Kapitel 4

Der globale Cauchysche Integralsatz

Die Ergebnisse, die wir im vorigen Kapitel gewonnen haben, leben in der Regel davon, dass über einfach geschlossene Kurven integriert wird. Wie sich die Aussagen verhalten, wenn wir zulassen, dass ein Weg auch mehrfach oder in umgekehrter Richtung durchlaufen werden darf, ist Gegenstand dieses Kapitels.
Ausgehend davon, dass wir schon bisher Integrale über zusammengsetzte Wege als die Summe der einzelnen Wegintegrale definiert haben, führen wir einige explizite Rechenvorschriften ein, wie Wege addiert werden können.

Definition 4.1 *Eine* Kette *in $U \subset \mathbb{C}$ ist eine Abbildung Γ der Menge der Integrationswege in U in die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen, die nur auf endlich vielen Wegen einen von Null verschiedenen Wert hat.*

Bemerkung: Ketten bilden mit der üblichen Addition $\mathbb{Z}$–wertiger Funktionen eine Abelsche Gruppe.

Identifizieren wir den Integrationsweg γ mit der Kette, die nur auf γ den Wert 1 und sonst den Wert 0 hat, so bezeichnen wir die Kette auch mit γ.
Jede Kette ist endliche Linearkombination von Integrationswegen:

$$\Gamma = \sum_{\ell=1}^{k} n_\ell \gamma_\ell, \quad n_\ell \in \mathbb{Z}.$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \gamma_1 - 2\gamma_2 + 3\gamma_3 \\
\Gamma_1 &= 2\gamma_2 - \gamma_3 + 5\gamma_4 \\
\Gamma_1 + \Gamma_2 &= \gamma_1 + 2\gamma_3 + 5\gamma_4
\end{aligned}$$

Bezeichnung: Ist $\Gamma = \sum_\ell n_\ell \gamma_\ell$, nennen wir $Sp\Gamma = \bigcup_{n_\ell \neq 0} Sp(\gamma_\ell)$ die Spur von Γ.
Ist $f : Sp(\Gamma) \to \mathbb{C}$ stetig, setzen wir

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \sum_\ell n_\ell \int_{\gamma_\ell} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Wir können sofort feststellen, dass für Integrale über Ketten folgende Aussagen gelten:

1. $$\Big|\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z\Big| \leq \max_{z \in Sp\Gamma} |f(z)| \sum_\ell |n_\ell| L(\gamma_\ell),$$

2. Ist $f : Sp\Gamma_1 \cup Sp\Gamma_2 \to \mathbb{C}$ stetig, gilt
$$\int_{\Gamma_1+\Gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_1} f + \int_{\Gamma_2} f.$$

Definition 4.2 *Eine Kette* $\Gamma = \sum_{\ell=1}^k n_\ell \gamma_\ell$ *heißt* geschlossen *oder* Zyklus, *wenn jeder Punkt* $z \in \mathbb{C}$ *unter Berücksichtigung der Vielfachheit* n_ℓ *genau so oft Anfangs- wie Endpunkt eines* γ_ℓ *ist.*

Beispiel 4.3

1. Jeder geschlossene Integrationsweg ist ein Zyklus; ebenso jede Linearkombination von geschlossenen Wegen (etwa Randkurven von positiv berandeten Gebieten).

2. Ist γ ein Integrationsweg, so ist $\gamma + \gamma^{-1}$ ein Zyklus.

3. Sind $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ Integrationswege, die zu einem geschlossenen Weg $\gamma_1 \cdots \gamma_k$ zusammengesetzt werden können, dann ist $\gamma_1 + \ldots + \gamma_k$ ein Zyklus.

Satz 4.4 $G \subset \mathbb{C}$ *sei ein Gebiet,* $f : G \to \mathbb{C}$ *sei stetig.* f *besitzt genau dann auf* G *eine Stammfunktion, wenn für alle Zyklen* Γ *in* G *gilt:*

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Beweis: „$\Leftarrow$“: Dies ist die Aussage von Satz 3.5.

„$\Rightarrow$“: F sei Stammfunktion von f auf G, und $\Gamma = \sum_{\ell=1}^{k} n_\ell \gamma_\ell$ sei ein Zyklus.

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \sum_{\ell=1}^{k} n_\ell \int_{\gamma_\ell} f(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \sum_{\ell=1}^{k} n_\ell \big(F(E(\gamma_\ell)) - F(A(\gamma_\ell))\big) \\
&= \sum_z \underbrace{\Big(\sum_{\substack{\ell=1 \\ z=E(\gamma_\ell)}}^{k} n_\ell - \sum_{\substack{\lambda=1 \\ z=E(\gamma_\lambda)}}^{k} n_\lambda \Big)}_{=0,\text{ da }\Gamma\text{ Zyklus}} F(z).
\end{aligned}$$

$\square$

Definition 4.5 Γ *sei ein Zyklus. Für* $z \in \mathbb{C} \setminus Sp(\gamma)$ *definieren wir die* Umlaufszahl *von* Γ *bezüglich* z *durch*

$$n(\Gamma, z) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}.$$

Der Vorteil dieser Definition ist, dass wir uns von der geometrischen Anschauung trennen.

Für die Umlaufszahl können wir sofort feststellen:

$$\begin{aligned}
n(\Gamma_1 + \Gamma_2, z) &= n(\Gamma_1, z) + n(\Gamma_2, z), \\
n(-\Gamma, z) &= -n(\Gamma, z).
\end{aligned}$$

Beispiel 4.6

1. Sei $\gamma(t) = z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt}$, $0 \le t \le 2\pi$. Dann ist

   $$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z_0} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_0^{2\pi} \mathrm{i}m\,\mathrm{d}t = m.$$

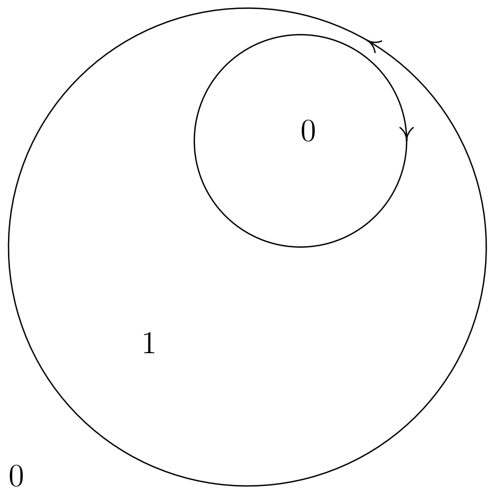
   Für $|z - z_0| < r$ deckt sich dies mit unserer geometrischen Vorstellung der Umlaufszahl.

