi_2') + \frac{1}{2}\big(f_x + \mathrm{i}f_y\big)(\varphi_1'(t_0) \text{ - } \mathrm{i}\varphi_2') \\
&= \frac{\partial f}{\partial z}\varphi'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\varphi'(t_0).
\end{aligned}$$

Anwendung von Eigenschaft 7: $\gamma_1, \gamma_2 : [0, \varepsilon] \to \mathbb{C}$ seien stetig mit $\gamma_j(0) = z_0$ und $\gamma_j'(0) \neq 0$.



Wir haben $\measuredangle(\gamma_1, \gamma_2) = \arg \dfrac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)}$.

Sei $f : U \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar und injektiv. Wir werden später zeigen, dass dann automatisch $f'(z) \neq 0$ für $z \in U$ folgt. Wir betrachten $t \mapsto f \circ \gamma_j(t)$. Nach Eigenschaft 7 ist

$$(f \circ \gamma_j)'(0) = f_z(z_0)\gamma_j'(0) + f_{\overline{z}}(z_0)\overline{\gamma_j'(0)}$$

Falls f sogar holomorph ist, gilt $f_{\overline{z}}(z_0) = 0$ und $f_z(z_0) = f'(z_0) \neq 0$. Damit ist

$$\measuredangle(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2) = \arg \frac{f'(z_0)\gamma_2'(0)}{f'(z_0)\gamma_1'(0)} = \arg \frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)} = \measuredangle(\gamma_1, \gamma_2),$$

mit anderen Worten: f ist „winkeltreu“.

Es gilt auch die Umkehrung: Ist f winkeltreu und reell differenzierbar, so ist f holomorph. Dazu betrachten wir die Wege $\gamma_1 : t \mapsto z_0 + t$, $\gamma_2 : t \mapsto z_0 + \mathrm{i}t$.

Aus der Winkeltreue von f folgt $\measuredangle(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2) = \frac{\pi}{2}$ und hieraus

$$(f \circ \gamma_2)'(0) = \mathrm{i}(f \circ \gamma_1)'(0).$$

Es folgt weiter

$$\mathrm{i}(f_z(z_0) - f_{\overline{z}}(z_0)) = \mathrm{i}(f_z(z_0) + f_{\overline{z}}(z_0)),$$

also

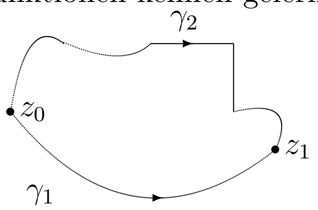
$$f_{\overline{z}}(z_0) = 0$$

und somit die Holomorphie von f in z_0.

Kapitel 2

Kurvenintegrale

Wege $\gamma : \mathbb{R} \supset [a, b] \to \mathbb{C}$ haben wir vorhin als (stückweise) stetig differenzierbare Funktionen kennen gelernt.



In diesem Kapitel untersuchen wir Integrale längs solcher Wege. Das Hauptaugenmerk ist der Frage gerichtet, inwieweit das Integral längs eines Weges von der Wahl des Weges abhängt — bei der Integration in $\mathbb{R}$ kommt man ja nicht in diese Verlegenheit.

Die nahe liegende Definition eines Wegintegrales ist dabei

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.1}$$

Betrachten wir als Beispiel den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. Dann ist

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}.$$

Aber bevor wir weitere Beispiele durchgehen, soll der Begriff des Wegintegrals zunächst auf ein etwas solideres Fundament gestellt werden.

