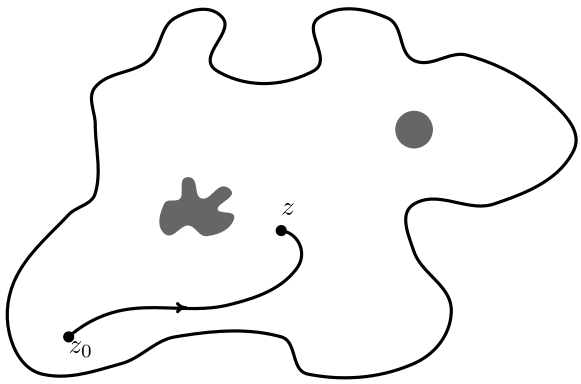
Kapitel 3

Die Stammfunktion

Nachdem wir im vorigen Kapitel die Grundlagen von Kurvenintegralen erarbeitet haben, befassen wir uns nun mit der konkreten Berechnung eines solchen Integrals. Besonderes Augenmerk gilt der Frage, ob auch im Komplexen eine Stammfunktion verwendet werden kann. Unser Wunsch ist, dass für einen festen Punkt z_0 und einen Weg γ, der z mit z_0 verbindet, gilt

$$\int_\gamma f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = F(z) - F(z_0)$$

mit $F'(\zeta) = f(\zeta)$. In diesem Fall haben wir gleichzeitig eine Wegunabhängigkeit des Integrals, denn dies hängt nur noch von Anfangs- und Endpunkt des Weges ab.



3.1 Stammfunktionen und der Cauchysche Integralsatz

Definition 3.1 *$U \subset \mathbb{C}$ sei offen, $f : U \to \mathbb{C}$ sei stetig.*
$F : U \to \mathbb{C}$ heißt Stammfunktion von f*, falls F auf U holomorph ist und $F' = f$ gilt. Wir sagen, f habe eine lokale Stammfunktion auf U, falls es zu jedem Punkt von U eine Umgebung V gibt, so dass $f|_V$ eine Stammfunktion (auf V) hat.*

Satz 3.2 *$f : U \to \mathbb{C}$ sei stetig und habe auf U die Stammfunktion F. γ sei Integrationsweg von z_0 nach z_1. Dann gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(z_1) - F(z_0).$$

Beweis: Gelte $\gamma : [a,b] \to U$, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ sei eine Unterteilung von $[a,b]$, so dass $\gamma|_{[t_k,t_{k-1}]}$ stetig differenzierbar sei. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \underbrace{f(\gamma(t))\gamma'(t)}_{(F\circ\gamma)'(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} (F\circ\gamma)'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^n (F\circ\gamma(t_k) - F\circ\gamma(t_{k-1})) \\
&= F(z_1) - F(z_0).
\end{aligned}$$

□

Hieraus folgt unmittelbar:

Korollar 3.3 *$f : U \to \mathbb{C}$ sei stetig mit Stammfunktion F, γ sei ein einfach geschlossener Integrationsweg in U. Dann gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Beispiel 3.4

1. $f(z) = z^n$ mit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$. Dann ist

$$F(z) = \frac{1}{n+1} z^{n+1}.$$

Die Stammfunktion existiert für $n \geq 0$ auf $U = \mathbb{C}$, für $n \leq -2$ auf $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Ist γ ein Integrationsweg von z_0 nach z_1 in U, dann gilt

$$\int_\gamma z^n \,\mathrm{d}z = \frac{1}{n+1}\bigl(z_1^{n+1} - z_0^{n+1}\bigr)$$

2. f sei dargestellt durch eine Laurentreihe:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

auf dem Kreisring

$$U : 0 \leq r < |z - z_0| < R \leq \infty.$$

Falls $a_{-1} = 0$, ist

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\bigl(z - z_0\bigr)^{n+1}$$

Stammfunktion von f auf U.

3. $f(z) = \frac{1}{z}$ hat keine Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

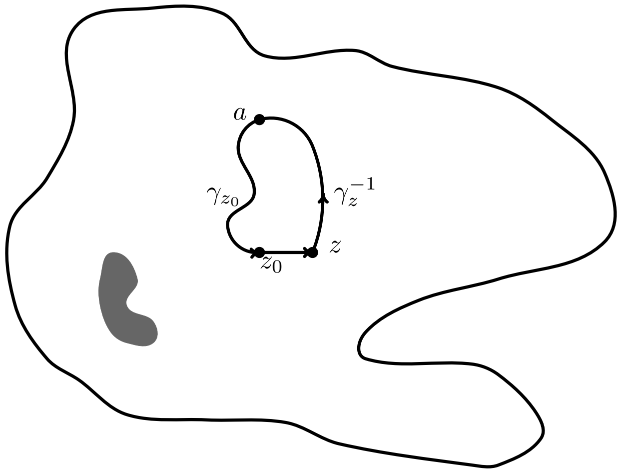
Satz 3.5 *$G \subset \mathbb{C}$ sei ein Gebiet, d. h. offen, und je zwei Punkte in G sind durch einen Integrationsweg verbindbar. Für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in G gelte $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Dann hat f auf G eine Stammfunktion.*

Beweis: Sei $a \in G$ fest. Wir setzen

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta)\; d\zeta,$$

wobei γ_z ein Integrationsweg von a nach z ist.
Behauptung: $F'(z_0) = f(z_0)$ für $z_0 \in G$, also

$$\lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} \overset{!}{=} f(z_0).$$



Aus der Voraussetzung, dass für einen beliebigen geschlossenen Integrationsweg γ das Integral $\int_\gamma f = 0$ ist, folgt für den Weg $\gamma = \gamma_{z_0}[z_0, z]\gamma_z^{-1}$:

$$\underbrace{\int_{\gamma_{z_0}} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}_{=F(z_0)} + \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta - \underbrace{\int_{\gamma_z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}_{=F(z)} = 0$$

und mit der Parameterdarstellung $z_0 + t(z - z_0)$ des Weges $[z_0, z]$:

$$\begin{aligned} F(z) - F(z_0) &= \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))(z - z_0)\,\mathrm{d}t \\ &= (z - z_0) \underbrace{\int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))\,\mathrm{d}t}_{=:\Delta(z)}\,. \end{aligned}$$

Es bleibt noch $\Delta(z)$ abzuschätzen: es gilt wegen der Stetigkeit von f in z_0 für $|z - z_0| < \delta$ (bzw. $|t(z - z_0)| < \delta_\varepsilon$):

$$\Big| \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))\,\mathrm{d}t - f(z_0) \Big| \leq \int_0^1 \underbrace{|f(z_0 + t(z - z_0)) - f(z_0)|}_{<\varepsilon}\,\mathrm{d}t < \varepsilon$$

□

Analog beweist man

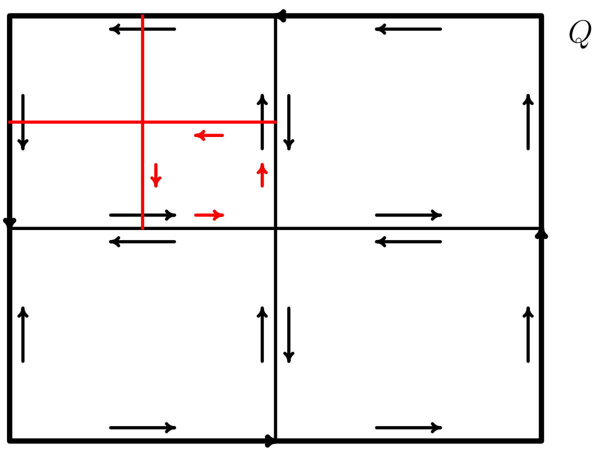
Satz 3.6 *Seien $G \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$ gelte $\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Dann hat f auf G eine Stammfunktion.*

Satz 3.7 (Cauchyscher Integralsatz für Rechtecke) *$U \subset \mathbb{C}$ sei offen, $f : U \to \mathbb{C}$ sei holomorph, $Q \subset U$ sei ein achsenparalleles Rechteck. γ sei die einfach geschlossene Integrationskurve, die ∂Q (im mathematisch positiven Sinne) parametrisiert. Dann gilt:*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Beweis: $\underline{\alpha)}$ Sei $f(z) = az + b$ mit $a, b \in \mathbb{C}$. Dann hat f die Stammfunktion $\frac{1}{2}az^2 + bz$, und $\int_\gamma f = 0$ ist erfüllt.

$\underline{\beta)}$ Der Beweis basiert auf dem folgenden Prinzip: Wir zerlegen Q in vier Teilrechtecke.



Die Teilrechtecke seien mit $q_1, \ldots, q_4$ bezeichnet; der Rand von q_i sei durch den Weg γ_i parametrisiert.
Da die im Inneren von Q verlaufenden Teile der Wege γ_i jeweils genau entgegengesetzt sind, ist in der folgenden Abschätzung die erste Gleichung erfüllt.

$$\Big|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\Big| = \Big|\sum_{i=1}^{4}\int_{\gamma_i} f(z)\,\mathrm{d}z\Big| \leq \sum_{i=1}^{4}\Big|\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z\Big| \leq 4\Big|\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z\Big|,$$

wobei γ_1 der Teilweg γ_i sei, bei dem

$$\Big|\int_{\gamma_i} f(z)\,\mathrm{d}z\Big|$$

am größten ist. Das zugehörige Teilrechteck bezeichnen wir mit Q_1.

