Übungsblatt 3

Funktionentheorie SoSe 2019

17.04.2019

1. Man überprüfe in welchen Punkten $z = x+iy \in \mathbb{C}$ die folgenden Funktionen komplex differenzierbar sind und bestimme dort die komplexen Ableitungen.

   (a) $f(x+iy) = xy + ixy$
   (b) $f(x+iy) = x^3 + iy^3$
   (c) $f(x+iy) = \sin^2(x+y) + i\cos^2(x+y)$
   (d) $f(x+iy) = (x^2+y^2)(x+iy)$

2. Sei f holomorph in einem Gebiet $U \subset \mathbb{C}$ und es gelte $\operatorname{Re}(f) = const.$ Man zeige, dass dann f eine konstante Funktion ist.

3. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene und zur reellen Achse symmetrische Menge.
   Zeigen Sie: Wenn $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph ist, so auch die Funktion $g : U \to \mathbb{C}$, definiert durch $g(z) := \overline{f(\overline{z})}$.

4. (a) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph sowie Real- und Imaginärteil von f beliebig oft differenzierbar.
   Zeigen Sie, dass dann Real- und Imaginärteil von $f = u + iv$ harmonische Funktionen sind. Das bedeutet $u, v : U \to \mathbb{R}$ erfüllen die Gleichungen

   $$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = \partial_x^2 v + \partial_y^2 v = 0.$$

   (b) Sei nun $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und harmonisch, die Funktion $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert vermöge

   $$v(x,y) := \int_0^y \partial_x u(0,t)\,dt - \int_0^x \partial_y u(t,y)\,dt.$$

Beweisen Sie, dass die resultierende Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$f(x+iy) := u(x,y) + iv(x,y),$$

holomorph ist.