Die Abbildung $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto f(t)$ sei Riemann–integrierbar (oder messbar und Lebesgue–integrierbar), mit anderen Worten: $\mathrm{Re}f, \mathrm{Im}f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sind R-integrierbar (bzw. messbar und L-integrierbar). Wir definieren das Integral der komplexwertigen Funktion f als

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := \int_a^b \mathrm{Re}f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b \mathrm{Im}f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.2}$$

Lemma 2.1 *Das Integral (2.2) hat folgende Eingenschaften:*

1. *Der Operator* $\int_a^b : L^1([a,b]) \to \mathbb{C}$ *ist komplex linear.*

2. $$\int_a^b \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t = \overline{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}.$$

3. $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ *sei stückweise stetig differenzierbar,* $g : [c,d] \to \mathbb{C}$ *sei integrierbar. Dann gilt die Substitutionsregel*
$$\int_c^d g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b g(\varphi(s))\varphi'(s)\,\mathrm{d}s.$$

4. $$\Big|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\Big| \le \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Der Beweis bleibt dem Leser zur Übung überlassen.

Beispiel 2.2

1. Sei $\mathbb{C} \ni \omega \neq 0$, und sei $f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$. Für die Funktion $g(t) = \frac{1}{\mathrm{i}\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ gilt $g'(t) = f(t)$. Dementsprechend gilt
$$\int_a^b \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{i}\omega}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right]_a^b.$$
Es folgt für $n \in \mathbb{Z}$:
$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 2\pi & , n = 0 \\ 0 & , n \neq 0 \end{cases}.$$
Eine erste Folgerung hieraus ist:
$$\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\cdot}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\cdot}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}mt}\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}\,\mathrm{d}t = \delta_{mn}.$$
Eine weitere Folgerung ist:
$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} (\cos t)^{2n}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2^{2n}}\int_0^{2\pi} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)^{2n}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2^{2n}}\int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2k)t}\,\mathrm{d}t = 2^{-2n}\binom{2n}{n}2\pi.\end{aligned}$$

2. Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}z > 0$. Wir definieren die komplexe Gammafunktion durch
$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t,$$
wobei $t^{z-1} := \exp((z-1)\ln t)$. Auf $\{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}z > 0\}$ ist Γ hierdurch wohldefiniert.

3. Sei $f \in L^1([0,2\pi])$. Für $m \in \mathbb{Z}$ ist der m-te FOURIERkoeffizient das Integral
$$\widehat{f}(m) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt}\,\mathrm{d}t.$$

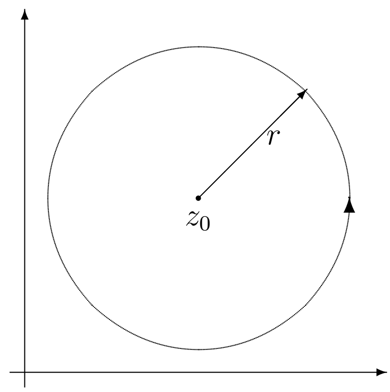
Definition 2.3 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *sei stückweise stetig differenzierbar,* $f : \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ *stetig. Das* Kurvenintegral *von* f *längs* γ *wird definiert durch*
$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Bezeichnung: Sei $U \subset \mathbb{C}$. Eine stetige Funktion $\gamma : [a,b] \to U$ wird *Weg* genannt. $A(\gamma) := \gamma(a)$ heißt *Anfangspunkt*, $E(\gamma) := \gamma(b)$ *Endpunkt* von γ.
γ heißt *Integrationsweg*, falls γ stückweise stetig differenzierbar ist. Ist γ stetig differenzierbar, spricht man von einem *stetig differenzierbaren Weg*. Gilt $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$, so heißt γ *glatt*.[1]
Ein Weg γ heißt genau dann *geschlossen*, wenn $\gamma(b) = \gamma(a)$. Ist darüber hinaus $\gamma|_{[a,b)}$ injektiv, spricht man von einem *einfach geschlossenen* Weg. $\gamma([a,b]) \subset \mathbb{C}$ wird die *Spur von* γ genannt und oft mit $Sp(\gamma)$ angekürzt. Ist $M \subset \mathbb{C}$ die Spur eines Integrationsweges γ, so sagt man, γ *parametrisiert* M.