Induktiv erhalten wir auf diese Weise eine Folge $Q \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \ldots$ von Teilrechtecken mit Randkurven $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ und

$$\Big|\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\Big| \leq 4^n \Big|\int_{\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z\Big|. \tag{3.1}$$

Da $\operatorname{diam}(Q_n) \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$, folgt aus dem CANTORschen Schachtelsatz, dass die Rechtecke Q_n sich auf einen Punkt zusammenziehen; sei also

$$\{z_0\} := \bigcap_{n\geq 1} Q_n.$$

Nach Voraussetzung ist f in z_0 holomorph. Zu $\varepsilon > 0$ existiert somit ein $\delta > 0$ mit

$$|f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)| \leq \varepsilon|z - z_0| \tag{3.2}$$

für $0 < |z - z_0| < \delta$. Diese Abschätzung machen wir uns im weiteren Verlauf zu Nutze, denn gleichzeitig gilt mit α):

$$\int_{\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_n} \big(f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)\big)\,\mathrm{d}z. \tag{3.3}$$

Seien ρ der Durchmesser und ℓ der Umfang von Q. Daraus folgt, dass Q_n den Durchmesser $2^{-n}\rho$ und den Umfang $2^{-n}\ell$ hat.
Wir wählen n nun groß genug, damit $2^{-n}\rho < \delta$ gilt und wenden (3.2) an. Daraus erhalten wir für (3.3) die Abschätzung

$$\Big|\int_{\gamma_n} \big(f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)\big)\,\mathrm{d}z\Big| \leq L(\gamma_n)\varepsilon 2^{-n}\rho = \varepsilon 4^{-n}\rho\ell.$$

Fassen wir dies mit (3.1) zusammen, folgt

$$\Big|\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\Big| < \varepsilon\rho\ell$$

für beliebiges vorgegebenes $\varepsilon > 0$, also

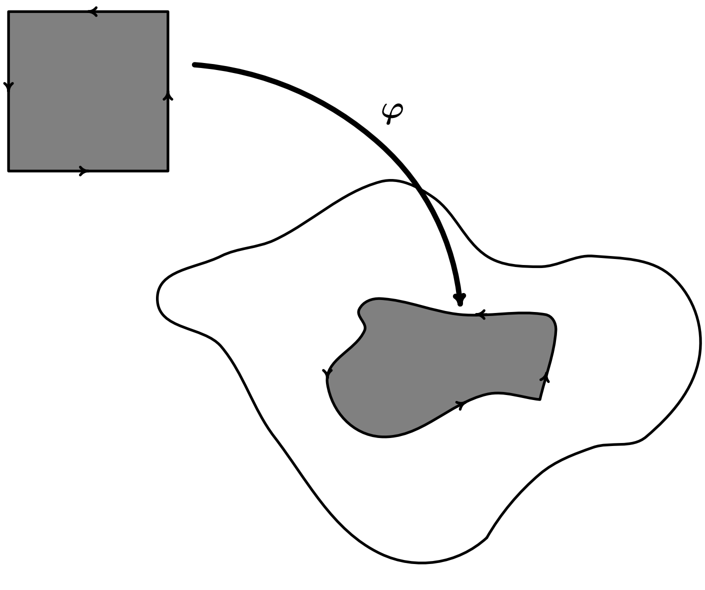
$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

$\square$

Satz 3.8 (Cauchyscher Integralsatz für C^1–Bilder von Rechtecken) *Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $Q \subset \mathbb{C}$ ein abgeschlossenes achsenparalleles Rechteck, dessen Rand (im mathematisch positiven Sinne) durch γ parametrisiert werde. $\varphi : Q \to U$ sei reell stetig differenzierbar.*
Dann gilt

$$\int_{\varphi(\gamma)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Beweis:



$\underline{\alpha)}$ $f(z) = az + b$ ist offensichtlich (siehe oben).
$\underline{\beta)}$ Wir konstruieren wie oben eine Folge von Rechtecken $Q_1 \supset Q_2 \supset \ldots$ mit

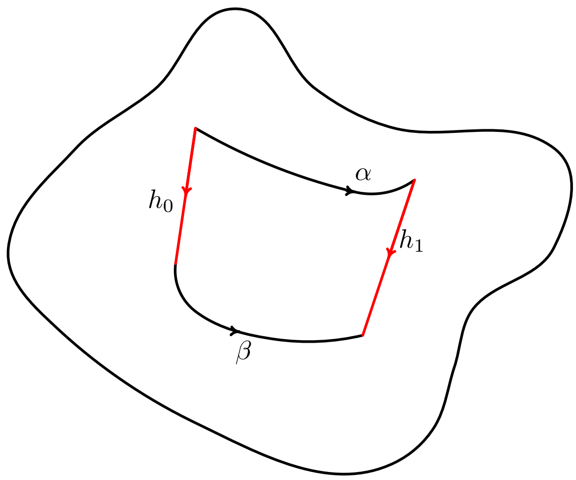
$$\Big|\int_{\varphi\circ\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\Big| \le 4^n \Big|\int_{\varphi\circ\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z\Big|.$$

Da Q kompakt und φ stetig differenzierbar sind, ist $D\varphi$ auf Q gleichmäßig stetig, d. h. es existiert ein $c > 0$ mit $\|D\varphi(p)\| \le c$ für alle $p \in Q$. Mit dem Mittelwertsatz folgt, dass der Durchmesser von $\varphi(Q_n)$ nicht größer als $\rho \cdot c \cdot 2^{-n}$ und die Länge von γ_n nicht größer als $\ell \cdot c \cdot 2^{-n}$ sind. $\square$

Korollar 3.9 *Seien $\alpha, \beta : [t_0, t_1] \to U$ stetig differenzierbare Integrationswege, und liege*

$$\{(1-\tau)\alpha(t) + \tau\beta(t); \tau \in [0,1]\}$$

in U für alle t. $f : U \to \mathbb{C}$ sei holomorph.



Dann gilt

$$\int_{h_0} f + \int_\beta f - \int_{h_1} f - \int_\alpha f = 0, \tag{3.4}$$

wobei

$$h_1, h_2 : [0,1] \to U, h_i(\tau) := (1-\tau)\alpha(t_i) + \tau\beta(t_i).$$

Beweis: Die Abbildung

$$\varphi : [t_0, t_1] \times [0,1] \to \mathbb{C}, (t, \tau) \mapsto (1-\tau)\alpha(t) + \tau\beta(t)$$

ist stetig differenzierbar. Die Aussage folgt somit aus Satz 3.8. □

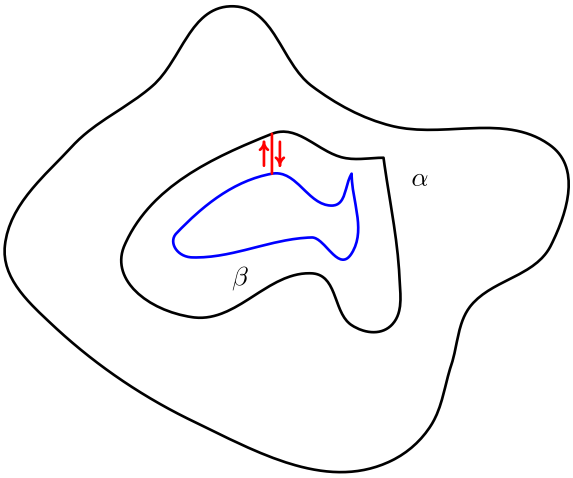
Beispiel 3.10 Spezialfälle hiervon sind:

1. Einfach geschlossene Dreiecke in U: α und β sind geradlinige Strecken und haben den gleichen Ausgangspunkt, h_0 besteht also nur aus einem Punkt, h_1 verbindet die Endpunkte. Es folgt:

   $$\int_\beta f - \int_\alpha f - \int_{h_1} f = 0;$$

   $\Delta := \beta h_1^{-1} \alpha^{-1}$ parametrisiert den Rand eines Dreiecks (in positiver Orientierung). Also gilt die Aussage des CAUCHYschen Integralsatzes auch für Dreiecke.

2. α und β sind einfach geschlossene Kurven.



In diesem Fall ist $h_1 = h_0$, und Gleichung (3.4) vereinfacht sich zu $\int_\alpha f = \int_\beta f$. Insbesondere gilt dies für Kreise D_1, D_2 mit $\overline{D_2} \subset D_1$ und $\alpha = \partial D_1, \beta = \partial D_2$.

3. α und β haben Anfangs- und Endpunkt gemeinsam. Dann folgt ebenfalls $\int_\alpha f = \int_\beta f$.

