Übungen zur Vektoranalysis WS 19/20

Blatt 5

8. *Sphärische Koordinaten auf* S^{n-1}. Wir verwenden die Bezeichnungen wie bei den Polarkooordinaten in 9.3.I. Man zeige: Die „geschlitzte Sphäre“ $\mathrm{S}_-^{n-1} := \mathrm{S}^{n-1} \setminus \{x \in \mathrm{S}^{n-1} \mid x_1 \le 0, x_2 = 0\}$ besitzt die reguläre Parameterdarstellung
$$\gamma\colon \mathit{\Pi} \to \mathrm{S}_-^{n-1}, \quad \gamma(\varphi) := P_n(1, \varphi).$$
Ferner: Eine Funktion $f\colon \mathrm{S}^{n-1} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist genau dann über S^{n-1} integrierbar, wenn $(f \circ \gamma) \cdot C_n$ über $\mathit{\Pi}$ integrierbar ist, und dann gilt
$$\int_{\mathrm{S}^{n-1}} f \,\mathrm{d}S = \int_{\mathit{\Pi}} f\big(P_n(1, \varphi)\big) C_n(\varphi) \,\mathrm{d}\varphi.$$

9. Es seien X und Y d-dimensionale Untermannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^n$, V und W Umgebungen von X bzw. Y, und es sei $T\colon V \to W$ ein konformer Diffeomorphismus mit $T(X) = Y$. Man zeige: Eine Funktion f auf Y ist genau dann über Y integrierbar, wenn $(f \circ T) \cdot |\det T'|^{d/n}$ über X integrierbar ist; gegebenenfalls gilt
$$\int_X \big(f \circ T\big) \cdot |\det T'|^{d/n} \,\mathrm{d}S = \int_Y f \,\mathrm{d}S.$$
Wie lautet diese Formel für eine Streckung $x \mapsto \alpha x,\ \alpha \in \mathbb{R}^*$, wie für eine Rotation $x \mapsto Ax,\ A$ eine orthogonale Matrix ?

Nutze Königsberger II