Übungen zur Vektoranalysis WS 19/20

Blatt 6

10. Für beliebiges $y \in \mathbb{R}^n,\ n \geq 2$, gilt

$$\int_{\mathrm{S}^{n-1}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle x,y\rangle}\,\mathrm{d}S(x) = 2\pi^{n/2}\left(\frac{\|y\|}{2}\right)^{-n/2+1} J_{n/2-1}\big(\|y\|\big),$$

wobei J_α die Besselfunktion der Ordnung α ist; siehe 8.6 Aufgabe 9.

Hinweis: Nach Aufgabe 9 genügt es, spezielle y zu betrachten.

11. Es sei f eine über $\mathbb{R}^n$ integrierbare Funktion. Man zeige: f ist für fast alle $r > 0$ über $r\mathrm{S}^{n-1}$ integrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}_+}\left(\int_{\mathrm{S}^{n-1}} f(rx)\,\mathrm{d}S\right) r^{n-1}\,\mathrm{d}r.$$

Damit und mit Hilfe der Formel in Aufgabe 10 reduziere man die Berechnung der Fourier-Transformierten $\widehat{f}$ einer rotationssymmetrischen Funktion $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n),\ f(x) = F(\|x\|)$, auf eine Integration über $\mathbb{R}_+$. Vgl. auch 10.4 Aufgabe 9b.

Nutze Königsberger II