   Ist $|z - z_0| > r$, also $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D_r(z_0)}$, gilt

   $$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} = 0,$$

   denn die Funktion $\zeta \mapsto 1/(\zeta - z)$ ist in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ holomorph, und γ liegt ganz in einer der Halbebenen $\{\mathrm{Im}\zeta > \mathrm{Im}z\}$, $\{\mathrm{Im}\zeta < \mathrm{Im}z\}$.

2. Sei $\Gamma := \kappa(R, z_0) - \kappa(r, z_1)$, wobei $\overline{D_r(z_1)} \subset D_R(z_0)$.



Dann ist

$$n(\Gamma, z) = \begin{cases} 1 & , \ z \in D_R(z_0) \setminus \overline{D_r(z_1)} \\ 0 & , \ |z - z_1| < r \vee |z - z_0| > R \end{cases}$$

Satz 4.7 *Es seien Γ ein Zyklus und $z \in \mathbb{C} \setminus Sp(\Gamma)$. Dann ist $n(\Gamma, z)$ eine ganze Zahl.*

Beweis: Sei $\Gamma = \sum_{\ell=1}^{k} n_\ell \gamma_\ell$ mit Wegen $\gamma_\ell : [0,1] \to \mathbb{C}$ (dies erreicht man durch eventuelles Umparametrisieren).
Für $t \in [0,1]$ definieren wir

$$h(t) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \sum_\ell n_\ell \int_0^t \frac{\gamma_\ell'(s)}{\gamma_\ell(s) - z} \,\mathrm{d}s.$$

Es gilt $h(0) = 0$ und $h(1) = n(\Gamma, z)$. Wir wollen zeigen: $\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} h(1)} = 1$, woraus folgt, dass $h(1) = n(\Gamma, z) \in \mathbb{Z}$.
h ist stückweise differenzierbar. Folglich ist auch

$$g(t) := \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} h(t)} \prod_\ell (\gamma_\ell(t) - z)^{n_\ell}$$

stückweise differenzierbar mit Ableitung

$$g'(t) = \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} h(t)} \prod_\ell (\gamma_\ell(t) - z)^{n_\ell} \cdot \cdots \cdot \underbrace{\Big(-2\pi \mathrm{i} h'(t) + \sum_\lambda \frac{n_\lambda \gamma_\lambda'(t)}{\gamma_\lambda(t) - z} \Big)}_{=0}.$$

Da g auf $[0,1]$ stetig ist, folgt: g ist auf $[0,1]$ konstant.
Es gibt also ein $c \in \mathbb{C}$ mit

$$\underbrace{\prod_{\ell}(\gamma_\ell(t)-z)^{n_\ell}}_{(z\notin Sp\Gamma)\rightarrow\neq 0} = c\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}h(t)} \Rightarrow c \neq 0.$$

Falls

$$\prod_{\ell=1}^{k}(\gamma_\ell(0)-z)^{n_\ell} = \prod_{\ell=1}^{k}(\gamma_\ell(1)-z)^{n_\ell}, \tag{4.1}$$

ist $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}h(0)} = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}h(0)} = 1$, da $h(0)=0$.
Ist w ein Punkt, der als Anfangs- oder Endpunkt eines γ_ℓ auftritt, so gilt

$$\sum_{w=\gamma_\ell(0)} n_\ell = \sum_{w=\gamma_\ell(1)}$$

(Γ ist ein Zyklus!). $w-z$ kommt in (4.1) auf beiden Seiten gleich oft vor. Also gilt (4.1). □

Satz 4.8 $\Gamma \subset \mathbb{C}$ *sei ein Zyklus. Dann ist* $\mathbb{C}\setminus Sp\Gamma \ni z \mapsto n(\Gamma,z) \in \mathbb{Z}$ *auf jeder Wegkomponente konstant und auf der unbeschränkten Komponente gleich Null.*

Beweis: $\underline{\alpha)}$ $z \mapsto n(\Gamma,z)$ ist stetig, bildet also zusammenhängende Teilmengen von $\mathbb{C}$ in zusammenhängende Teilmengen von $\mathbb{Z}$ ab. Folglich ist $n(\Gamma,z)$ auf jeder Wegkomponente konstant.

$\underline{\beta)}$ $Sp\Gamma$ ist kompakt, also existiert ein $R>0$ mit $Sp\Gamma \subset \overline{D_R(0)}$. Mithin ist $\mathbb{C}\setminus\overline{D_R(0)}$ offen, zusammenhängend und zu $Sp\Gamma$ disjunkt. Es gibt also genau eine Wegkomponente von $\mathbb{C}\setminus Sp\Gamma$, die $\mathbb{C}\setminus\overline{D_R(0)}$ enthält; dies ist die einzige unbeschränkte Wegkomponente.
Sei $\{z_\nu\}$ eine Folge in dieser Wegkomponente mit $\operatorname{dist}(z_\nu, Sp\Gamma) \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.
Dann gilt

$$n(\Gamma,z_\nu) = \sum_{\ell=1}^{k}\frac{n_\ell}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_\ell}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z_\nu} \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

denn

$$\Big|\int_{\gamma_\ell}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z_\nu}\Big| \leq L(\gamma_\ell)\frac{1}{\operatorname{dist}(z_\nu,\Gamma)} \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

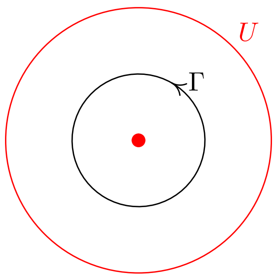
Definition 4.9 *Ein Zyklus Γ in einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ heißt* nullhomolog, *wenn für jeden Punkt $z \in U^{\complement}$ die Umlaufzahl $n(\Gamma, z) = 0$ ist.*
Zwei Zyklen heißen homolog, *wenn ihre Differenz nullhomolog ist.*

Bildlich gesprochen bedeutet dies, dass sich der Zyklus auf einen Punkt zusammen ziehen lässt.

Beispiel 4.10

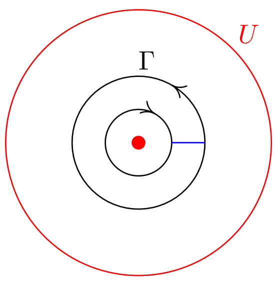
1. Sei $U = B_2(0)$, $\Gamma = \kappa(1, 0)$ Für jeden Punkt $z \in U^{\complement}$ ist $n(\Gamma, z) = 0$. Dieser Zyklus ist nullhomolog.

