

Übungsblatt 8

Funktionentheorie I SoSe 2019

30.05.2019

Aufgabe 1

Welche der folgenden Mengen sind Gebiete in \mathbb{C} ?

- (a) $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, 0) \cup (0, \infty))$ (b) $\{z \in \mathbb{C}; |\exp(z)| > 1\}$
(c) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z^2 - 3| < 1\}$ (d) $\mathbb{C} \setminus (\{z \in \mathbb{C} \mid z = \exp(t(1+i)), t \in \mathbb{R}\} \cup \{0\})$

Aufgabe 2

Entwickeln Sie $\frac{1}{z^2(z+i)}$ in den folgenden Ringgebieten und mit Entwicklungspunkt z_0 jeweils in eine Laurentreihe.

- (a) $\{z \mid 0 < |z| < 1\}$, $z_0 = 0$
(b) $\{z \mid 1 < |z| < \infty\}$, $z_0 = 0$
(c) $\{z \mid 0 < |z+i| < 1\}$, $z_0 = -i$.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie das Konvergenzgebiet der Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|} z^n$.

Geben Sie die Funktion an, deren Laurententwicklung die Reihe im Konvergenzgebiet darstellt.

Aufgabe 4

Sei $0 < \varepsilon < 2\pi$ und $f : D_\varepsilon(0) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z^3) - 1}.$$

Zeigen Sie, dass f in $z_0 = 0$ einen Pol der Ordnung 5 hat und es gilt

$$\operatorname{res}_{z_0} f = -\frac{1}{60}.$$