3.2 Folgerungen aus dem Cauchyschen Integralsatz

Satz 3.11 (Cauchysche Integralformel für eine Kreisscheibe) *$U \subset \mathbb{C}$ sei offen, $z_0 \in U$, $r > 0$. Ferner gelte für die Kreisscheibe mit Radius r um z_0: $\overline{D_r(z_0)} \subset U$. $f : U \to \mathbb{C}$ sei holomorph.*
Dann gilt für jedes $a \in U$ mit $|a - z_0| < r$:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\kappa(r,z_0)} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z. \tag{3.5}$$

Beweis: Sei ρ hinreichend klein. Dann ist nach Beispiel 3.10

$$\int_{\kappa(r,z_0)} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = \int_{\kappa(\rho,a)} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z. \tag{3.6}$$

Es gilt auf $\kappa(\rho, a)$: $z = a + \rho e^{\mathrm{i}\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Wir haben also für das rechte Kurvenintegral in (3.6) die Parameterdarstellung

$$\mathrm{d}z = \mathrm{i}\rho e^{\mathrm{i}\varphi}\mathrm{d}\varphi \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = \mathrm{i} \cdot \mathrm{d}\varphi.$$

Setzen wir dies in (3.6) ein, ergibt sich

$$\int_{\kappa(\rho,a)} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}\int_0^{2\pi} f(a+\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\,\mathrm{d}\varphi.$$

Wegen der Stetigkeit von f in a gilt für beliebige φ

$$|f(a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) - f(a))| < \varepsilon$$

für hinreichend kleines $r \leq \rho$. Wir haben also

$$\Big|\int_0^{2\pi} f(a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) - f(a))\,\mathrm{d}\varphi\Big| \leq 2\pi\varepsilon$$

und können errechnen

$$\int_0^{2\pi} f(a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\,\mathrm{d}\varphi = \underbrace{\int_0^{2\pi} f(a)\,\mathrm{d}\varphi}_{=2\pi f(a)} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \left(f(a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) - f(a)\right)}_{\leq 2\pi\varepsilon}.$$

□

Satz 3.12 (Potenzreihenentwicklungssatz) *$U \subset \mathbb{C}$ sei offen, $f : U \to \mathbb{C}$ sei holomorph, $z_0 \in U$. Für $\rho > 0$ gelte $D_\rho(z_0) \subset U$.*
Dann gibt es eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ mit Konvergenzradius $\geq \rho$ und

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \quad \textit{für } |z-z_0 < \rho|.$$

Für die Koeffizienten gilt die Formel

$$c_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\kappa(r,z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z \quad \textit{für } 0 < r < \rho.$$

Ferner gilt die Cauchysche Integralformel für die n-te Ableitung*:*

$$(3.7) \qquad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\kappa(r,z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z \quad \textit{für } |z-z_0| < r.$$

Beweis: $\underline{\alpha)}$ Wenn es eine solche Potenzreihe gibt, ist f beliebig oft differenzierbar, und es gilt

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0),$$

woraus die Eindeutigkeit folgt.

$\underline{\beta)}$ Sei o. B. d. A. $z_0 = 0$ und $|z| < r < \rho$. Aus der CAUCHYschen Integralformel (3.5) folgt

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\kappa(r,0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)}\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\kappa(r,0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \underbrace{\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}}}_{=\sum_{n=0}^{\infty}(z/\zeta)^n} \mathrm{d}\zeta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\Big(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\kappa(r,0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta \Big)}_{=:\, c_n} z^n
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Für festes z und ζ mit $|\zeta| = r$ konvergiert die Reihe in (3.8) gleichmäßig, was den letzten Schritt, die Vertauschung von Summation und Integration, rechtfertigt.

□

Es folgt unmittelbar hieraus:

Satz 3.13 *$U \subset \mathbb{C}$ sei offen, $f : U \to \mathbb{C}$ sei holomorph. Dann ist f auf U beliebig oft differenzierbar.*

Ein solches Resultat ist im Reellen undenkbar; gewisse Konstrukte der reellen Analysis leben gerade davon, dass eine Funktion genau k mal differenzierbar ist, aber die k-te Ableitung in einem bestimmten Punkt unstetig. — Es sei etwa an VOLTERRAs Funktion erinnert, die differenzierbar, aber deren Ableitung nicht RIEMANN–integrierbar ist.

Satz 3.14 *$U \subset \mathbb{C}$ sei offen, $f : U \to \mathbb{C}$ sei holomorph. Für ein geeignetes $r > 0$ und $z_0 \in U$ gelte $\overline{D_r(z_0)} \subset U$. Sei $|f(z)| \leq M$ für alle z mit $|z - z_0| = r$, und sei $\sum_n c_n(z - z_0)^n$ die Potenzreihenentwicklung von f. Dann gilt $|c_n| \leq M/r^n$*

Beweis:

$$
|c_n| = \frac{1}{|2\pi\mathrm{i}|} \Big| \int_{\kappa(r,0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z \Big| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r.
$$

□

Satz 3.15 (Liouville) *Jede beschränkte, auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion ist konstant.*

Beweis: Sei $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$, und sei $f(z) = \sum_n c_n z^n$. Es gilt nach Satz 3.14: $|c_n| \leq M/r^n$ für jedes $r > 0$. Damit folgt $f(z) \equiv c_0$. □

Aus dem Satz von LIOUVILLE erhalten wir einen eleganten Beweis für

Satz 3.16 (Fundamentalsatz der Algebra) *Jedes Polynom über $\mathbb{C}$ vom Grad ≥ 1 hat in $\mathbb{C}$ mindestens eine Nullstelle.*

Beweis: Sei $p = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ mit $a_n \neq 0$ und $n \geq 1$. Für $z \neq 0$ gilt damit

$$p(z) = z^n \Big(\underbrace{a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}}_{\longrightarrow a_n \ (|z| \to \infty)} \Big),$$

wobei das folgende asymptotische Verhalten verwendet wird: *Zu $M \in \mathbb{R}_+$ gibt es ein $r > 0$, so dass $|p(z)| \geq M$ für $|z| \geq r$.* (Beweis zur Übung.)
Nehmen wir an, dass p auf $\mathbb{C}$ keine Nullstelle hat. Dann ist $f(z) := 1/p(z)$ in ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Aufgrund der Asymptotik gilt $|f(z)| \to 0$ für $|z| \to \infty$. Da f beschränkt ist, ist diese Funktion nach dem Satz von LIOUVILLE konstant, also $f(z) \equiv c$. Damit folgt $p(z) \equiv c^{-1}$, im Widerspruch dazu, dass $\mathrm{Grad}(p) \geq 1$. □

Satz 3.17 (Morera) *$U \subset \mathbb{C}$ sei offen, $f : U \to \mathbb{C}$ sei stetig. Für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset U$ gelte $\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Dann ist f auf U holomorph.*

Dieser Satz stellt also gewissermaßen die Umkehrung des CAUCHYschen Integralsatzes dar.

Beweis: Da Holomorphie eine lokale Eigenschaft ist, reicht es zu zeigen, dass die Aussage des Satzes gilt, wenn U eine offene Kreisscheibe ist.
Die Voraussetzungen für Satz 3.6 sind erfüllt, daher besitzt f in U eine Stammfunktion F. F ist holomorph und somit beliebig oft komplex differenzierbar, also auch die Ableitung $f = F'$. □

Satz 3.18 (Weierstrass) *$U \subset \mathbb{C}$ sei offen, $f_\nu : U \to \mathbb{C}$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) seien holomorph, und die Folge $\{f_\nu\}$ konvergiere* lokal gleichmäßig *auf U (d. h. gleichmäßig auf kompakten Teilen von U) gegen die Funktion f. Dann ist f in U holomorph, und für alle $n = 1, 2, \ldots$ konvergiert $\{f_\nu^{(n)}\}$ lokal gleichmäßig gegen $f^{(n)}$ auf U.*

Beweis: $\underline{\alpha)}$ f sei stetig. Sei γ eine Parametrisierung des Randes eines Dreiecks in U. Es gilt

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\nu\to\infty} \underbrace{\int_\gamma f_\nu(z)\,\mathrm{d}z}_{=0\ (\text{Cauchy})} = 0,$$

woraus aus dem Satz von Morera folgt, dass f in U holomorph ist.

