### Aufgabe 1

Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass $\overline{B}(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}$ für $x \in X$ und $r > 0$ abgeschlossen ist.

### Aufgabe 2

Sei $d$ eine Metrik auf $X$ mit der Eigenschaft $d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}$ für alle $x, y, z \in X$. Zeigen Sie, dass dann $B(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$ für jedes $x \in X$ und $r > 0$ sowohl offen als auch abgeschlossen ist.

### Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie, dass ein topologischer Raum $(X, O_1)$ genau dann diskret ist, falls für jeden topologischen Raum $(Y, O_2)$ jede Abbildung $f : X \to Y$ stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass ein topologischer Raum $(Y, O_2)$ genau dann indiskret ist, falls für jeden topologischen Raum $(X, O_l)$ jede Abbildung $f : X \to Y$ stetig ist.

### Aufgabe 4

Die linear geordnete Menge $(X, \leq)$ sei mit der Ordnungstopologie versehen. Zeigen Sie: Für $a, b \in X$ mit $a < b$ gibt es Umgebungen $U$ von $a$ und $V$ von $b$, sodass für alle $x \in U$ und $y \in V$ stets $x < y$ gilt.