2. Sei $U = B_2(0) \setminus \{0\}$, wie zuvor sei $\Gamma = \kappa(1, 0)$. Dieser Zyklus ist nicht nullhomolog, denn $n(\Gamma, 0) = 1$.



Bildlich: dieser Zyklus lässt ich nicht auf einen Punkt in U zusammen ziehen, denn der Nullpunkt ist im Weg.

3. Wie zuvor sei $U = B_2(0) \setminus \{0\}$, und sei $\Gamma := \kappa(1, 0) - \kappa(1/2, 0)$. Dieser Zyklus ist nullhomolog, denn — im Gegensatz zum vorherigen Beispiel – gilt an der kritischen Stelle $z = 0$: $n(\Gamma, 0) = \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = 0$



Bildlich: diesen Zyklus kann man auf einen Punkt in U zusammen ziehen, denn: man kann einen „Null-Zyklus“, etwa $\Gamma_0 := [(0.5, 0), (1, 0)] - [(1, 0), (0.5, 0)]$ zu Γ addieren und entlang Γ_0 „aufschneiden“.

Satz 4.11 (Allgemeiner Cauchyscher Integralsatz und allgemeine Cauchysche Integralformel)
Es seien Γ ein nullhomologer Zyklus in der offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:

1. $\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

2. *Für jeden Punkt $z \in U \setminus Sp\Gamma$ und alle $k = 0, 1, 2, \ldots$ gilt*

$$n(\Gamma, z) f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta. \tag{4.2}$$

Beweis: Ad 2.
Sei $k = 0$ — der allgemeine Fall ergibt sich durch Differenzieren.
Für $z \in U \setminus Sp\Gamma$ gilt

$$\begin{aligned} n(\Gamma, z) f(z) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \Big(\int_\Gamma \frac{f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta + \int_\Gamma \underbrace{\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}}_{=:h(z)}\,\mathrm{d}\zeta \Big) \end{aligned}$$

Was für den Beweis der Aussage 2 für $k = 0$ zu zeigen bleibt, ist, dass das zweite Integral verschwindet.
Dabei lassen wir uns von folgender Idee leiten: wir zeigen, dass sich h auf ganz $\mathbb{C}$ zu einer holomorphen Funktion fortsetzen lässt mit $\lim_{z\to\infty} h(z) = 0$. Aus dem Satz von LIOUVILLE folgt dann, dass $h \equiv 0$.
Wir definieren dazu:

$$g(\zeta, z) := \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & , \ z \neq \zeta \\ f'(z) & , \ z = \zeta \end{cases}$$

Dann ist $g : \mathbb{C}^2 \supset U \times U \to \mathbb{C}$ stetig, denn für einen festen Punkt $(\zeta_0, z_0) \in U \times U$ gilt:
Ist $\zeta_0 \neq z_0$, so gilt in der Nähe von (ζ_0, z_0) die Formel

$$g(\zeta, z) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}.$$

Ist $\zeta_0 = z_0$, unterscheiden wir wieder zwei Fälle:

$$\begin{aligned} z = \zeta \ &\Rightarrow \ g(z, z) - g(z_0, z_0) = f'(z) - f'(z_0), \\ z \neq \zeta \ &\Rightarrow \ g(\zeta, z) - g(z_0, z_0) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} - f'(z_0) \\ &\qquad = \frac{1}{\zeta - z} \int_{[z-\zeta]} (f'(w) - f'(z_0))\,\mathrm{d}w. \end{aligned}$$

Da der Potenzreihenentwicklungssatz die Stetigkeit von f' in z_0 garantiert, folgt, dass g auf $U \times U$ stetig ist.
Wir setzen

$$h_0(z) := \int_\Gamma g(\zeta, z)\,\mathrm{d}\zeta.$$

Wegen der Stetigkeit von g ist $h_0 : U \to \mathbb{C}$ stetig. Wir zeigen: h_0 ist auch holomorph.
Dazu sei γ der positiv orientierte Rand eines Dreieck in U. Um den Satz von MORERA anzuwenden, müssen wir zeigen, dass $\int_\gamma h_0(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

$$\begin{aligned}\int_\gamma h_0(z), \mathrm{d}z &= \int_\gamma \Big(\int_\Gamma g(\zeta, z)\,\mathrm{d}\zeta\Big)\,\mathrm{d}z \\ &\overset{(\star)}{=} \int_\Gamma \Big(\int_\gamma g(\zeta, z)\,\mathrm{d}z\Big)\,\mathrm{d}\zeta.\end{aligned}$$

Im Schritt $(\star)$ ging ein, dass $g : U \times U \to \mathbb{C}$ stetig ist und somit der Satz von FUBINI aus der Integration in mehreren Veränderlichen anwendbar ist.
Für festes ζ ist offensichtlich die Funktion $U \setminus \{\zeta\} \ni z \mapsto g(\zeta, z)$ holomorph. Aus dem CAUCHYschen Integralsatz für Wegintegrale folgt

$$\int_\gamma g(\zeta, z)\,\mathrm{d}z = 0 \text{ und somit } \int_\gamma h_0(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Nun bringen wir die Voraussetzungen über Γ ins Spiel.
Sei $U_0 := \{z \in \mathbb{C}; n(\Gamma, z) = 0\}$.
Auf U_0 gilt einfacher:

$$h_0(z) = -f(z) \underbrace{\int_\Gamma \frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta}_{=n(\Gamma,z)=0} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta =: h_1(z).$$

Offenbar ist h_1 in U_0 holomorph. Wir können setzen:

$$h(z) := \begin{cases} h_0(z) & , z \in U \\ h_1(z) & , z \in U_0 \setminus U \end{cases}$$

Damit ist $h : U \cup U_0 \to \mathbb{C}$ holomorph. Da Γ nullhomolog ist, ist allerdings $U \cup U_0 = \mathbb{C}$. Also ist $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph („eine *ganze Funktion*“).

Sei nun $z \in U_0$ (dazu gehört insbesondere die unbeschränkte Komponente). Es gilt

$$|h(z)| = |h_1(z)| \leq L(\Gamma) \cdot \max_{\zeta \in \Gamma} |f(\zeta)| \cdot \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \Gamma)} \stackrel{z \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Folglich ist h beschränkt und damit nach dem Satz von LIOUVILLE konstant. Wegen $|h(z)| \to 0$ folgt $h \equiv 0$.

