Fourier-Reihen

Die Botschaft des Tages:

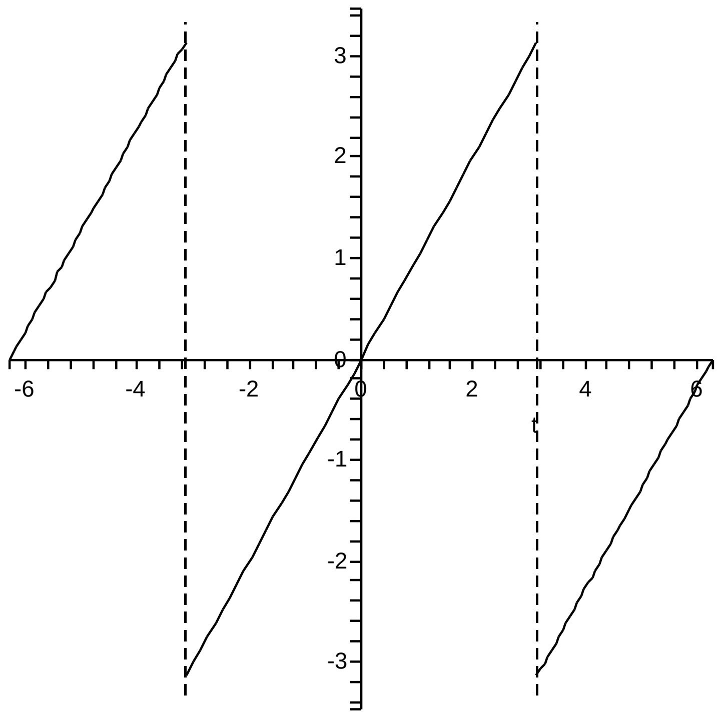
Die Botschaft des Tages:

Man kann praktisch alle periodischen Funktionen
als Überlagerung von Sinus- und Cosinusschwingungen darstellen

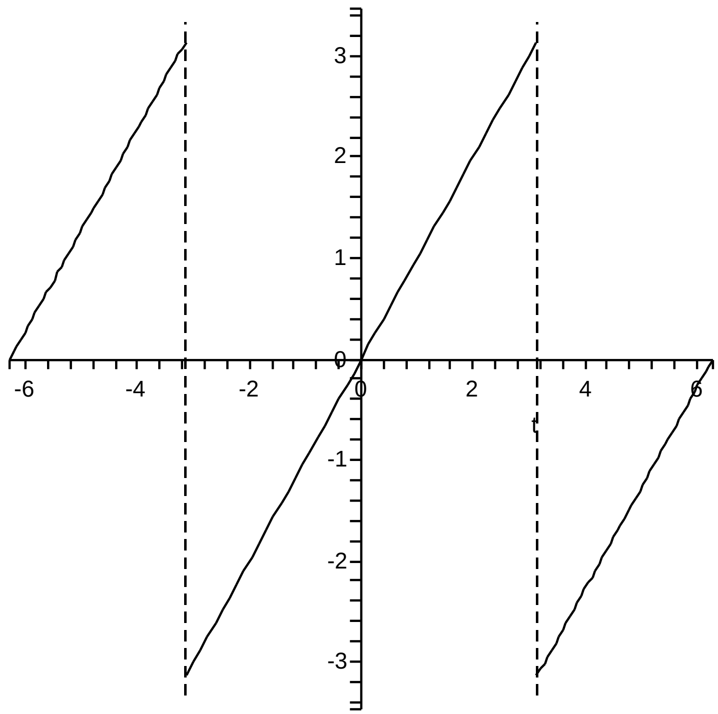
Joseph Fourier (1768-1830)

Betrachten wir eine Sägezahnfunktion:

Betrachten wir eine Sägezahnfunktion:



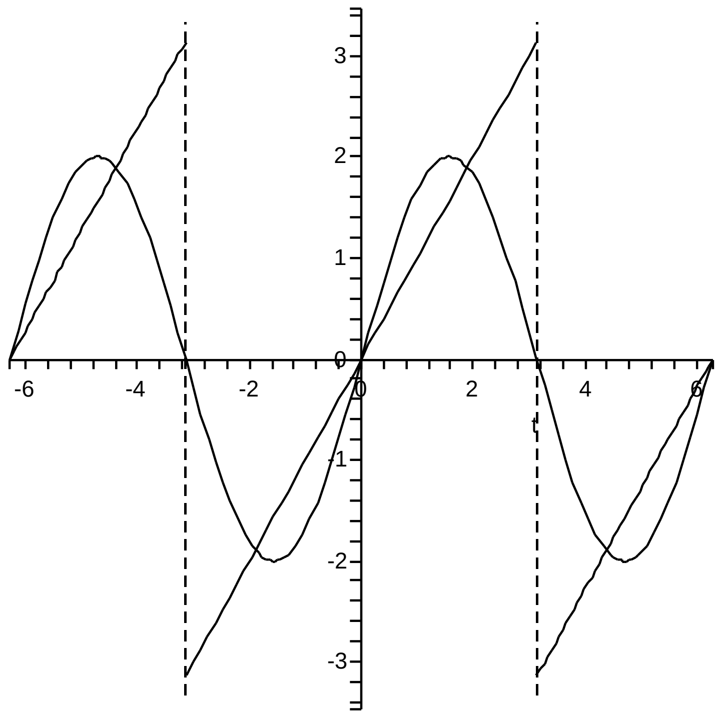
Betrachten wir eine Sägezahnfunktion:



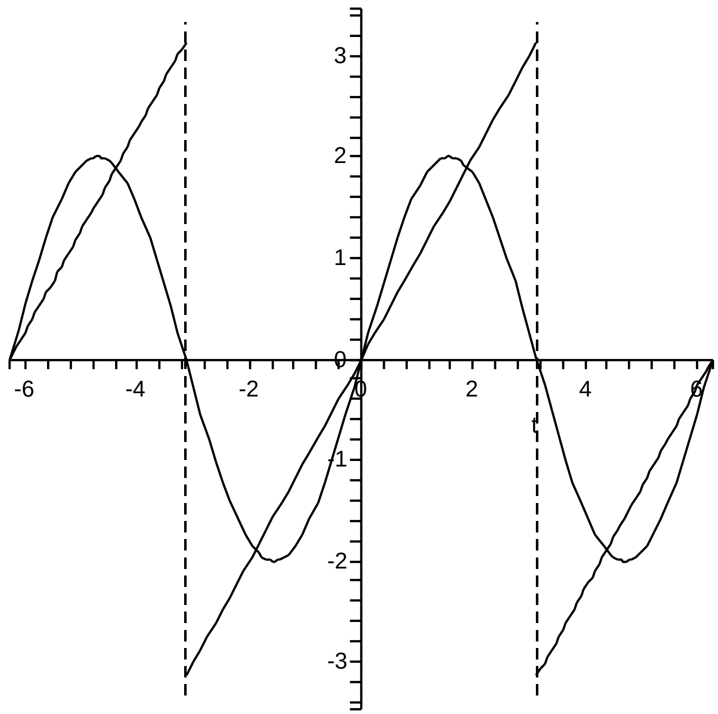
Wie kann man sie als Überlagerung von Sinusschwingungen darstellen?