Beispiel 2.4

1. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, und sei $r > 0$.

Sei $\kappa(r, z_0) := z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$. κ ist offensichtlich stetig differenzierbar. Ferner ist κ glatt, denn $\kappa'(t) = r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \neq 0$. Die Spur von κ ist $Sp(\kappa) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| = r\}$.



[1] $\gamma'(t_0) = 0$ ist nicht zu verwechseln mit dem Verschwinden der Ableitung einer reellwertigen Funktion: $\gamma'(t_0) = 0$ bedeutet nicht, dass γ eine „waagerechte Tangente“ an t_0 hat, sondern, dass — bildlich gesprochen — γ an t_0 „Geschwindigkeit 0“ hat.

Es gilt

$$\int_\kappa \frac{1}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}.$$

$R > r$ sei der Konvergenzradius der Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n$. Dann ist das Integral von f längs κ:

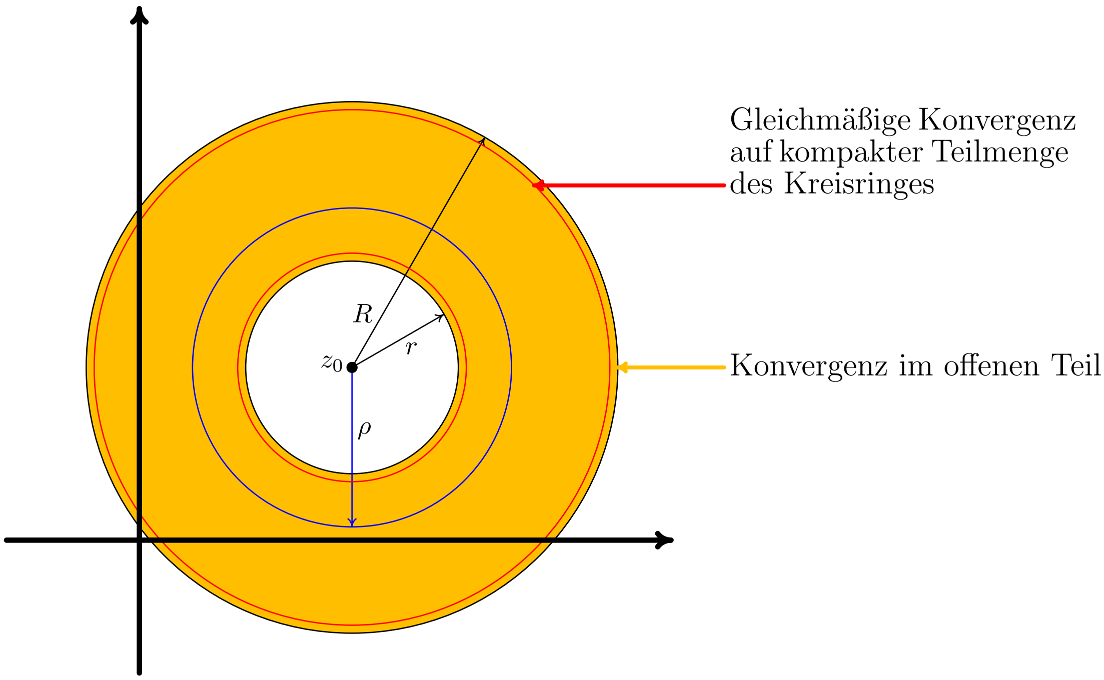
$$\int\limits_\kappa f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^{2\pi} \Big(\sum_{n=0}^\infty a_n r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\Big) \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}r \sum_{n=0}^\infty a_n r^n \underbrace{\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}\,\mathrm{d}t}_{=0,\ n=0,1,\ldots} = 0$$

Sei f dargestellt durch eine Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^\infty a_n(z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n}_{\text{Nebenteil}} + \underbrace{\sum_{n=1}^\infty a_{-n}(z-z_0)^{-n}}_{\text{Hauptteil}}.$$

Der Nebenteil ist eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R; der Hauptteil ist keine Potenzreihe, aber es ist $\sum_{n=1}^\infty a_{-n}z^n$ eine Potenzreihe mit Radius $1/r$, und wir haben

$$|z-z_0|^{-1} < \frac{1}{r} \iff |z-z_0| > r.$$



Eine LAURENTreihe stellt auf einer kompakten Teilmenge des Kreisringes eine holomorphe Funktion dar.