Ad 1.
Sei $a \in (U \cap U_0) \setminus Sp\Gamma$. (Ein solcher Punkt a existiert, da $\operatorname{dist}(Sp\Gamma, \partial U) > 0$ ist.) Die Funktion $F(z) := f(z)(z-a)$ ist auf U holomorph. Mit 2 folgt

$$\underbrace{n(\Gamma, a)}_{=0} F(a) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{F(z)}{z-a} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma f(z) \, \mathrm{d}z.$$

□

Satz 4.12 *Seien* Γ, Γ' *homologe Zyklen in* U *und* $f : U \to \mathbb{C}$ *holomorph. Dann gilt*

$$\int_\Gamma f(z) \, \mathrm{d}z = \int_{\Gamma'} f(z) \, \mathrm{d}z.$$

Beweis: $\Gamma - \Gamma'$ ist nullhomolog. □

Bemerkung: Aus Satz 4.12 folgt insbesondere, dass das Residuum von f um $z \in U$ kurvenunabhängig ist. Definiert man

$$\operatorname{res}_z f := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\kappa(r,z)} f(\zeta) \, \mathrm{d}\zeta$$

für hinreichend kleines $r > 0$, so ist der Wert identisch für jedes Integral über einen zu $\kappa(r, z)$ homologen Zyklus.

Beispiel 4.13

1. Für $f(z) = 1/(z-a)$ ist $\operatorname{res}_a f = 1$, für $f(z) = (z-a)^{-n}$ $(n \geq 2)$ ist $\operatorname{res}_a f = 0$.

2. Sei $f(z) = 1/(z(z-\mathrm{i})^2)$. Diese Funktion ist auf $\mathbb{C} \setminus \{0, \mathrm{i}\}$ holomorph.

Betrachten wir zunächst die LAURENT–Entwicklung dieser Funktion in dem Kreisring $\{z; 0 < |z| < 1\}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z-\mathrm{i})^2} &= -\frac{1}{z}\frac{1}{\left(1-\frac{z}{\mathrm{i}}\right)^2}\\ &= -\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left(\frac{z}{\mathrm{i}}\right)^k\\ &= -\frac{1}{z}+\mathrm{i}\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)\left(\frac{z}{\mathrm{i}}\right)^k.\end{aligned}$$

Da in der Reihe keine negative Potenz von z auftaucht, gilt folglich $\mathrm{res}_0 f = -1$.

Betrachten wir die LAURENTentwicklung um 0 in dem unbeschränkten Gebiet $\{z; 1 < |z| < \infty\}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z-\mathrm{i})^2} &= \frac{1}{z^3}\frac{1}{(1-i/z)^2} = \frac{1}{z^3}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left(\frac{\mathrm{i}}{z}\right)^k\\ &= \sum_{k=-\infty}^{-3}\mathrm{i}^{-k-1}(k+2)z^k.\end{aligned}$$

In dieser Reihenentwicklung tritt kein Summand zum Index -1 auf.

Die LAURENTentwicklung um i im Kreisring $\{0 < |z-\mathrm{i}| < 1\}$ ergibt das folgende Residuum:

$$\frac{1}{z(z-\mathrm{i})^2} = \frac{-\mathrm{i}}{(z-\mathrm{i})^2} + \frac{1}{z-\mathrm{i}} - \frac{1}{z},$$

also $\mathrm{res}_{\mathrm{i}} f = 1$.

Zusammengefasst:

$$\mathrm{res}_0 f = -1, \quad \mathrm{res}_{\mathrm{i}} f = 1.$$

Die Bedeutung des Residuums wird erst durch den folgenden Satz deutlich:

Satz 4.14 (Residuensatz) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ sei holomorph bis auf isolierte Singularitäten. Dann gilt für jeden nullhomologen Zyklus Γ in U*

$$\int_\Gamma f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 2\pi\mathrm{i}\sum_{z\in U} n(\Gamma, z)\mathrm{res}_z f. \tag{4.3}$$

Die Summe auf der rechten Seite von (4.3) ist endlich, denn $n(\Gamma, z) \neq 0$ gilt nur auf den beschränkten Wegkomponenten von Γ, deren Vereinigung A in U liegt und wo $\overline{A}$ kompakt ist. Allerdings können in $\overline{A}$ nur endlich viele Singularitäten von f liegen. In allen anderen Punkten verschwindet $\mathrm{res}_z f$.

Beweis: $z_1, \ldots, z_m$ seien die Singularitäten von f mit $n(\Gamma, z_\mu) \neq 0$, M sei die Menge der sonstigen Singularitäten.
$h_\mu(z)$ sei der Hauptteil der LAURENTentwicklung von f um z_μ. Dann ist $h_\mu : \mathbb{C} \setminus \{z_\mu\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Ebenfalls ist die Funktion $f - \sum_{\mu=1}^m h_\mu$ auf $U \setminus M$ holomorph.
Der Zyklus Γ ist in U und somit auch in $U \setminus M$ nullhomolog.
Aus dem globalen CAUCHYschen Integralsatz folgt damit

$$\int_\Gamma \Big(f(z) - \sum_{\mu=1}^m h_\mu(z)\Big)\,\mathrm{d}z = 0$$

oder äquivalent

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{\mu=1}^m \int_\Gamma h_\mu(z)\,\mathrm{d}z.$$

Schreiben wir $h_\mu(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{-1} a_{\nu\mu}(z - z_\mu)^\nu$, gilt

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=-\infty}^{-1} a_{\nu\mu} \int_\Gamma (z - z_\mu)^\nu\,\mathrm{d}z \\ &= \sum_\mu a_{-1,\nu} \int_\Gamma (z - z_\mu)^{-1}\,\mathrm{d}z \\ &= \sum_\mu \big(\mathrm{res}_{z_\mu} f \cdot n(\Gamma, z_\mu)\big) \cdot 2\pi\mathrm{i}.\end{aligned}$$

In der ersten Zeile dieser Rechnung haben wir stillschweigend davon Gebrauch gemacht, dass die LAURENTreihe auf kompakten Teilen des Konvergenzbereichs gleichmäßig konvergiert, also Integration und Summation vertauscht werden können. Ferner haben wir den globalen CAUCHYschen Integralsatz verwendet:

$$\int_\Gamma (z - z_\mu)^{-\nu} = 2\pi\mathrm{i}\, n(\Gamma, z_\mu)\, \underbrace{\mathbf{1}^{(\nu-1)}}_{=0, \nu \geq 2}.$$

$\square$

Definition 4.15 *Ein Gebiet, in dem jeder Zyklus nullhomolog ist, heißt* einfach zusammenhängend.