Hier ist eine erste Annäherung

Hier ist eine erste Annäherung



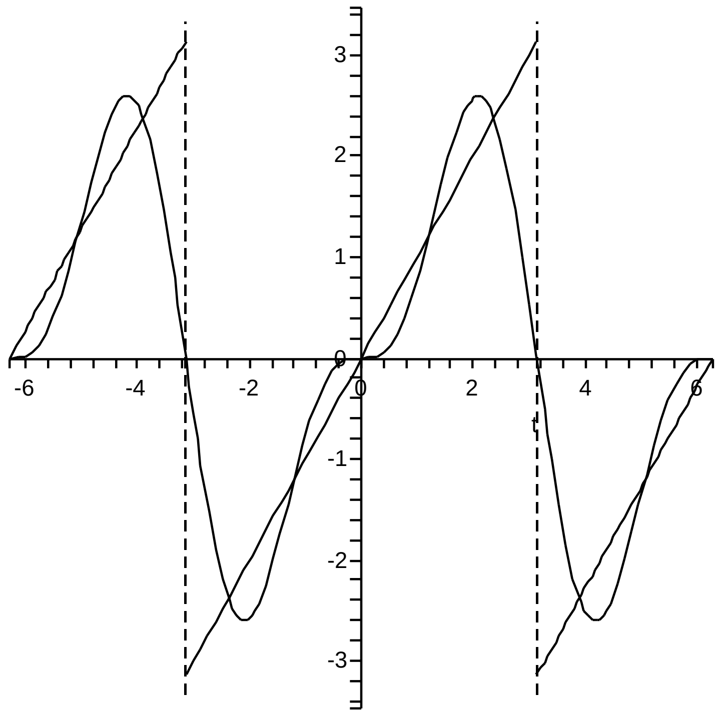
Hier ist eine erste Annäherung



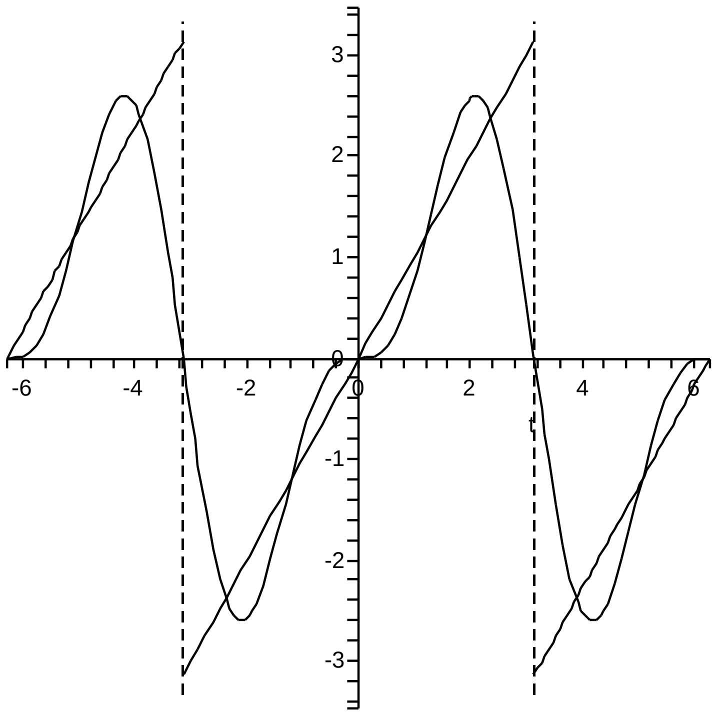
mit einer einzigen Sinusschwingung.

Und hier eine zweite

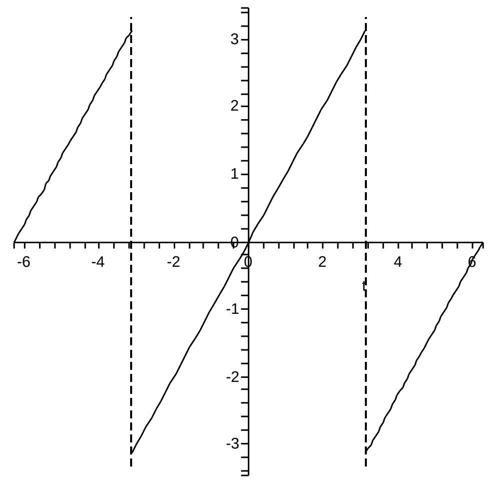
Und hier eine zweite



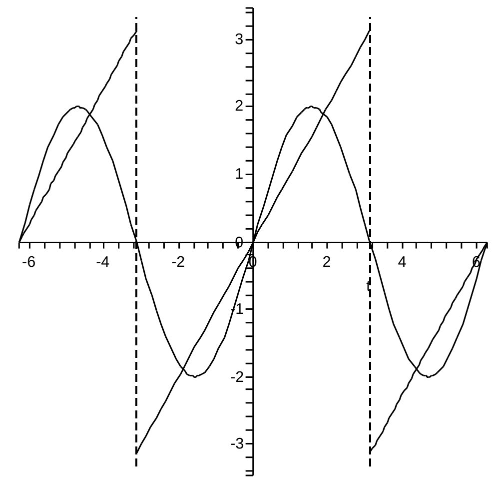
Und hier eine zweite



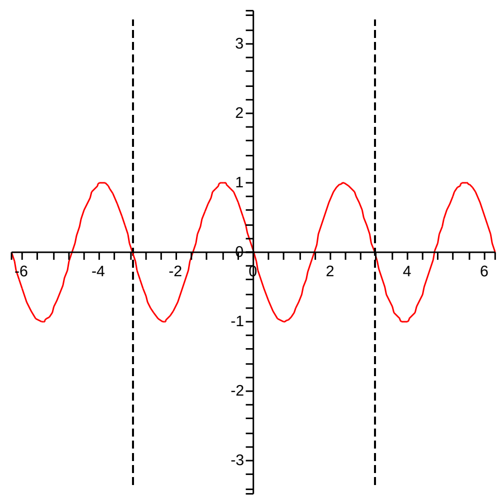
mit einer Überlagerung von zwei Sinusschwingungen.