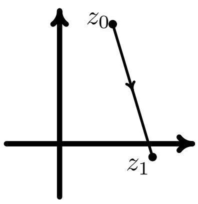
Sei $g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n$. Dann ist $g(1/(z-z_0))$ genau dann wohldefiniert, wenn $|z - z_0| > r$.

Sei $r < \rho < R$. $\kappa(z_0, \rho) := z_0 + \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $0 \leq t < 2\pi$. Es gilt

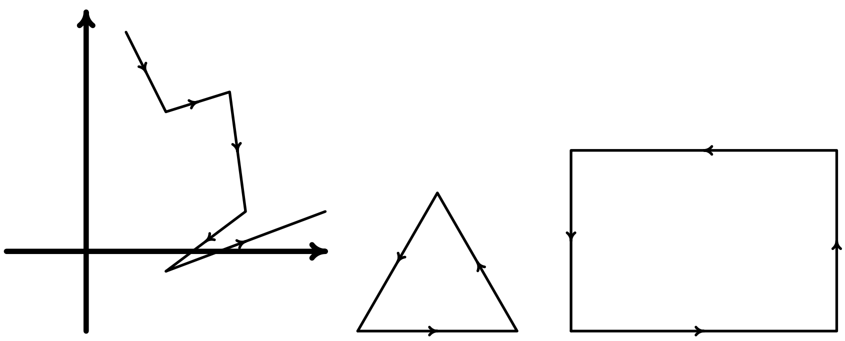
$$\begin{aligned}
\int_{\kappa(z_0,\rho)} f(z)\,\mathrm{d}z &= \mathrm{i}\rho \int_0^{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \rho^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \rho^n \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}\,\mathrm{d}t}_{=2\pi\delta_{-1,n}} \\
&= 2\pi \mathrm{i} a_{-1}.
\end{aligned}$$

Man nennt daher a_{-1} auch das *Residuum*, denn es bleibt als einziger Summand bei dem Integral über den einfach geschlossenen Kreis übrig.

2. Seien $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$. Die „Verbindungsstrecke von z_0 nach z_1“, den Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = z_0 + t(z_1 - z_0)$ bezeichnen wir mit $[z_0, z_1]$.

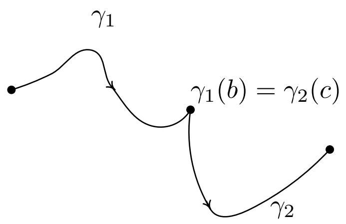


Allgemein: Seien $z_0, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Ein Polygonzug ist der Weg $\gamma : [0,n] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = z_k + (t-k)(z_{k+1} - z_k)$, $t \in [k, k+1]$. Die Spur solch eines Polygonzuges bezeichnen wir mit $Sp(\gamma) =: [z_0, \ldots, z_n]$.



Speziell: Sei Δ ein Dreieck mit Eckpunkten z_0, z_1, z_2. Der Polygonzug $[z_0, z_1, z_2, z_0]$ parametrisiert $\partial\Delta$.

3. Gegeben seien die Wege $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$.



Der zusammengesetzte Weg ist definiert durch:

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 : [a, b + (d-c)] \to \mathbb{C}, t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a,b] \\ \gamma_2(t + (c-b)) & t \in [b, b+d-c] \end{cases}$$

Analog kann man n Wege $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, sofern für $k = 1, \ldots, n-1$ der Endpunkt von γ_k mit dem Anfangspunkt von γ_{k+1} übereinstimmt. Z. B. ist der Streckenzug $[z_0, \ldots, z_n] = [z_0, z_1] \cdot [z_1, z_2] \cdots [z_{n-1}, z_n]$.