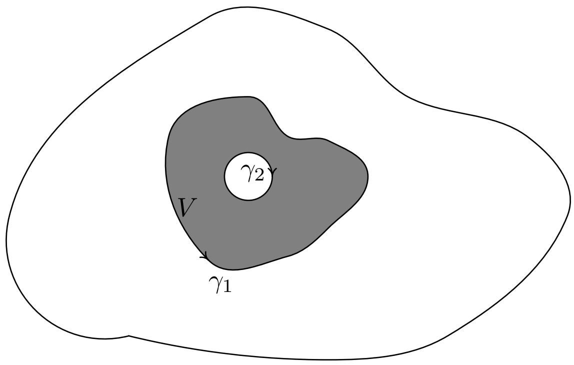
Bildlich gesprochen, hat ein einfach zusammenhängendes Gebiet keine Löcher.

Korollar 4.16 *Seien U ein einfach zusammenhängendes Gebiet und Γ ein Zyklus in U. Dann gilt*

$$\int_\Gamma f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 2\pi\mathrm{i}\sum_{z\in U} n(\Gamma, z)\mathrm{res}_z f,$$

sofern f bis auf isolierte Singularitäten in U holomorph ist und Γ durch keine Singularität läuft.

Geometrisch kann das auch in etwa wie folgt beschrieben werden:
Sei Γ in U der Randzyklus eines offenen Menge $V \subset U$, d. h. $\overline{V} \subset U$, $\partial V = Sp\Gamma$, $n(\Gamma, z) = 1$ für $z \in V$, $n(\Gamma, z) = 0$ für $z \notin \overline{V}$.



$\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2$

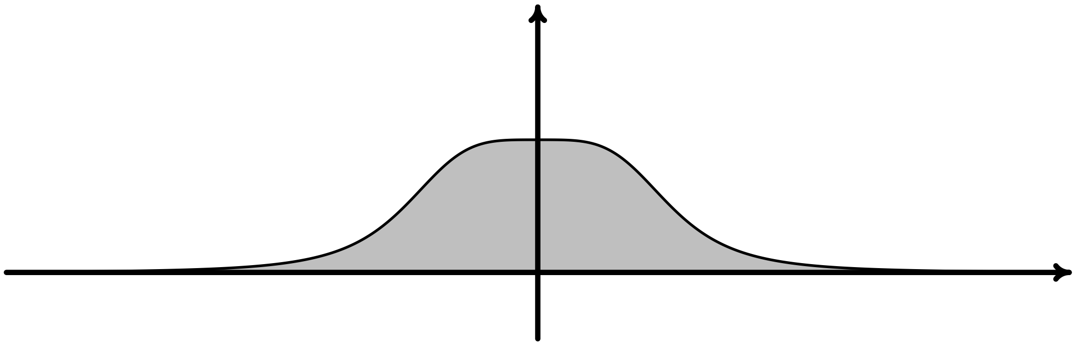
Ist $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph bis auf isolierte Singularitäten, von denen keine auf Γ liegt, so gilt

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{z\in V} \mathrm{res}_z f.$$

Zum Abschluss des Kapitels — und als Vorgriff auf das nächste — geben wir ein Beispiel an, welches den Nutzen des Residuenkalküls verdeutlichen soll.

Beispiel 4.17 Die Berechnung des uneigentlichen Riemann–Integrals

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}.$$

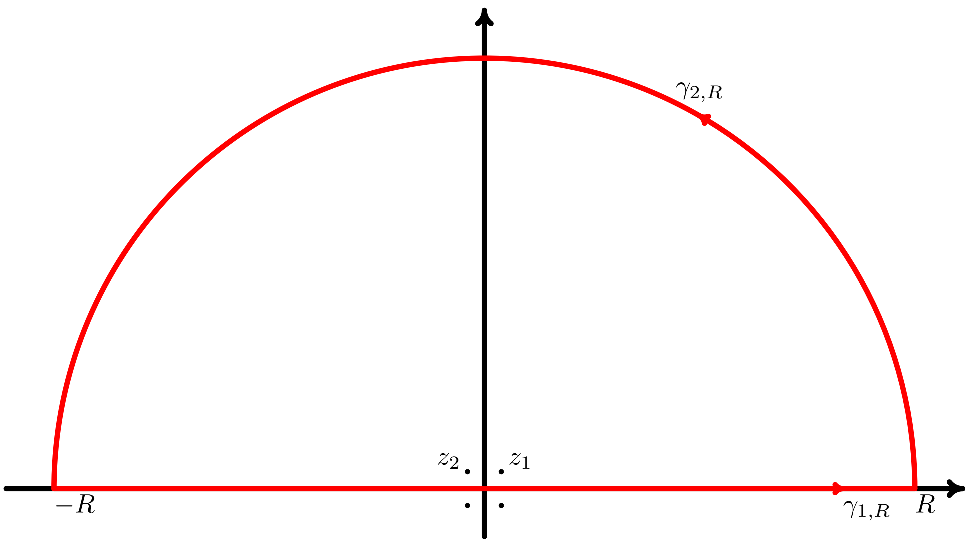


Dieses Integral existiert, wie man sich leicht klar macht.
Zur Berechnung des Integrals macht man einen Umweg über $\mathbb{C}$: Statt $f(x) = (1+x^4)^{-1}$ schreiben wir $f(z) = (1+z^4)^{-1}$. Diese Funktion hat Polstellen erster Ordnung in den Punkten

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{i\,\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \\ z_2 &= e^{i\,3\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i) \\ z_3 &= e^{i\,5\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i) \\ z_4 &= e^{i\,7\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) \end{aligned}$$

Keine der Polstellen liegt auf der reellen Achse. Wir definieren daher die folgenden Integrationswege

$$\gamma_{1,R} := [-R, R], \quad \gamma_{2,R} := Re^{it}, 0 \le t \le \pi.$$



Schätzen wir zunächst das Integral über den Halbkreis ab:

$$\Big|\int_{\gamma_{2,R}} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^4}\Big| = \Big|\int_0^\pi \frac{1}{1+R^4\mathrm{e}^{\mathrm{i}4t}}\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}4t}\mathrm{d}t\Big| \leq \frac{R}{R^4-1}\pi \overset{(R\to\infty)}{\longrightarrow} 0.$$

Für das Integral über $\gamma_{1,R}$ gilt

$$\int_{\gamma_{1,R}} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^4} = \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}.$$

Mit $\Gamma_R := \gamma_{1,R} + \gamma_{2,R}$ ist demnach

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^4} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}.$$