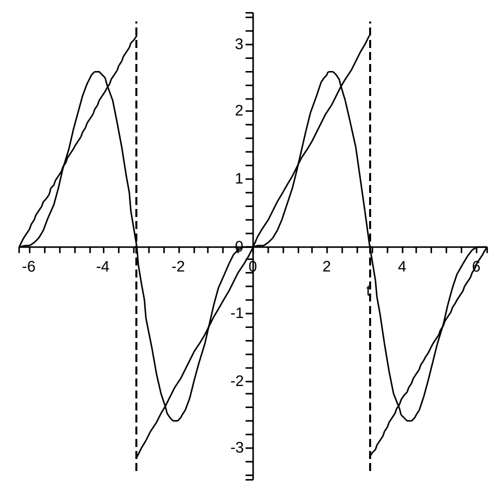
eine Schwingung



+ eine zweite

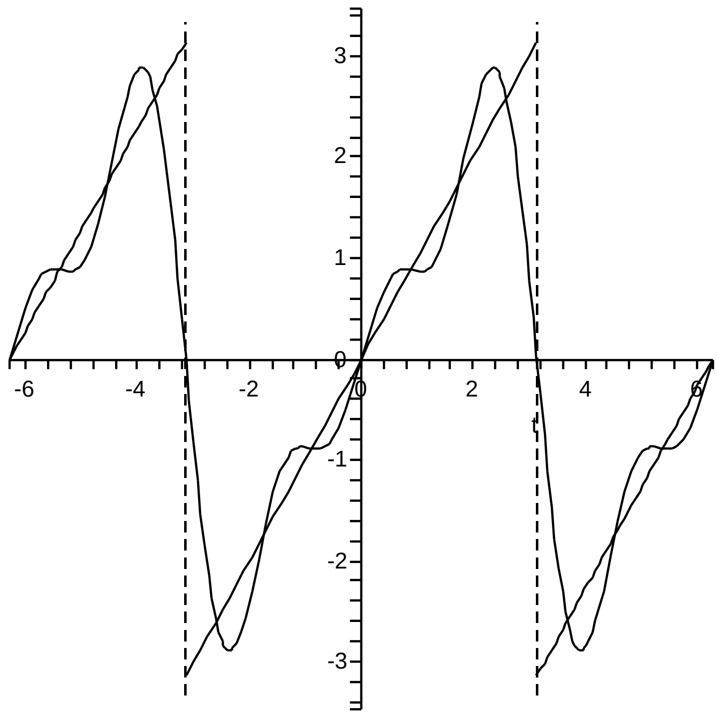


= die Überlagerung von zweien

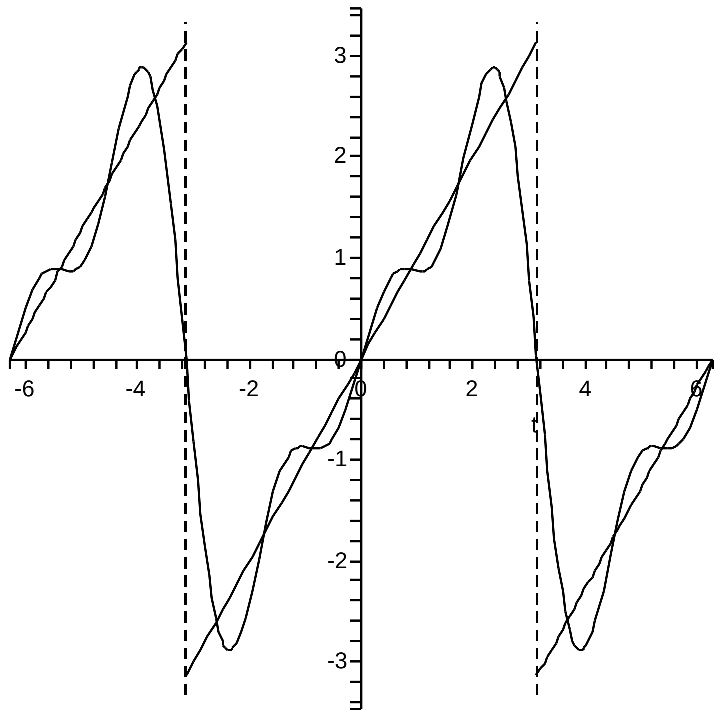


Und hier eine dritte Näherung