$\underline{\beta)}$ Es reicht zu zeigen, dass $f'_\nu \to f'$ lokal gleichmäßig konvergiert; die höheren Ableitungen ergeben sich induktiv daraus, dass f'_ν und f' ihrerseits wieder holomorph sind.
Es gilt für $z_0 \in U$ und geeignetes $r > 0$

$$(f_\nu - f)'(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\kappa(r,z_0)} \frac{f_\nu(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,\mathrm{d}\zeta$$

für alle $z \in$ U mit $|z - z_0| < r$. Es folgt für z mit $|z - z_0| < r/2$:

$$|f'_\nu(z) - f'(z)| \le \frac{1}{2\pi} 2\pi r \frac{1}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} \max_{|\zeta - z_0| < r/2} \underbrace{|f_\nu(\zeta) - f(\zeta)|}_{\longrightarrow 0\ (\nu\to\infty)},$$

die Konvergenz auf der rechten Seite wegen der gleichmäßigen Konvergenz $f_\nu \to f$ auf kompakten Teilen. □

Satz 3.19 (Schwarzsches Spiegelungsprinzip) *U sei im Teilraum $\{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Im} z \ge 0\}$ des metrischen Raums $\mathbb{C}$ offen, und $U \cap \mathbb{R}$ enthalte ein offenes Intervall. $f : U \to \mathbb{C}$ sei stetig, und $f|_{\overset{\circ}{U}}$ sei holomorph. Ferner nehme f auf $U \cap \mathbb{R}$ nur reelle Werte an. Dann ist durch*

$$\tilde{f} := \begin{cases} f(z), & z \in U \\ \overline{f(\overline{z})}, & z \in \overline{U} \end{cases}$$

eine auf $U \cup \overline{U}$ holomorphe Funktion definiert.

Beweis: $\underline{\alpha)}$ Zunächst zeigen wir, dass $\tilde{f}$ auf $\overset{\circ}{\overline{U}}$ holomorph ist:
Schreiben wir $f = g + \mathrm{i}h$ und $z = x + \mathrm{i}y$, so gilt

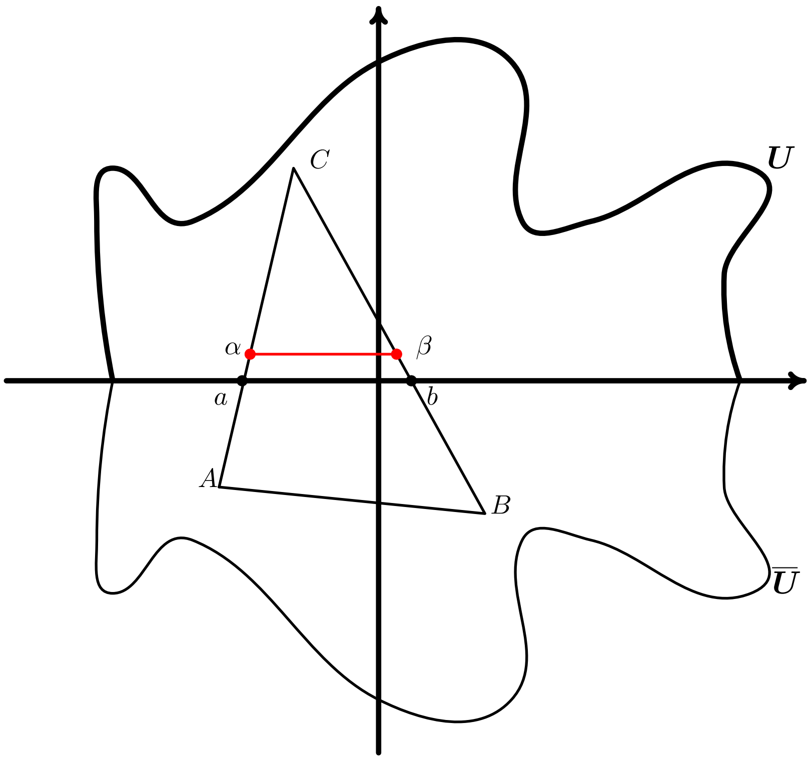
$$\tilde{f}(z) = g(x, -y) - \mathrm{i}h(x, -y) =: \tilde{g}(x, y) + \mathrm{i}\tilde{h}(x, y).$$

Offenbar sind $\tilde{g}$ und $\tilde{h}$ reell differenzierbar.

Es bleiben die CAUCHY–RIEMANNschen Differentialgleichungen nachzurechnen:

$$\begin{aligned}\tilde{g}_x &= g_x(x,-y) = h_y(x,-y) = \tilde{h}_y \\ \tilde{g}_y &= -g_y(x,-y) = h_x(x,-y) = -\tilde{h}_x\end{aligned}$$

$\underline{\beta)}$ Um zu zeigen, dass sich $\tilde{f}$ analytisch von der oberen Halbebene auf die untere Halbebene forsetzen lässt, wenden wir wiederum den Satz von MORERA an.



Sei dazu $\gamma = [A, B, C, A]$ der Rand eines Dreieckes $\Delta \subset U \cup \overline{U}$.
Einzig interessant ist der Fall, wenn sowohl $\Delta \cap U \neq \emptyset$ als auch $\Delta \cap \overline{U} \neq \emptyset$ gilt — falls Δ komplett in der oberen oder unteren Halbebene liegen sollte und $\Delta \cap \mathbb{R} = \emptyset$ gilt, ist das Integral $\int_\gamma \tilde{f} = 0$, da $\tilde{f}$ nach Voraussetzung und nach α) außerhalb der Achsen holomorph ist.
O. B. d. A. liege der Punkt C in der oberen Halbebene, die Punkte A, B in der unteren — ansonsten betrachten wir die jeweils andere Halbebene; für den Fall, dass einer der Punkte auf der reellen Achse liegt, wird analog verfahren.
Seien a, b die Schnittpunkte der Kanten $[C, A]$ und $[B, C]$ mit der reellen Achse. Wir zeigen, dass das Integral von $\tilde{f}$ über den Streckenzug $\gamma' := [a, b, C, a]$ verschwindet — analog verfährt man bei dem Integral über $[A, B, b, a, A]$.

Auf dem abgeschlossenen Dreieck, das durch die Punkte a, b, C begrenzt wird, ist $\tilde{f}$ nach Voraussetzung stetig, also gleichmäßig stetig. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es somit ein $\delta > 0$, so dass $|\tilde{f}(z) - \tilde{f}(z')| < \varepsilon$ für $|z - z'| < \delta$.
Seien α, β auf den Strecken $[C, a]$ bzw. $[b, C]$ so gewählt, dass $|\alpha - a| < \delta$ und $|\beta - b| < \delta$.
Das Dreieck $[\alpha, \beta, C, \alpha]$ liegt ganz in der oberen Halbebene, da $\tilde{f}$ dort holomorph ist, gilt

$$\int\limits_{\gamma'} \tilde{f} = \int\limits_{[a,b,\beta,\alpha,a]} \tilde{f}.$$

Nach Wahl von α und β ist für $0 \leq t \leq 1$

$$|t\beta + (1-t)\alpha - (tb + (1-t)a)| = |t(\beta - b) + (1-t)(\alpha - a)| < \delta,$$

also

$$|\tilde{f}(t\beta + (1 - t\alpha)) - \tilde{f}(tb + (1-t)a)| < \varepsilon.$$

Sei M das Maximum von $|\tilde{f}|$ auf dem Dreieck $\Delta_{a,b,C}$ und sei $\ell = L(\gamma')$.
Es folgt unmittelbar, dass $|\int_{[\alpha,a]} \tilde{f}| < M\delta$ und $|\int_{[b,\beta]} \tilde{f}| < M\delta$, also insgesamt

$$\begin{aligned}
\Big|\int\limits_{\gamma'} \tilde{f}\Big| &\leq 2M\delta + \Big|\int\limits_{[a,b]} \tilde{f} - \int\limits_{[\beta,\alpha]} \tilde{f}\Big| \\
&= 2M\delta + \Big|(b-a)\int\limits_0^1 \tilde{f}(tb + (1-t)a)\,\mathrm{d}t - (\beta - \alpha)\int\limits_0^1 \tilde{f}(t\beta + (1-t)\alpha)\,\mathrm{d}t\Big| \\
&\leq 2M\delta + |b-a|\Big|\int\limits_0^1 \big(\tilde{f}(tb + (1-t)a) - \tilde{f}(t\beta + (1-t)\alpha)\big)\,\mathrm{d}t\Big| \\
&\quad + |(b-a) - (\beta - \alpha)|\Big|\int\limits_0^1 \tilde{f}(t\beta + (1-t)\alpha)\,\mathrm{d}t\Big| \\
&\leq 2M\delta + \varepsilon|b-a| + M|(b-\beta) + (\alpha - a)| \\
&\leq 4M\delta + \varepsilon\ell.
\end{aligned}$$

Da bei vorgegebenem ε auch $\delta < \varepsilon$ gewählt werden kann, wird das Integral $\int_{\gamma'} \tilde{f}$ betraglich beliebig klein. $\square$

Definition 3.20 *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, und sei $f(z_0) = 0$. Unter der* Ordnung der Nullstelle *versteht man diejenige Zahl k (falls es eine solche gibt), für die $f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0, f^{(k)} \neq 0$ und sonst ∞.*

Zum Beispiel hat die Funktion $f(z) = z^k$ in 0 eine Nullstelle der Ordnung k.

Bemerkung:

1. Hat f in z_0 eine Nullstelle der Ordnung ∞, so verschwindet f identisch in einer Umgeung um z_0. Dies folgt unter anderem aus dem Potenzreihenentwicklungssatz:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

2. g habe in z_0 eine einfache Nullstelle. Dann hat $f(z) = (g(z))^k$ in z_0 eine k-fache Nullstelle.