Nun gilt aber für $R > 1$:

$$\int_{\Gamma_R} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^4} = 2\pi\mathrm{i}(\mathrm{res}_{z_1}\frac{1}{1+z^4} + \mathrm{res}_{z_2}\frac{1}{1+z^4})$$

Rechnen wir die Residuen daher aus:

$$\begin{aligned}
\mathrm{res}_{z_1}\frac{1}{1+z^4} &= \lim_{z\to z_1} \frac{z-z_1}{1+z^4} \\
&= \lim_{z\to z_1} \frac{1}{(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)} = \frac{1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{\mathrm{i}-1} \\
\mathrm{res}_{z_2}\frac{1}{1+z^4} &= \ldots = \frac{1}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)(z_2-z_4)} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{\mathrm{i}+1}
\end{aligned}$$

Setzen wir dies ein, gilt

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} &= 2\pi\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{4}(\frac{1}{\mathrm{i}-1} + \frac{1}{\mathrm{i}+1}) \\
&= \frac{\pi\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}\frac{(\mathrm{i}-1)+(\mathrm{i}+1)}{-2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.
\end{aligned}$$

Kapitel 5

Anwendungen des Residuenkalküls

Wie sich am Ende des vorigen Kapitels in Beispiel 4.17 bereits angedeutet hat, bietet der Residuenkalkül ein mächtiges Werkzeug, um uneigentliche Integrale mit einem Umweg über $\mathbb{C}$ zu berechnen. In diesem Kapitel wollen wir den Kalkül etwas vertiefen und weitere Anwendungen — beispielsweise für die Berechnung von Reihen — aufzeigen.

5.1 Anwendung auf die Berechnung uneigentlicher Integrale

Anwendung 1:

R sei eine rationale Funktion ohne Pole auf der reellen Achse, die bei ∞ mindestens von der Ordnung 2 verschwindet (d. h. $R(1/z)$ hat in 0 eine Nullstelle der Ordnung ≥ 2). Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\operatorname{Im}\zeta>0} \operatorname{res}_\zeta R.$$

Beweis: Seien $r > 0$ und $\alpha_r(t) := r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi t}$, $0 \leq t \leq 1$.
Mit dem in Beispiel 4.17 bereits benutzten Prinzip gilt

$$\int_{-r}^{r} R(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\alpha_r} R(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\operatorname{Im}\zeta>0} \operatorname{res}_\zeta R$$

Was zu zeigen bleibt, ist dass das Integral über α_r gegen Null konvergiert für $r \to \infty$.
Es gilt

$$\Big| \int_{\alpha_r} R(z)\,\mathrm{d}z \Big| \leq L(\alpha_r) \max_{|z|=r} |R(z)| = r\pi \max_{|z|=r} |R(z)| \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

da nach Voraussetzung ein r_0 existiert mit $|R(z)| \leq c/r^2$ für $|z| = r$ und $r \geq r_0$.
□

Bemerkung: Die Aussage lässt sich verallgemeinern auf den Fall, dass R auf einer Umgebung von $\overline{H} = \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Im}z \geq 0\}$ holomorph ist bis auf abzählbar viele isolierte Singularitäten, von denen keine auf $\mathbb{R}$ liegen, und dass eine Folge $r_n \to \infty$ existiert mit $|R(z)| \leq c r_n^{-(1+\varepsilon)}$ für $z \in \overline{H}$ mit $|z| = r_n$ (n unabhängig von c und z).

Beispiel 5.1 Zu berechnen ist das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{x+\mathrm{i}}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Dazu definieren wir eine geeignete Wurzel von i, nämlich $\sqrt{\mathrm{i}} := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$, und berechnen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{x+\mathrm{i}}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{res}_{\mathrm{i}}\Big(\frac{\sqrt{z+\mathrm{i}}}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}\Big) = 2\pi\mathrm{i}\frac{\sqrt{2\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}} = \pi(1+\mathrm{i})$$

Anwendung 2

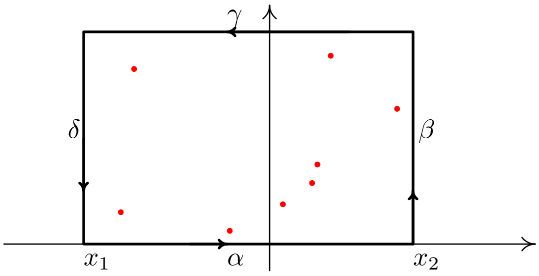
Sei R wie in Anwendung 1, und R habe in ∞ eine doppelte Nullstelle. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\mathrm{Im}\zeta>0} \mathrm{res}_\zeta[R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}]$$

Der Beweis ist analog zu oben; zusätzlich geht ein, dass $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}| \leq 1$ für $\mathrm{Im}z \geq 0$.

Anwendung 2a

Die Nullstelle von R bei ∞ braucht nur einfach zu sein. Denn: sei $x_1 < 0 < x_2$, und sei $y > 0$ groß genug, dass die Pole von R im Rechteck mit den Ecken $x_1, x_2, x_2 + \mathrm{i}y, x_1 + \mathrm{i}y$ liegen.



Aus dem Residuensatz folgt

$$\int\limits_{\alpha\beta\gamma\delta} R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\mathrm{Im}\zeta>0}\mathrm{res}_\zeta R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$$

Offensichtlich entspricht das reelle Integral von x_1 bis x_2 dem Integral über α. Was wir zu zeigen haben, ist dass die Integrale über β, γ, δ verschwinden.

$$\left|\int_\beta R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\,\mathrm{d}z\right| \overset{z=x_2+\mathrm{i}s}{=} \left|\mathrm{i}\int_0^y R(x_2+\mathrm{i}s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_2-s}\,\mathrm{d}s\right| \le \underbrace{\sup_{|z|\ge x_2}|R(z)|}_{\xrightarrow{x_2\to\infty}0}\underbrace{\int_0^y \mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s}_{\le 1}.$$

Das Integral über δ wird analog abgeschätzt.
Bleibt noch das Integral über γ:

$$\left|\int_\gamma R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\,\mathrm{d}z\right| \le (x_2-x_1)\mathrm{e}^{-y}\sup_{|z|\ge y}|R(z)| \xrightarrow{y\to\infty} 0.$$

Beispiel 5.2

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\cos x}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &\overset{(\star)}{=} -\pi\mathrm{Im}\,\mathrm{res}_{\mathrm{i}a}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z+\mathrm{i}a)(z-\mathrm{i}a)} = -\pi\mathrm{Im}\frac{\mathrm{e}^{-a}}{2\mathrm{i}a}\\ &= \frac{\pi}{2a}\mathrm{e}^{-a}\end{aligned}$$

In Schritt $(\star)$ ging neben dem Residuensatz ein, dass für $z = x+\mathrm{i}y$ gilt $\mathrm{Re}(\mathrm{i}z) = -\mathrm{Im}z$.