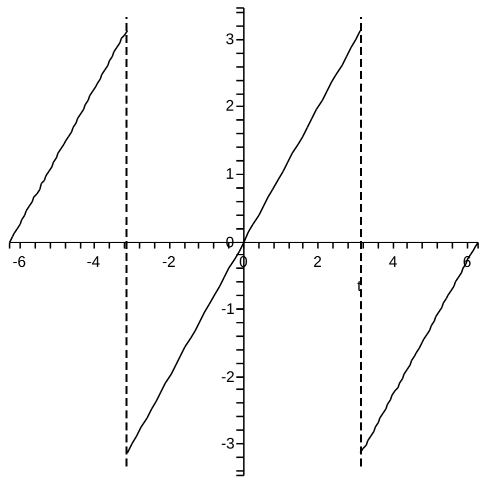
Und hier eine dritte Näherung



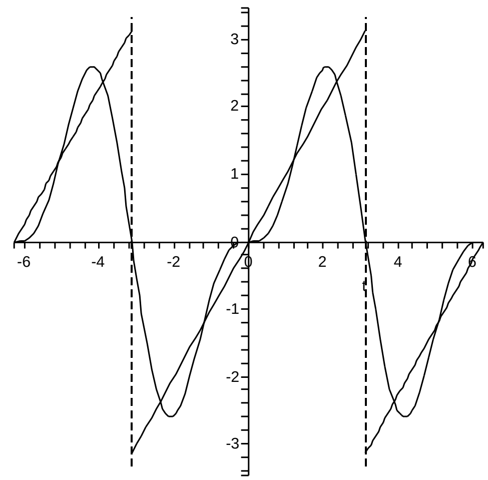
Und hier eine dritte Näherung



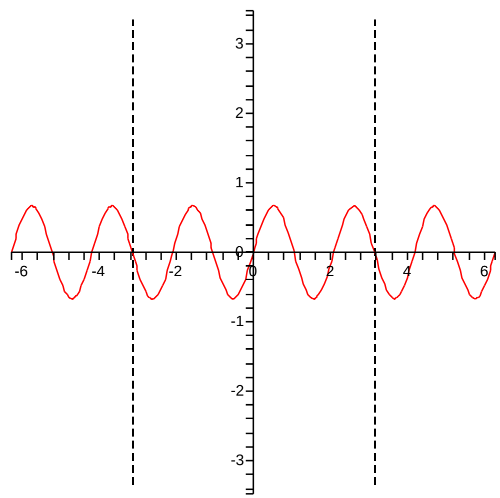
mit einer Überlagerung von drei Sinusschwingungen.



