Übungsblatt 7

Funktionentheorie SoSe 2019

22.05.2019

Aufgabe 1

Für welche $n \in \mathbb{Z}$ kann $f_n : \mathbb{C}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f_n(z) := z^n (\cos(z) - 1)$ in den Nullpunkt hinein holomorph fortgesetzt werden? Geben Sie die holomorphe Fortsetzung im Existenzfalle an.

Aufgabe 2

Entwickeln Sie $z \mapsto \frac{1}{(z-a)(z-b)}$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{a, b\})$ in den folgenden Ringgebieten mit Mittelpunkt 0 jeweils in eine Laurentreihe. Dabei seien a und b komplexe Zahlen mit $0 < |a| < |b|$.

(a) $0 < |z| < |a|$, (b) $|a| < |z| < |b|$, (c) $|b| < |z| < \infty$.

Aufgabe 3

Welche Art von Singularität hat die Funktion

(a) $\sin\left(\frac{1}{1-z}\right)$ in $z_0 = 1$, (b) $\frac{1}{e^z - 1}$ in $z_0 = 2\pi i k$ $(k \in \mathbb{Z})$,

(c) $\frac{z^3 + 3z + 2i}{z^2 + 1}$ in $z_0 = -i$, (d) $\frac{\cos(i\pi z)}{z(z-i)^3}$ in $z_0 = i$.

Geben Sie im Falle von Polstellen deren Ordnung und Residuum in z_0 an, falls hebbare Singularitäten vorliegen den Grenzwert in z_0.

Aufgabe 4

Zeigen Sie direkt, dass die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) := \exp(1/z)$, in jeder punktierten Umgebung $\{z \in \mathbb{C};\ 0 < |z| < \varepsilon\}$ jeden Wert $w \neq 0$ aus $\mathbb{C}$ beliebig oft annimmt.

Hinweis: Überlegen Sie sich, wie das Bild einer punktierten offenen Kreisscheibe $D_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$ unter $z \mapsto 1/z$ aussieht. Nutzen Sie dann das Abbildungsverhalten der komplexen Exponentialfunktion.