Bemerkung: Es reicht in Anwendung 2 schon die Bedingung, dass $R : \overline{H} \to \mathbb{C}$ holomorph ist bis auf endlich viele isolierte Singularitäten, von denen keine auf $\mathbb{R}$ liegt, und $\lim_{z\to\infty} R(z) = 0$.

Beispiel 5.3 Wir wollen zeigen, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{(x+\mathrm{i})\sqrt{x-\mathrm{i}}} = \frac{\pi}{\mathrm{e}}(1-\mathrm{i}).$$

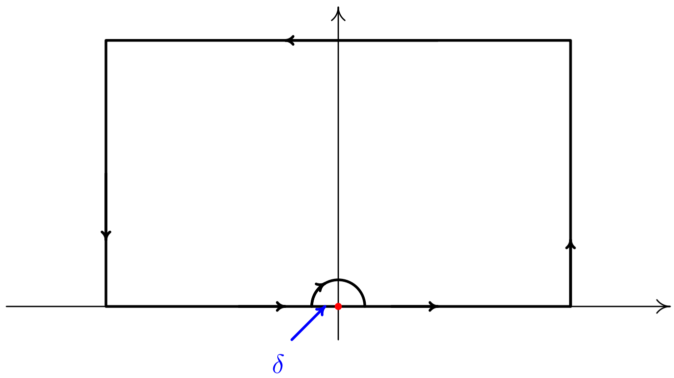
Wir setzen bei der Variablentransformation $\sqrt{-\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}$. Es ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{(x+\mathrm{i})\sqrt{x-\mathrm{i}}} = -2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{res}_{-\mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{(z+\mathrm{i})\sqrt{z-\mathrm{i}}} = -2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{-1}\frac{1}{\sqrt{-2\mathrm{i}}} = \frac{\pi}{\mathrm{e}}(1-\mathrm{i}).$$

Funktionen, die keine Singularitäten auf der reellen Achse besitzen, lassen sich also mit dem Residuenkalkül elegant integrieren. Etwas anders sieht die Sache aber bei der Funktion $\frac{\sin x}{x}$ aus; auch diese Funktion ist vom Typ wie in Anwendung 2a, denn nach den EULERschen Formeln ist

$$\frac{\sin x}{x} = \underbrace{\frac{1}{2x}}_{R(x)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}),$$

aber die Funktion $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}/x$ hat im Nullpunkt einen Pol erster Ordnung.
Als Lösung bietet sich an, über die folgende Kurve zu integrieren:



Definition 5.4 *Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ stetig, und sei $\delta > 0$. Ferner existieren die Integrale*

$$\int_{-\infty}^{a-\delta} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \textit{und} \quad \int_{a-\delta}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Falls der Grenzwert

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\Big(\int_{-\infty}^{a-\delta} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a-\delta}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\Big)$$

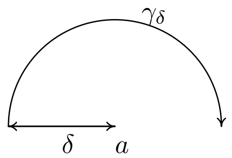
existiert, so heißt er (Cauchyscher) Hauptwert (HW) *des Integrals von f von $-\infty$ bis ∞. Wir schreiben kurz*[1]

$$HW \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ist f an endlich vielen Stellen $a_1, \ldots, a_n$ nicht definiert, definiert man den Hauptwert analog.

Bemerkung: f habe bei a einen einfachen Pol, und für $\delta > 0$ sei $\gamma_\delta(t) := a + \delta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(1-t)}$, $0 \le t \le 1$. Dann gilt

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_\delta} f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\mathrm{res}_a f$$



Beweis: Sei

$$f(z) = \frac{c-1}{z-a} + g(z), \quad g \text{ in } a \text{ holomorph.}$$

Es folgt

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_\delta} f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{c-1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_\delta} \frac{\mathrm{d}z}{z-a} + \underbrace{\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_\delta} g(z)\,\mathrm{d}z}_{\longrightarrow 0\ (\delta \to 0)}.$$

Berechnen wir daher das erste Integral:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_\delta} \frac{\mathrm{d}z}{z-a} &= -\pi\mathrm{i} \int_0^1 \frac{1}{\delta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(1-t)}} \delta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(1-t)} = -\pi\mathrm{i} \\ \Longrightarrow \quad & \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_\delta} f(z)\,\mathrm{d}z \xrightarrow{\delta \to 0} \frac{1}{2}\mathrm{res}_a f \end{aligned}$$

□

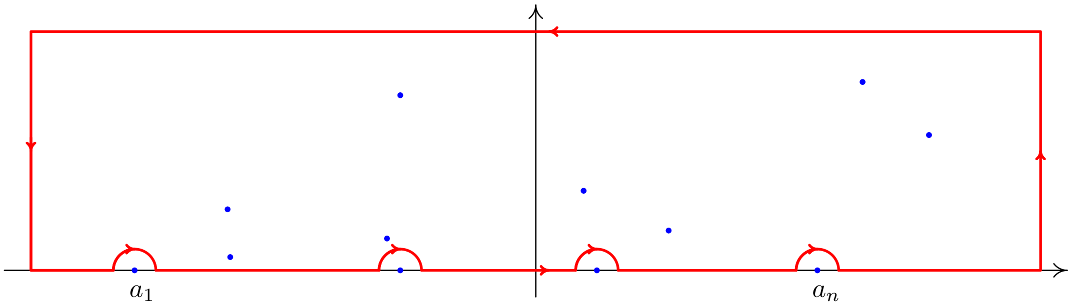
[1] In der englischsprachigen Literatur hat sich der Begriff P.V.$\int_{-\infty}^{\infty} f$ eingebürgert. „P.V.“ steht für „Principal Value“.

