Übungen zur Vektoranalysis WS 19/20

Blatt 10

Aufgaben

10.1. In einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^3$ seien drei Vektorfelder $a, b, c : U \to \mathbb{R}^3$ gegeben. Man zeige

$$
\begin{aligned}
&(a \cdot d\vec{s}) \wedge (b \cdot d\vec{s}) = (a \times b) \cdot d\vec{S}, \\
&(a \cdot d\vec{s}) \wedge (b \cdot d\vec{S}) = \langle a, b \rangle dV, \\
&(a \cdot d\vec{s}) \wedge (b \cdot d\vec{s}) \wedge (c \cdot d\vec{s}) = \det(a, b, c) dV.
\end{aligned}
$$

Dabei ist

$$a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

das Vektorprodukt von a mit b.

10.2. Im $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ seien die Koordinaten mit x_1, x_2, x_3, t bezeichnet. Sei

$$
\begin{aligned}
d\vec{s} &= (dx_1, dx_2, dx_3), \\
d\vec{S} &= (dx_2 \wedge dx_3, dx_3 \wedge dx_1, dx_1 \wedge dx_2), \\
dV &= dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.
\end{aligned}
$$

Man zeige, dass sich Differentialformen der Ordnung 0,1,2,3,4 in einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^4$ wie folgt schreiben lassen:

$$\omega_0 = f, \quad \omega_1 = a \cdot d\vec{s} + f dt, \quad \omega_2 = a \cdot d\vec{s} \wedge dt + b \cdot d\vec{S},$$

$$\omega_3 = a \cdot d\vec{S} \wedge dt + f dV, \quad \omega_4 = f dV \wedge dt,$$

mit zeitabhängigen Vektorfeldern

$$a, b : U \to \mathbb{R}^3$$

und zeitabhängigen Skalarfeldern

$$f : U \to \mathbb{R}.$$

Man berechne die äußeren Ableitungen von ω_j in dieser Schreibweise und ziehe Folgerungen aus $d \circ d = 0$ und dem Poincaréschen Lemma.