Satz 3.21 (Verhalten holomorpher Funktionen in der Nähe von Nullstellen) *Hat die Funktion f bei z_0 eine k-fache Nullstelle, so gibt es eine in einer Umgebung U_0 um z_0 holomorphe Funktion h mit einer einfachen Nullstelle in z_0 und*

$$f(z) = (h(z))^k \quad \textit{für } z \in U_0.$$

Beweis: Sei o. B. d. A. $z_0 = 0$.
Nach Satz 3.12 gilt $f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n z^n$ für $|z| < \rho$, wobei ρ der Konvergenzradius der Potenzreihe ist.
Sei ohne Einschränkung $c_k = 1$ — ansonsten betrachten wir die Funktion $1/c_k\, f$.
Wir können also schreiben:

$$f(z) = z^k\Big(1 + \underbrace{\sum_{n=k+1}^{\infty} c_n z^n}_{=:g(z)}\Big).$$

Für die Funktion g können wir sofort erkennen: g ist holomorph, und $g(0) = 0$.
Die Idee ist nun, f in der folgenden Art zu schreiben:

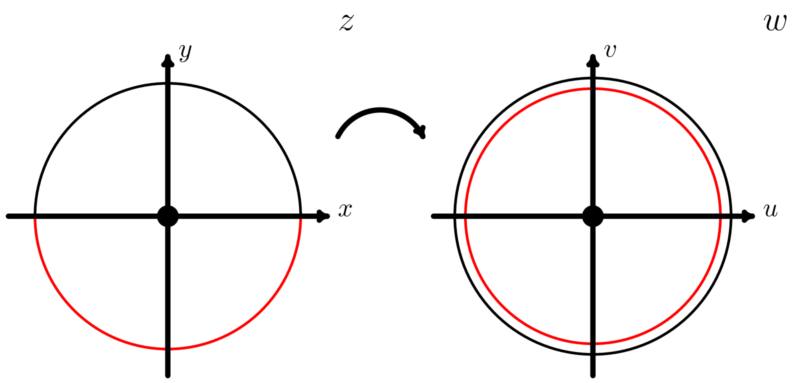
$$f(z) = \Big(\underbrace{z + \sqrt[k]{1 + g(z)}}_{=:h(z)}\Big)^k.$$

Wegen $\sqrt[k]{1 + g(0)} \neq 0$ hätte h in 0 nur eine einfache Nullstelle.
Es bleibt die Frage, ob $\sqrt[k]{1 + g(z)}$ eine holomorphe Funktion ist.

⌈ Man vergleiche etwa: $\sqrt{z}$ ist in 0 nicht holomorph, denn $\sqrt{0} = 0$; ist m die Ordnung dieser Nullstelle, so hätte $(\sqrt{z})^2 = z$ in 0 eine Nullstelle der Ordnung $2m$. Aber die Funktion z hat im Nullpunkt eine Nullstelle erster Ordnung. ⌋

Es gilt aber folgende Aussage:
$1 + g(0) = 1$ und $\left.\frac{\mathrm{d}z^k}{dz}\right|_{z=1} = k \neq 0$. Mit dem aus der reellen Analysis bekannten Satz von der Umkehrfunktion[1] können wird folgern, dass $z \mapsto z^k$ lokal um den Punkt 1 ein Diffeomorphismus ist, also mit differenzierbarer Umkehrabbildung. Betrachten wir also $z \mapsto z^k : U_1 \to U_2$ lokal in geeigneten Umgebungen U_1, U_2 um 1.
Sei $\chi := \sqrt[k]{\cdot}$ die zugehörige Umkehrfunktion.
Man wähle die Umgebung U_0 so klein, dass $(1 + g(z)) \in U_2$ für alle $z \in U_0$. Dann ist $\chi(1+g(0)) = 1$, und $h(z) = z\chi(1+g(z))$ hat in 0 eine einfache Nullstelle, und $f(z) = (h(z))^k$ in U_0. □

Wir haben im vorangegangenen Beweis die Umgebung um den Punkt 1 klein gewählt. In einer Umgebung um eine k-fache Nullstelle muss man sich nämlich auf ein anderes Verhalten einstellen. Betrachten wir als Beispiel die Funktion $z \mapsto z^2$ in einer Umgebung um den Nullpunkt.



Ist $z = Re^{\mathrm{i}\varphi}$, so ist $z^2 = R^2 e^{\mathrm{i}2\varphi} = (-z)^2$. Zu einem Punkt lassen sich also zwei Urbilder finden, abgesehen von der Nullstelle.
Allgemeiner gilt die folgende Aussage:

Satz 3.22 (Blätterzahl bei einer Nullstelle einer holomorphen Funktion) *Sei z_0 eine k–fache Nullstelle einer holomorphen Funktion f. Dann gibt es zu jedem hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ eine offene Umgebung U_ε von z_0, die durch f auf*

[1] Oder dem Identitätssatz für Potenzreihen

die Kreisscheibe $\{w; |w| < \varepsilon\}$ abgebildet wird, und zwar so, dass $f|_{U_\varepsilon}$ jeden Wert w mit $0 < |w| < \varepsilon$ genau k mal und den Wert 0 genau einmal bei z_0 annimmt.

Beweis: Sei o. B. d. A. $z_0 = 0$.
$\underline{\alpha)}$ $f(z) = z^k$ ist verstanden; denn ist $w = re^{\mathrm{i}\varphi}$, $r > 0$, so existieren genau k Wurzeln

$$\sqrt[k]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi+2\pi m}{k}}, m = 0, 1, 2, \ldots, k,$$

woraus die Behauptung für einen Spezialfall folgt.

$\underline{\beta)}$ Aus Satz 3.21 folgt: es gibt eine lokal biholomorphe Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in einer Umgebung um 0, mit $h(0) = 0$, $h'(0) \neq 0$ und $f(z) = (h(z))^k$, d. h. es gibt Umgebungen U, V von 0, so dass $h|_U : U \to V$ bijektiv und holomorph ist und $(h|_U)^{-1}$ ebenfalls holomorph ist.
Sei ε so klein, dass $\{\zeta; |\zeta| < \sqrt[k]{\varepsilon}\} \subset V$, so hat

$$(h|_U)^{-1}(\{\zeta; |\zeta| < \sqrt[k]{\varepsilon}\}) =: U_\varepsilon$$

die gewünschte Eigenschaft. □

Satz 3.23 (Identitätssatz für holomorphe Funktionen) *$G \subset \mathbb{C}$ sei ein Gebiet. $f, g : G \to \mathbb{C}$ seien holomorph und stimmen auf einer Teilmenge von G, die mindestens einen Häufungspunkt in G enthält, überein. Dann gilt $f = g$ auf ganz G.*

Beweis: z_0 sei ein solcher Häufungspunkt. Dann hat $h = f - g$ bei z_0 eine Nullstelle unendlicher Ordnung. (Ansonsten gäbe es nach Satz 3.22 eine Umgebung von z_0, die keine weitere Nullstelle von h enthält. Nullstellen endlicher Ordnung liegen isoliert.)
Sie die Menge M definiert durch

$$M := \{z \in G; h \text{ hat in } z \text{ eine Nullstelle unendlicher Ordnung}\}.$$

Dann ist M offenbar nichtleer (denn $z_0 \in M$). Ferner ist M offen, denn nach dem Potenzreihenentwicklungssatz gilt lokal um z_0

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \equiv 0.$$

Gleichzeitig ist auch $G \setminus M$ offen, denn falls es ein $p \in G \setminus M$ mit $h(p) \neq 0$ gibt, folgt aus der Stetigkeit von h, dass es eine volle Umgebung um p geben muss, wo h von Null verschieden ist.
Also: M ist nichtleer und offen und abgeschlossen in G. Da G zusammenhängend ist, folgt $M = G$. □

Aus diesem Satz folgt noch einmal unmittelbar der Identitätssatz für Potenzreihen.

Satz 3.24 (Gebietstreue) *$G \subset \mathbb{C}$ sei ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ sei holomorph und nicht konstant. Dann ist $f(G)$ ebenfalls ein Gebiet.*

Beweis: $\underline{\alpha)}$ $f(G)$ ist zusammenhängend, da f stetig ist.