Anwendung 2b

Hat die rationale Funktion R bei ∞ eine einfache Nullstelle und auf der reellen Achse keine Pole außer den einfachen Polstellen $a_1 < \ldots < a_n$, dann gilt

$$HW \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\mathrm{Im}\zeta>0} \mathrm{res}_\zeta\big(R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\big) + \pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}_{a_k}\big(R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\big).$$

Beweis: Wir integrieren über die folgende Kurve:



□

Wir können also auf elegante Art errechnen:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\Big(HW\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x\Big)\\ &= \mathrm{Im}\big(\pi\mathrm{i}\,\mathrm{res}_0\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\big) = \mathrm{Im}(\pi\mathrm{i}) = \pi\end{aligned}$$

Anwendung 3

Sei $0 < a < 1$. R sei eine rationale Funktion, die in ∞ mindestens von der Ordnung 2 verschwindet, bei 0 holomorph ist oder einen Pol der Ordnung 1 hat und keine Pole auf der positiven reellen Achse.
Unsere Ziel ist die Berechnung des uneigentlichen Integrals

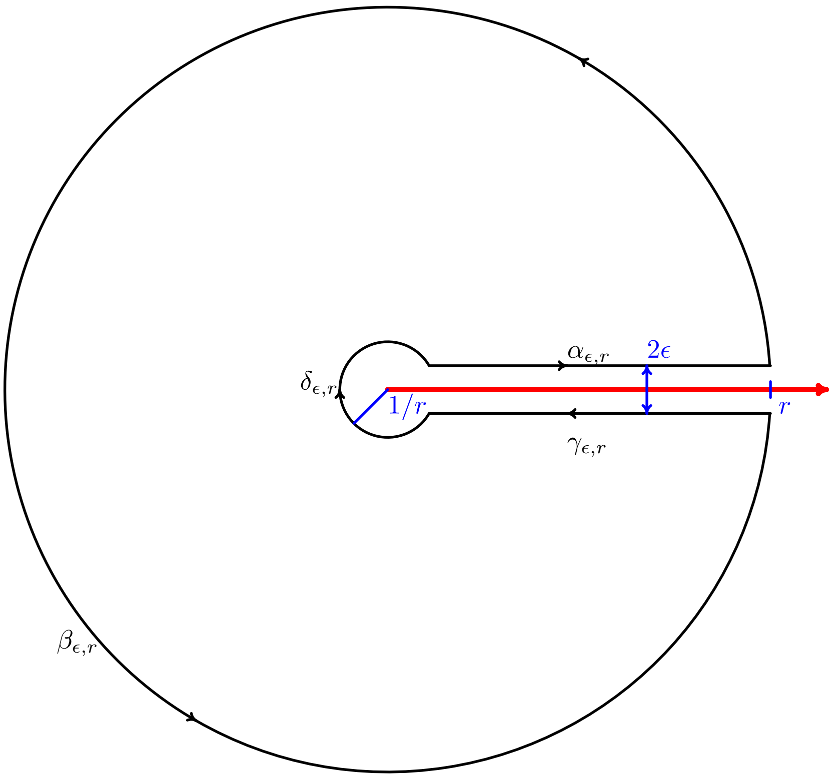
$$\int_0^\infty x^a R(x)\,\mathrm{d}x.$$

Wir setzen $G := \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^+$. Zu $z \in G$ existieren eindeutige $r > 0$, $0 < \theta < 2\pi$, so dass $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Wir definieren daher:

Definition 5.5 *Der komplexe Logarithmus wird definiert durch* $\ln : G \to \mathbb{C}$, $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mapsto \ln r + \mathrm{i}\theta$ *mit dem reellen Logarithmus auf der rechten Seite.*

Dies ist die holomorphe Umkehrabbildung der Exponentialfunktion exp : $\{w \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} w \in (0, 2\pi)\}$.

Um zu der Berechnung des Integrals zurückzukommen:
Wir integrieren über den folgenden Weg:



Hierbei sei ε hinreichend klein, r hinreichend groß.
Es gilt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\alpha_{\varepsilon,r}} z^a R(z)\,\mathrm{d}z = \int_{1/r}^{r} x^a R(x)\,\mathrm{d}x$$

sowie

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_{\varepsilon,r}} z^a R(z)\,\mathrm{d}z = \left(\int_{1/r}^{r} x^a R(x)\,\mathrm{d}x \right) \cdot \left(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} a} \right),$$

denn

$$\lim_{y \downarrow 0} (x - y)^a = \lim_{y \downarrow 0} \mathrm{e}^{a \ln(x - \mathrm{i}y)} = x^a \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} a}$$

Die Integrale über die Kreisabschnitte können wir folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\beta_{\varepsilon,r}} z^a R(z)\,\mathrm{d}z\Big| &\leq 2\pi r c r^{a-2} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ für alle } \varepsilon > 0,\\ \Big|\int_{\delta_{\varepsilon,r}} z^a R(z)\,\mathrm{d}z\Big| &\leq 2\pi\frac{1}{r}c\Big(\frac{1}{r}\Big)^a r \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ für alle } \varepsilon > 0;\end{aligned}$$

hierbei ist $c = \max_{z\in\Gamma} R(z)$ ($\Gamma = \beta_{\varepsilon,r}$ bzw. $\Gamma = \delta_{\varepsilon,r}$). Ferner haben wir in der ersten Abschätzung davon Gebrauch gemacht, dass R im Unendlichen mit der Ordnung ≥ 2 verschwindet.
Zusammengefasst ist also

$$(1-\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}a})\int_0^\infty x^a R(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty,\varepsilon\to 0}\int_{\alpha\beta\gamma\delta} z^a R(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{z\in G}\mathrm{res}_z(z^a R(z)).$$

Beispiel 5.6 Sei $0 < a < 1$. Es ist

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x^a - 1}{x+1}\,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty \frac{x^a}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x\\ &\overset{(\star)}{=} \frac{2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi a}}{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}a}-1} = \frac{2\pi\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi a}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi a}} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}.\end{aligned}$$

In Schritt $(\star)$ haben wir ausgenutzt, dass $z = -1$ der einzige Pol der Funktion $z^a/z(z+1)$ in G ist. Damit gilt:

$$\mathrm{res}_{-1}\frac{z^a}{z(z+1)} = \lim_{z\to -1}\frac{z^a}{z} = -(-1)^a = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi a}.$$

Anwendung 4

R sei eine rationale Funktion ohne Pole auf dem Rand des Einheitskreises. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta &= \int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}\theta\\ &\overset{(\star)}{=} -\mathrm{i}\int_{\kappa(1,0)} \underbrace{R\Big(\frac{1}{2}\big(z+\frac{1}{z}\big),\frac{1}{2\mathrm{i}}\big(z-\frac{1}{z}\big)\Big)\frac{1}{z}}_{=:Q}\,\mathrm{d}z\\ &= 2\pi\sum_{|\zeta|<1}\mathrm{res}_\zeta Q.\end{aligned}$$

Im Schritt $(\star)$ haben wir dabei die Parametertransformation $z := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ vorgenommen; es ist dann

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\big(z+\frac{1}{z}\big),\quad \sin\theta = \frac{1}{2\mathrm{i}}\big(z-\frac{1}{z}\big).$$