Übung 1

zur Funktionentheorie I SS 2019

03.04.2019

1. Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar. Bestimmen Sie zudem Betrag und Argument dieser Zahlen.

   (a) $(2 + 3i) \cdot (1 - i)$ (b) $\left(\frac{1}{1+i}\right)^2 - \frac{1-i}{1+i}$

   (c) $i \cdot (-1 + i)^{2009}$ (d) $\frac{1 + i\alpha}{1 - i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

2. Es sei $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ ein komplexes Polynom. Man zeige, dass es dann ein Konstante $R > 0$ gibt, so dass
$$\frac{|z^n|}{2} < |p(z)| < 2|z^n|$$
für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$ gilt.

3. Seien n und m natürliche Zahlen. Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen, welche
$$z^m = 1 \qquad \text{und} \qquad (z-1)^n = 1$$
erfüllen.

4. Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Zahlenebene:

   (a) $M_1 = \{z;\ |z - a| \geq r,\ a \in \mathbb{C},\ r > 0\}$

   (b) $M_2 = \left\{z;\ \operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{1}{2}\right\}$

   (c) $M_3 = \left\{z;\ \frac{|z-1|}{|z|} < 1\right\}$

Abgabe am 26.04.18 vor der Vorlesung!