Übungsblatt 6

Gewöhnliche DGL SS 2019

09.05.2019

Aufgabe 1 Es sei $R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_0 \leq x \leq x_0 + a, |y_0 - y| \leq b\right\}$, $f : R \to \mathbb{R}$ sei stetig und $\partial f / \partial y$ ebenfalls stetig auf R. Sei $M = \max\limits_{(x,y)\in R} |f(x, y)|$ und $\alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$. Man zeige, dass das AWP

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

auf $x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha$ genau eine Lösung hat und ein entsprechendes Resultat für $x < x_0$ gilt.

Aufgabe 2 Man zeige, dass die Lösung der Differentialgleichung

$$y' = x^2 + e^{-y^2},\ y(0) = 0$$

auf $0 \leq x \leq 0.5$ existiert und dort $|y(x)| \leq 1$ gilt.

Aufgabe 3 Man zeige, dass die Lösung der Differentialgleichung

$$y' = x^3 + e^{-x^2},\ y(0) = 1$$

auf $0 \leq x \leq \frac{1}{9}$ existiert und dort $0 \leq y(x) \leq 2$ gilt.

Aufgabe 4 Man zeige: Die eindeutig bestimmte Lösung des AWP

$$y' = \sin x e^y,\ y(0) = y_0$$

kann man für $y_0 = -\ln 2$ nicht auf ganz $\mathbb{R}$, sondern nur auf $(-\pi, \pi)$ fortsetzen. Dagegen sind die Lösungen für jeden Anfangswert $y_0 < -\ln 2$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Ist das ein Widerspruch zur stetigen Abhängigkeit der Lösung von den Anfangswerten?