Übungsblatt 9

Funktionentheorie I SoSe 2019

05.06.2019

Aufgabe 1

Es sei Q ein offenes achsenparalleles Rechteck in $\mathbb{C}$ mit Randzyklus

$$\Gamma = \overrightarrow{z_1 z_2} + \overrightarrow{z_2 z_3} + \overrightarrow{z_3 z_4} + \overrightarrow{z_4 z_1},$$

wobei die z_j die geeignet numerierten Eckpunkte von Q sind und $\overrightarrow{z_i z_j}$ die Verbindungsstrecken der benachbarten Eckpunkte.
Zeigen Sie:

$$n(\Gamma, z) = \begin{cases} 1 & \text{falls } z \in Q \\ 0 & \text{falls } z \in \mathbb{C} \setminus \overline{Q}. \end{cases}$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Residuen der folgenden Funktionen in all ihren Singularitäten.

(a) $\dfrac{z^3}{(1+z)^3}$ (b) $\dfrac{e^z}{(z-1)^2}$

(c) $\dfrac{1}{(z-1)^2\,(z^2+1)}$ (d) $\dfrac{1}{\sin(\pi z)}$

Aufgabe 3

Berechnen Sie die folgenden reellen Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$ (b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x \sin(x)\, dx}{a^2+x^2}$ $(a > 0)$

(c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\, dx}{16+x^2}$ (d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)\, dx}{(x^2+a^2)^2}$ $(a > 0)$

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{2n \sin(\frac{\pi}{2n})}.$$
