Übungsblatt 4

Funktionentheorie SoSe 2019

24.04.2019

Aufgabe 1

Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}, \qquad \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+2i}{6}\right)^n.$$

Weiter sind die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen zu bestimmen. Dabei sei $a \in \mathbb{C}$ beliebig aber fest:

$$\text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} a^n z^n, \qquad \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2} z^n.$$

Aufgabe 2

Welche Voraussetzungen sind hinreichend dafür, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergiert?

(a) Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent und die Folge $(b_n)_n$ ist beschränkt?

(b) Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent und die Folge $(b_n)_n$ ist beschränkt.

(c) Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent und die Folge $(b_n)_n$ ist konvergent.

Aufgabe 3

Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := |z|$, ist von i nach $-i$ zu integrieren.

(a) Über die direkte Strecke auf der imaginären Achse.
(b) Über den Halbkreisbogen des Einheitskreises S^1.

Aufgabe 4

Seien a und b komplexe Zahlen und $\mathbb{B}_r(0)$ die Kreisscheibe um 0 mit Radius $r > 0$. Berechnen Sie die Integrale

$$\int_{\gamma_i} \mathrm{Im}\,(z)\; dz$$

für $i \in \{1, 2\}$. Dabei sei γ_1 die Gerade von a nach b und $\gamma_2 = \partial\mathbb{B}_r(0)$ im Uhrzeigersinn durchlaufen.