$\underline{\beta)}$ Sei $w_0 \in f(G)$, und gelte $w_0 = f(z_0)$. Wir definieren $h(z) := f(z) - w_0$.
Dann hat h in z_0 eine Nullstelle endlicher Ordnung; ansonsten wäre $h \equiv 0$ in einer Umgebung um z_0, also wäre nach Satz 3.23 $h \equiv 0$ auf G und somit f konstant — im Widerspruch zur Voraussetzung.
Nach Satz 3.22 existiert ein $\varepsilon > 0$ so dass jedes w mit $|w| < \varepsilon$ von h — bzw. $w_0 + w$ von f — als Bild angenommen wird. Folglich ist $w_0 + D_\varepsilon(0) \subset f(G)$, also $f(G)$ offen. □

Satz 3.25 (Maximumprinzip) *$G \subset \mathbb{C}$ sei ein Gebiet, $f.G \to \mathbb{C}$ sei holomorph und nicht konstant. Dann kann f auf G kein Betragsmaximum haben.*

Beweis: Habe f auf G ein Betragsmaximum, also $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ für alle $z \in G$ und ein bestimmtes z_0. Dann ist $f(G) \subset \{w; |w| \leq f(z_0)\}$. Mit anderen Worten: $f(z_0)$ liegt auf den Rand des Bildbereichs, im Widerspruch zur Offenheit von f. □

Korollar 3.26 *G sei ein beschränktes Gebiet, f auf G holomorph und auf $\overline{G}$ stetig. Dann wird das Maximum von $|f|$ über $\overline{G}$ auf ∂G angenommen:*

$$|f(z)| \leq \max_{\zeta \in \partial G} |f(\zeta)|, \quad z \in G.$$

Korollar 3.27 (Minimumsprinzip)

1. *$G \subset \mathbb{C}$ sei ein Gebiet, und es existiere ein $c \in \mathbb{C}$ und eine Umgebung $U \subset \mathbb{C}$ mit*

$$\inf_{z \in U} |f(z)| = |f(c)|.$$

Dann ist $f(c) = 0$ oder f in G konstant.

2. *Ist G ein beschränktes Gebiet, $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetig und auf G holomorph, dann hat f in G Nullstellen oder das Minimum von $|f|$ auf $\overline{G}$ wird in ∂G angenommen.*

Beweis:

1. Hat f keine Nullstellen in G, betrachtet man $1/f$ und verwendet das Maximumsprinzip und den Identitätssatz.

2. folgt unmittelbar aus Korollar 3.26.

□

Satz 3.28 (Schwarzsches Lemma) *$f : D_1(0) \to D_1(0)$ sei holomorph mit $f(0) = 0$. Dann gilt $|f(z)| \leq |z|$ für alle z und $|f'(0)| \leq 1$. Gilt an einer Stelle $z \neq 0$ $|f(z)| = |z|$ oder ist $|f'(0)| = 1$, so ist f eine Drehung: $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z$ für ein $\theta \in \mathbb{R}$.*

Beweis: Nach dem Potenzreihenentwicklungssatz gilt:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n = z \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1}}_{=:g(z)} = z \cdot g(z).$$

Die Funktion g ist holomorph auf $D_1(0)$, und es ist $f'(0) = g(0)$.
Für $|z| < 1$ gilt

$$|f(z)| = |z||g(z)| = r|g(z)| \leq 1,$$

letzteres nach Voraussetzung.
Es folgt $|g(z)| \leq 1/r$ für alle $r < 1$ und alle z mit $|z| = r$. Mit dem Maximumprinzip folgt, dass $|g(z)| \leq 1/r$ für alle $r < 1$ und alle z mit $|z| \leq r$. Lassen wir $r \to 1$ streben, folgt $|g(z) <\leq 1$ für alle z.
Gilt für ein $z \in D_1(0)$, dass $|g(z)| = 1$, folgt wiederum aus dem Maximumprinzip, dass g konstant ist, also dass $g \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ für ein geeignetes $\theta \in \mathbb{R}$. □

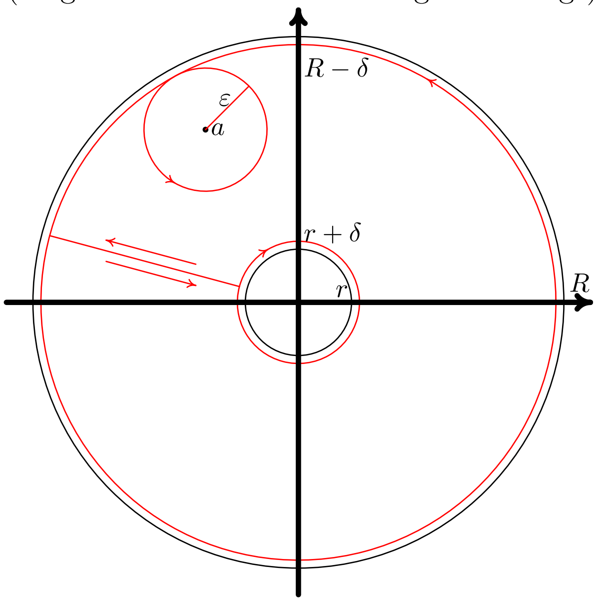
Satz 3.29 (Laurentreihenentwicklungssatz) *$U \subset \mathbb{C}$ sei offen, $f : U \to \mathbb{C}$ sei holomorph, und für $z_0 \in U$ und $0 \leq r < R$ sei $A := \{z; r < |z - z_0| < R\} \subset U$. Dann gilt für diesen Kreisring:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \text{ mit } c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\kappa(\rho, z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}z \text{ für } r < \rho < R. \tag{3.9}$$

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $z_0 = 0$.
Nach dem CAUCHYschen Integralsatz gilt für jedes $a \in A$:

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\kappa(\varepsilon, a)} \frac{f(z)}{z - a} \,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\kappa(R-\delta, 0)} \frac{f(z)}{z - a} \,\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\kappa(r+\delta, 0)} \frac{f(z)}{a - z} \,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

(vergleiche die Skizze des Integrationswegs).



Wie im Beweis des Potenzriehenentwicklungssatzes (Satz 3.12) wird das erste Integral zu einer geometrischen Reihe in $\frac{a}{z}$ für $|z| = R - \delta$ umgeformt, das zweite Integral in eine geometrische Reihe in $\frac{z}{a}$ für $|z| = r + \delta$. □

3.3 Isolierte Singularitäten

Definition 3.30 *$U \subset \mathbb{C}$ sei offen, $z_0 \in U$. Ist $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph, so nennt man z_0 eine* isolierte Singularität *von f.*

Wir unterscheiden die folgenden drei Arten von Singularitäten:

Definition 3.31 *Seien U, z_0, f wie zuvor.*

1. *z_0 heißt* hebbare Singularität *von f, falls sich f durch geeignete Definition zu einer auf ganz U holomorphen Funktion fortsetzen lässt.*

2. *z_0 heißt* Pol *von f, wenn z_0 nicht hebbar ist, aber ein $\mathbb{N} \ni m \geq 1$ existiert, so dass $(z - z_0)^m f$ in z_0 eine hebbare Singularität besitzt. Das kleinste solche m nennt man die* Ordnung *der Polstelle.*

3. *Ist die Singularität weder hebbar noch Pol, so nennt man sie* wesentlich.

Wir illustrieren diese Begriffe sogleich mit Standardbeispielen:

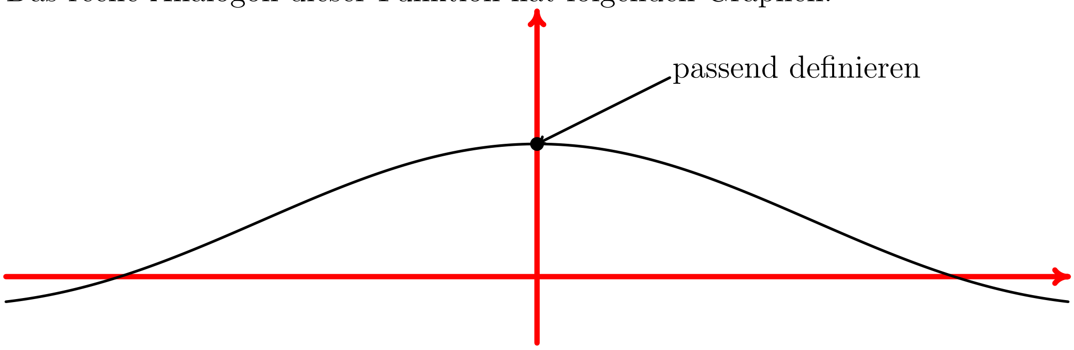
Beispiel 3.32 Beispiel für eine Funktion mit hebbarer Singularität ist

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z},\ z \neq 0 \\ 1,\ z = 0 \end{cases}$$

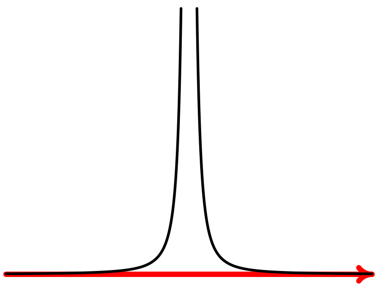
Die Potenzreihenentwicklung dieser Funktion um 0 ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}.$$

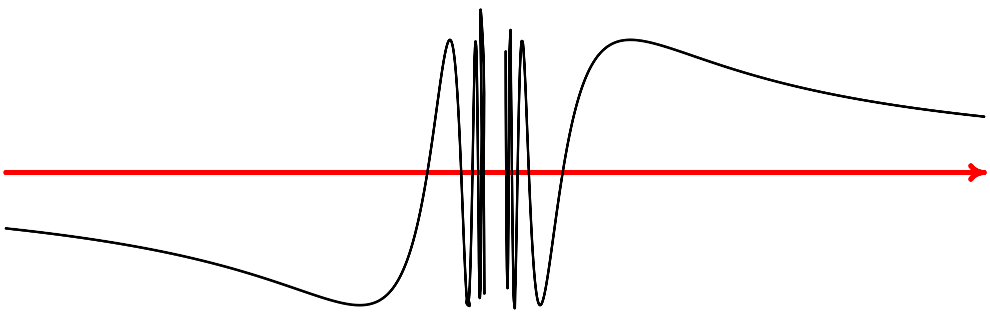
Das reelle Analogon dieser Funktion hat folgenden Graphen:



Eine Polstelle findet sich bei der Funktion $f(z) = z^{-2}$ im Punkt 0. Die Ordnung dieser Polstelle ist offensichtlich 2.