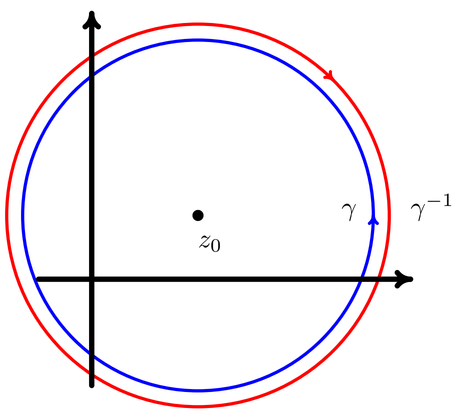
Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und $a = t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$ eine Zerlegung von $[a,b]$, nennen wir $\gamma_k := \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ einen *Teilweg*. Offensichtlich gilt $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_n$.

Bezeichnung: Existiert eine Zerlegung von γ in glatte Teilwege, so nennen wir γ *stückweise glatt*.

Zu einem Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ definiert man den *entgegengesetzten Weg* $\gamma^{-1} : [a,b] \to \mathbb{C}$ durch $\gamma^{-1}(t) := \gamma(a+b-t)$.

Offenbar ist $Sp(\gamma^{-1}) = Sp(\gamma)$.

Ist z. B. γ der Streckenzug $[z_0, \ldots, z_n]$ so ist der entgegengesetzte Weg $\gamma^{-1} = [z_n, \ldots, z_0]$.

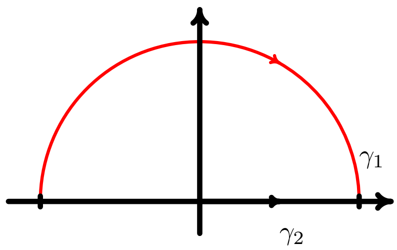


Ist z. B. $\gamma = \kappa(r, z_0) = z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$, wird γ^{-1} dargestellt durch $\gamma^{-1}(t) = z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi - t)}$.

4. Wir werden im nächsten Kapitel sehen, dass für holomorphe Funktionen f das Wegintegral $\int_\gamma f$ unabhängig vom Weg γ ist, und dass nur Anfangs- und Endpunkt von γ relevant sind.

   Dass bei nicht holomorphen Funktionen das Wegintegral sehr wohl vom Weg abhängen kann, soll dieses Beispiel verdeutlichen:

   Sei $f(z) := |z|$, und seien $\gamma_1 : [0, \pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi - t)}$, $\gamma_2 : [-1, 1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2(t) := t$.



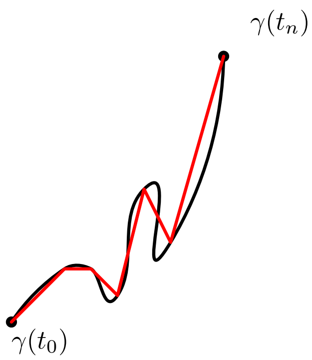
   Wir haben
$$\int_{\gamma_1} |z| \,\mathrm{d}z = \int_0^\pi 1 \cdot \gamma_1'(t) \,\mathrm{d}t = \gamma_1(\pi) - \gamma_1(0) = 2,$$
   aber
$$\int_{\gamma_2} |z| \,\mathrm{d}z = \int_{-1}^1 |t| \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} t^2 \Big|_{-1}^1 = 1.$$

5. Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg, so setzen wir

$$L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| \,\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{(\mathrm{Re}\gamma'(t))^2 + (\mathrm{Im}\gamma'(t))^2} \,\mathrm{d}t. \tag{2.3}$$

   $L(\gamma)$ ist die Länge des Weges.