Als Beispiel für eine wesentliche Singularität betrachten wir die Funktion $f(z) = \sin(1/z)$. Das Verhalten dieser Funktion um den Nullpunkt herum ist reichlich chaotisch, wie schon der Blick auf den Graphen des reellen Analogons $\sin(1/x)$ zeigt:



Im Komplexen kommt zu der wilden Oszillation hinzu, dass die Sinusfunktion — im Gegensatz zum reellen Sinus — nicht beschränkt ist (was uns der Satz von LIOUVILLE lehrt).
Das Verhalten einer Funktion in der Nähe wesentlicher Singularitäten werden wir weiter unten näher studieren.

Beispiel 3.33

1. $U \subset \mathbb{C}$ sei offen, $f : U \to \mathbb{C}$ sei holomorph. Dann sind offenbar alle $z_0 \in U$ hebbar.

2. Sei $U = \mathbb{C}$, und sei
$$f(z) := \frac{z^2+1}{z-\mathrm{i}} = z + \mathrm{i}.$$
Diese Funktion hat in $z_0 = \mathrm{i}$ eine hebbare Singularität.

3. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z_0) \neq 0$, ferner sei $\mathbb{N} \ni m \geq 1$. Dann hat die Funktion
$$g(z) := \frac{f(z)}{(z-z_0)^m}$$
in z_0 einen Pol m-ter Ordnung.

4. Umgekehrt: hat $g : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ in z_0 einen Pol m-ter Ordnung, dann gibt es eine auf U holomorphe Funktion f mit $f(z_0) \neq 0$, so dass $g(z) = f(z)/(z-z_0)^m$, denn nach Voraussetzung ist $(z-z_0)^m g$ zu einer holomorphen Funktion f ergänzbar. Wäre $f(z_0) = 0$, wäre auch
$$(z-z_0)^{m-1} g(z) = \frac{f(z)}{z-z_0}$$
in z_0 holomorph, also m nicht die Ordnung der Polstelle.

Besonders interessant im Zusammenhang mit Polstellen ist auch die Berechnung des Residuums. Zur Erinnerung: wenn wir die Funktion f in eine LAURENTreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ entwickeln, ist das Residuum der Koeffizient a_{-1}. Ist z_0 eine Polstelle von f, erhalten wir folgende Formeln für $\mathrm{res}_{z_0} f$:

1. Ist z_0 ein Pol erster Ordnung, gilt
$$\mathrm{res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z). \tag{3.10}$$

2. Ist g in z_0 holomorph und hat f dort einen Pol erster Ordnung, gilt

$$\operatorname{res}_{z_0}(gf) = g(z_0)\operatorname{res}_{z_0} f. \tag{3.11}$$

3. Hat h in z_0 eine Nullstelle erster Ordnung, so gilt

$$\operatorname{res}_{z_0}\frac{1}{h} = \lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{h(z)} = \frac{1}{h'(z_0)}. \tag{3.12}$$

Ist zusätzlich g in z_0 holomorph, gilt

$$\operatorname{res}_{z_0}\frac{g}{h} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}. \tag{3.13}$$

4. Hat f in z_0 einen Pol n-ter Ordnung, gilt mit $g(z) = (z-z_0)^n f(z)$

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{1}{(n-1)!}g^{(n-1)}(z_0), \tag{3.14}$$

denn

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots\ ;$$

um an a_{-1} heranzukommen, muss $(z-z_0)^n f$ also $(n-1)$–mal abgeleitet werden.

Definition 3.34 *Ist f auf U bis auf Pole holomorph, so nennt man f* meromorph *in U.*

Meromorphe Funktionen lassen sich lokal als Quotient holomorpher Funktionen schreiben, also $f(z) = g(z)/h(z)$.
Umgekehrt: sind g und h holomorphe Funktionen auf dem Gebiet G und ist $h \not\equiv 0$, dann ist die Funktion f die aus g/h nach Hebung aller hebbaren Singularitäten in G hervorgeht, meromorph.

Beweis: Sei $z_0 \in G$. Ist $h(z_0) \neq 0$, so ist f holomorph bei z_0.
Ist $h(z_0) = 0$ so gilt für ein $n \geq 1$: $h(z) = (z-z_0)^n\tilde{h}(z)$ mit $h(z) \neq 0$ auf $\{z; |z-z_0| < \varepsilon\}$ für ein geeignetes $\varepsilon > 0$.
Desgleichen: $g(z) = (z-z_0)^k\tilde{g}(z)$, $k \geq 0$ mit $\tilde{g}(z_0) \neq 0$. Dann ist

$$f(z) = (z-z_0)^{k-n}\frac{\tilde{g}(z)}{\tilde{h}(z)}.$$

□

Bezeichnung: Sei f meromorph auf U. Mit N_f bezeichnen wir die Menge der Nullstellen von f in U, mit D_f die Menge der Pole von f in U.

Lemma 3.35 *Ist f meromorph im Gebiet G und f nicht konstant 0. Dann kann weder D_f noch N_f einen Häufungspunkt in G haben.*

Beweis: $\underline{\alpha)}$ Sei $z_0 \in G$ ein Pol. Dann kann z_0 kein Häufungspunkt sein von Polen sein, denn diese liegen isoliert.
Ist f in z_0 holomorph, so kann z_0 ebenfalls kein Häufungspunkt von Polen sein, denn f ist in einer vollen Umgebung um z_0 differenzierbar.
Zusammengefasst: D_f hat keinen Häufungspunkt in G.

$\underline{\beta)}$ Nehmen wir an, $z_0 \in G$ wäre ein Häufungspunkt von N_f. Dann ist z_0 kein Pol, denn sonst wäre $f(z) = g(z)(z - z_0)^{-m}$ mit $g(z_0) \neq 0$. $\Rightarrow f(z) \neq 0$ für $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ (ε hinreichend klein), im Widerspruch dazu, dass z_0 Häufungspunkt von N_f ist.
Es bleibt zu zeigen, dass $G \setminus D_f$ ein Gebiet ist.

Hilfssatz 3.36 *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $M \subset G$, und M habe keine Häufungspunkte. Dann ist $G \setminus M$ ein Gebiet.*

Beweis des Hilfssatzes: $\underline{\alpha)}$ $y \in G \setminus M$ besitze keine Umgebung in $G \setminus M$. $\Rightarrow y$ ist Häufungspunkt von M. Widerspruch!
Also ist $G \setminus M$ offen.

$\underline{\beta)}$ Z. z.: $G \setminus M$ ist zusammenhängend.
Dazu seien $p, q \in G$. Man wählt eine stetige Kurve $\alpha : [0,1] \to G$ mit $\alpha(0) = p$, $\alpha(1) = q$. Dann ist $\alpha([0,1]) \subset G$ kompakt, also existieren nur endlich viele Punkte von M auf $\alpha([0,1])$.

⌈ Nach Voraussetzung hat M in G keine Häufungspunkte. Für $y \in M$ liegt also die Kreisscheibe $D_{\varepsilon_1}(y)$ ganz in $(G \setminus M) \cup \{y\}$.
Wir überdecken nun $\alpha([0,1])$ mit Kreisscheiben $D_{\varepsilon_2}(\alpha(t))$, $t \in [0,1]$. Da $\alpha([0,1])$ kompakt ist, reichen endliche viele dieser Kreisscheiben zur Überdeckung aus. Folglich ist jedes $y \in \alpha([0,1]) \cap M$ in einer Kreisscheibe $D_{\varepsilon_2}(y_j)$ enthalten. Ist ε_2 klein genug, ist $D_{\varepsilon_2}(y) \subset D_{\varepsilon_1}(y)$ und somit ganz in $(G \setminus M) \cup \{y\}$.
Es können also nur endlich viele Punkte aus M in $\alpha([0,1])$ liegen, da $\alpha([0,1])$ vor nur endlich vielen $D_{\varepsilon_2}(y_j)$ überdeckt wird. ⌋

Sei nun $z_0 \in \alpha([0,1]) \cap M$. Man wähle $\varepsilon > 0$ mit $\overline{D_\varepsilon(z_0)} \subset (G \setminus M) \cup \{y\}$.
Setze $t_0 := \inf\{t; |\alpha(t) - z_0| = \varepsilon\}$, $t_1 := \sup\{t; |\alpha(t) - z_0| = \varepsilon\}$ und ersetze $\alpha|_{[t_0,t_1]}$ durch einen Weg in $\{z; 0 < |z - z_0| \leq \varepsilon\}$. ◇

□

Bemerkung: G sei ein Gebiet, und $f, g : G \to \mathbb{C}$ seien meromorph. Dann sind $f \pm g$ und $f \cdot g$ auf $G \setminus (D_f \cup D_g)$ definiert. Auf diese Weise wird

$$\mathscr{M}(G) := \{f : G \to \mathbb{C}; f \text{ in } G \text{ meromorph}\}$$

offensichtlich zu einer $\mathbb{C}$–Algebra.
Etwas weniger offensichtlich ist, dass $\mathscr{M}(G)$ mit punktweiser Division sogar ein Körper ist.
Dazu macht man sich folgendes klar: Ist $g \in \mathscr{M}(G)$, und nicht identisch 0, so hat N_g nach Lemma 3.35 keinen Häufungspunkt. Demzufolge hat die Menge $D_{1/g}$ keinen Häufungspunkt in G. Die Funktion $1/g$ ist also auf dem *Gebiet* $G \setminus N_g$ holomorph.