   Dies kann geometrisch wie folgt gedeutet werden: Sei $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Wir approximieren den Weg durch den Polygonzug $[\gamma(t_0), \gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_n)]$.



Die Länge von γ ist dann der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})|.$$

Gleichzeitig ist das Integral in (2.3) der Grenzwert der RIEMANNschen Summe

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|\gamma'(\xi_k)|(t_k-t_{k-1}).$$

Um zu zeigen, dass diese beiden Grenzwerte gleich sind, gibt es zwei Möglichkeiten: zum Einen kann man den Mittelwertsatz der Differentialrechnung auf jedes Teilintervall $[t_{k-1},t_k]$ anwenden; zum Anderen gilt folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}&|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})-\gamma'(\xi_k)(t_k-t_{k-1})|\\ =&\Big|\int_{t_{k-1}}^{t_k}(\gamma'(t)-\gamma'(\xi_k))\,\mathrm{d}t\Big| \le \sup_{|t-t^*|<|t_k-t_{k-1}|}|\gamma'(t)-\gamma'(t^*)|(t_k-t_{k-1})\end{aligned}$$

Mit der Stetigkeit von γ' auf $[a,b]$ folgt die Behauptung.

Satz 2.5 *γ sei ein Integrationsweg, $f: Sp(\gamma)\to\mathbb{C}$ sei stetig. Dann gilt*

$$\Big|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\Big| \le L(\gamma)\max_{z\in Sp(\gamma)}|f(z)|.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\Big|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\Big| &= \Big|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\Big|\\ &\le \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t\\ &\le \max_{z\in Sp(\gamma)}|f(z)|\underbrace{\int_a^b|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t}_{=L(\gamma)}.\end{aligned}$$

□

Definition 2.6 *$I,J\subset\mathbb{R}$ seien kompakte Intervalle, $\varphi: J\to I$ sei bijektiv, stückweise stetig differenzierbar und streng monoton wachsend mit $\varphi'(t)\neq 0$ auf J.*

φ wird Parametertransformation *(kurz: PT) von J auf I genannt.*

Bemerkung:

1. Sind φ und ψ Parametertransformationen, so sind auch $\varphi \circ \psi$ und φ^{-1} Parametertransformationen.
2. Ist $\gamma : I \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und $\varphi : J \to I$ eine PT, so ist auch $\gamma \circ \varphi : J \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg. Man sagt dann, $\gamma \circ \varphi$ geht aus γ *durch Umparametrisierung (mittels φ)* hervor.

Satz 2.7 *γ_1, γ_2 seien Integrationswege in $\mathbb{C}$, γ_1 gehe aus γ_2 durch Umparametrisierung hervor. $f : Sp(\gamma_1) \to \mathbb{C}$ sei stetig. Dann gilt:*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Beweis: Gelte $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$, Parametertransformation sei $\varphi : [c,d] \to [a,b]$. Es ist $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$.

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_a^b f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_c^d f(\gamma_1 \circ \varphi(s))\underbrace{\gamma_1'(\varphi(s))\varphi'(s)}_{=(\gamma_1\circ\varphi)'(s)}\,\mathrm{d}s \\
&= \int_c^d f(\gamma_2(s))\gamma_2'(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

□

Lemma 2.8 *γ sei ein Integrationsweg, $f : Sp(\gamma) \to \mathbb{C}$ sei stetig. Dann gilt*

$$\int_{\gamma^{-1}} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Beweis: Gelte $\gamma, \gamma^{-1} : [a,b] \to \mathbb{C}$. $\gamma^{-1}(t) = \gamma(a+b-t)$.

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma^{-1}} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_a^b f(\gamma(a+b-t))\gamma'(a+b-t) \\
&\overset{s:=a+b-t}{=} \int_b^a f(\gamma(s))\gamma'(s)\,\mathrm{d}s \\
&= -\int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)\,\mathrm{d}s \\
&= -\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

□