Dass die Nullstellen bei einer isolierten *wesentlichen* Singularität sehr wohl einen Häufungspunkt besitzen können, soll das Beispiel der Funktion $\sin(1/z) : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$ verdeutlichen: Die Nullstellen des Sinus sind die Punkte $k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Dementsprechend hat die Funktion $z \mapsto \sin(1/z)$ Nullstellen an $\frac{1}{\mathbb{Z}\pi}$, und diese Menge hat in 0 einen Häufungspunkt.

Bemerkung: f habe in z_0 eine isolierte Singularität. Wir können mit Hilfe der LAURENTreihe von f um z_0 die Singularität folgendermaßen charakterisieren:

1. f ist hebbar in $z_0 \iff$ der Hauptteil $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n$ ist Null.
2. z_0 ist ein Pol $\iff$ der Hauptteil von f in z_0 ist von der Form $\sum_{n=1}^{k} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$.
3. z_0 ist eine wesentliche Singularität $\iff$ der Hauptteil hat unendlich viele Summanden: $c_n \neq 0$ für unendlich viele $-\infty \leq n \leq -1$.

Für hebbare Singularitäten haben wir ferner die folgende Eigenschaft:

Satz 3.37 (Riemannscher Hebbarkeitssatz) *Sei z_0 eine isolierte Singularität von f, und sei f in einer punktierten Umgebung von z_0 beschränkt (d. h. es gibt ein $\varepsilon > 0$ und $M > 0$, so dass $|f(z)| \leq M$ für alle z mit $0 < |z - z_0| \leq \varepsilon$). Dann ist f in z_0 hebbar.*

Beweis: Sei r hinreichend klein.
Wir schreiben

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \text{ mit } c_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$$

Es folgt:

$$(3.15)\quad |c_n| \leq \frac{M}{r^n} \quad \text{(}\textsc{Cauchy}\text{sche Ungleichung für }\textsc{Laurent}\text{entwicklungen).}$$

Ist $n < 0$, gilt $|c_n| \leq M r^{|n|}$ für beliebiges r. Wir können r beliebig klein wählen und erhalten so $c_n = 0$ für alle $n < 0$. □

Den Abschluss des Abschnitts bildet eine Aussage, die sich eingehender mit dem Verhalten an einer wesentlichen Singularität befasst:

Satz 3.38 (Casorati–Weierstrass) *Sei z_0 eine wesentliche Singularität von f, und sei $\varepsilon > 0$ klein genug, dass f auf der punktierten Umgebung $\{z; 0 < |z-z_0| < \varepsilon\}$ holomorph ist.*
Dann ist $\{w = f(z); 0 < |z-z_0| < \varepsilon\}$ dicht in $\mathbb{C}$.

Beweis: Wir beweisen die Aussage indirekt: Nehmen wir an, es gäbe ein $\delta > 0$ und ein $w_0 \in \mathbb{C}$, so dass $\{w; |w-w_0| < \delta\}$ keine Punkte des Bildes von $D_\varepsilon(z_0)\setminus\{z_0\}$ enthält.
Betrachten wir die Funktion $h(z) := 1/(f(z)-w_0)$. Da f holomorph auf $D_\varepsilon(z_0)\setminus\{z_0\}$ ist und $|f(z)-w_0| > \delta$ für $0 < |z-z_0| < \varepsilon$ gilt, ist h auf $D_\varepsilon(z_0)\setminus\{z_0\}$ holomorph und beschränkt. Aus Satz 3.37 folgt, dass h in z_0 eine hebbare Singularität hat.
Da h nicht konstant 0 ist, kann $1/h$ höchstens eine Polstelle endlicher Ordnung haben. Es folgt: $f(z) = 1/h(z) + w_0$ hat in z_0 eine Polstelle oder hebbare Singularität, im Widerspruch zur Voraussetzung, dass die Singularität wesentlich ist. □

Bemerkung: Der Satz von Casorati–Weierstrass kann noch verschärft werden: *Hat die Funktion f an z_0 eine wesentliche Singularität, dann nimmt f in jeder punktierten Umgebung um z_0 jede komplexe Zahl — mit höchstens einer Ausnahme — unendlich oft als Wert an.*
Diese Aussage ist auch als der (große) Satz von Picard bekannt. Die Ausnahme eines Punktes tritt etwa bei der Funktion $\mathrm{e}^{1/z}$ auf: hier wird jede punktierte Umgebung $\{0 < |z| < \varepsilon\}$ auf $\mathbb{C}^\times$ abgebildet.

3.4 Nachtrag: Lokal konstante Funktionen und Zusammenhang

Im Folgenden sei X ein metrischer Raum.

Definition 3.39 *$f : X \to \mathbb{C}$ heißt* lokal konstant, *wenn jedes $x \in X$ in einer Umgebung $U \subset X$ liegt mit der Eigenschaft, dass $f|_U$ konstant ist.*

Satz 3.40 *X sei ein metrischer Raum. Dann sind äquivalent:*

1. *Jede lokal konstante Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ ist konstant.*
2. *Die einzige nichtleere Teilmenge von X, die gleichzeitig offen und abgeschlossen („clopen“) ist, ist X.*

Beweis: „$1 \Longrightarrow 2$“ Sei $A \subset X$ nichtleer, offen und abgeschlossen. Es folgt: $\mathbf{1}_A$ ist lokal konstant $\Rightarrow$ $\mathbf{1}_A$ ist konstant $\Rightarrow$ $A = X$.

„$2 \Longrightarrow 1$“ Seien $c \in X$ und $f : X \to \mathbb{C}$ lokal konstant. Wir setzen $A := \overset{-1}{f}(\{f(c)\})$.
Dann ist $A \neq \emptyset$, denn es gilt $c \in A$.
A ist offen, denn: f ist lokal konstant, somit gilt für alle Punkte x in einer Umgebung von c, dass $f(x) = f(c)$, also ist auch $x \in A$.
A ist abgeschlossen, denn f ist stetig, und A ist das Urbild einer abgeschlossenen Menge.
Nach Voraussetzung ist damit $A = X$. Also ist $f(x) = f(c)$ für alle $x \in X$. □

Definition 3.41 *Wir sagen X ist* zusammenhängend, *wenn Eigenschaft 2 aus dem Satz erfüllt ist.*

Auf diese Weise wird der Zusammenhangsbegriff rein topologisch definiert.

Satz 3.42 *$D \subset \mathbb{C}$ sei offen. Dann sind äquivalent:*

1. *D ist zusammenhängend.*
2. *Zu jedem Punktepaar $p, q \in D$ existiert ein achsparalleler Polygonzug $P \subset D$ von p nach q.*
3. *D ist wegzusammenhängend, d. h. zu jedem Paar $p, q \in D$ gibt es einen Integrationsweg von p nach q in D.*

Beweis: „3 $\Longrightarrow$ 1“: Diese Aussage gilt auch in beliebigen metrischen Räumen. $D \supset U \neq \emptyset$ sei offen und abgeschlossen, $p \in U$ sei fest, $q \in D$. Nach Voraussetzung existiert ein Weg $\gamma : [a,b] \to D$, der p und q verbindet. γ ist stetig $\Rightarrow \overset{-1}{\gamma}(U)$ ist offen, abgeschlossen und nicht leer. Allerdings ist $\overset{-1}{\gamma}(U) = [a,b]$, folglich gilt $q = \gamma(b) \in U$. Also: $U = D$.

„1 $\Longrightarrow$ 2“: Sei $p \in D$. $f : D \to \mathbb{C}$ sei definiert durch

$$f(w) := \begin{cases} 1, \text{ Polygonzug von } p \text{ nach } w \text{ in } D \text{ existiert} \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases}$$

f ist lokal konstant. Nach Satz 3.40 ist f konstant auf D; es bleibt zu ermitteln, ob $f \equiv 0$ oder $f \equiv 1$ auf D. Es ist allerdings $f(p) = 1$.

„2 $\Longrightarrow$ 3“: trivial. $\square$