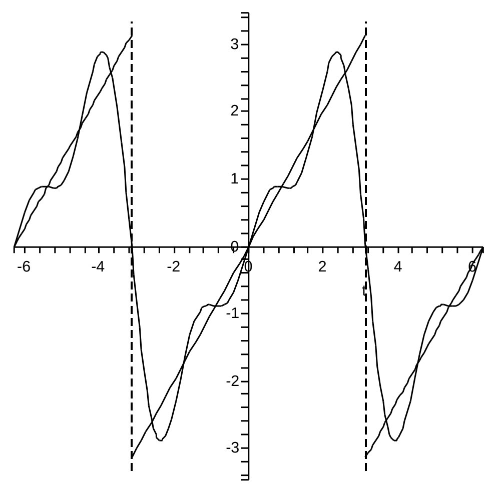
die Überlagerung von zweien



+ eine dritte

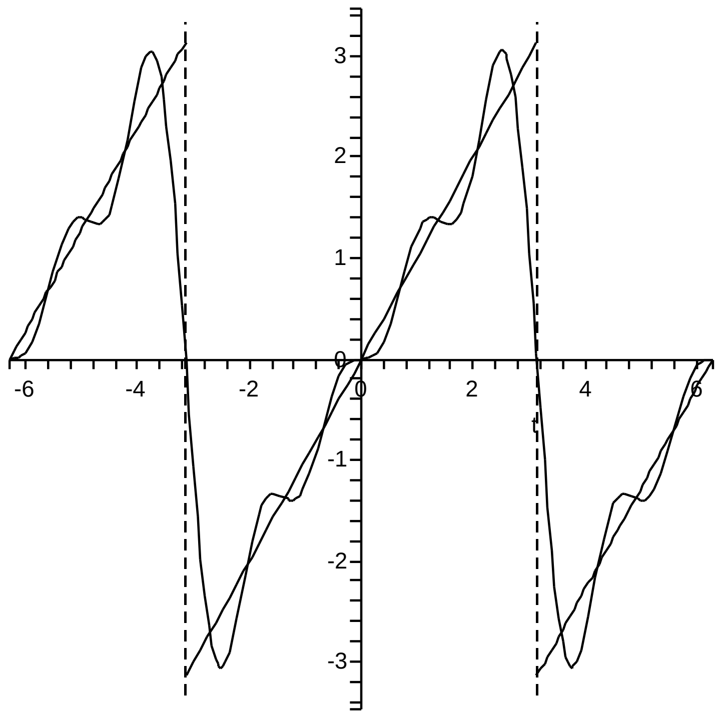


= die Überlagerung von dreien

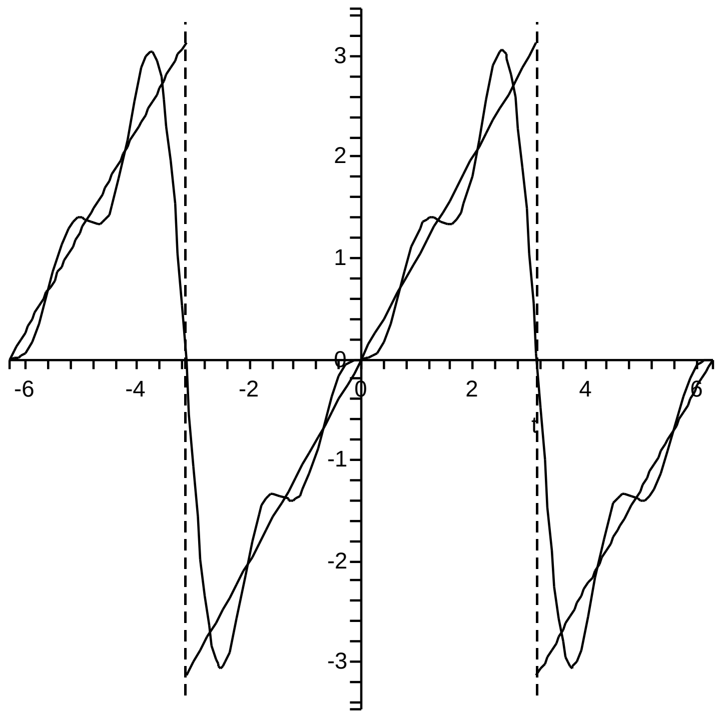


.... eine vierte Näherung

.... eine vierte Näherung



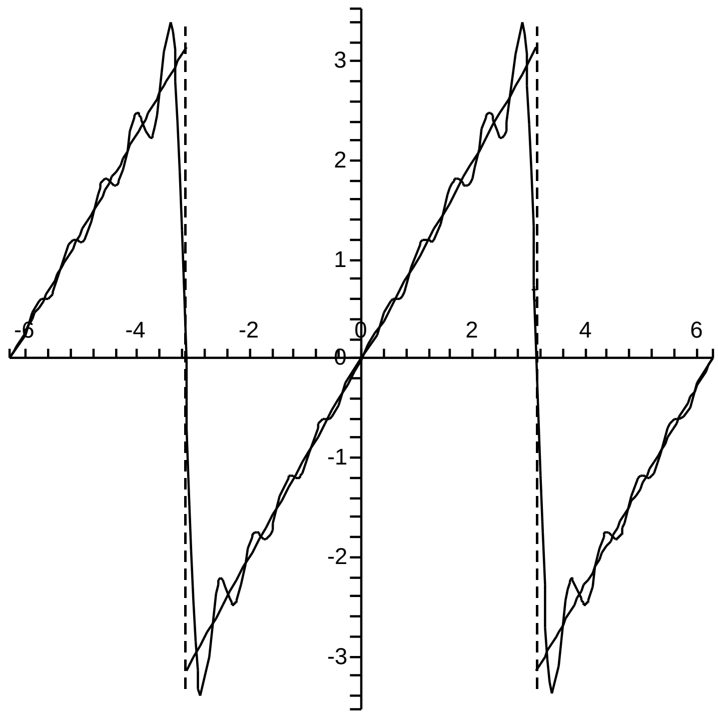
.... eine vierte Näherung



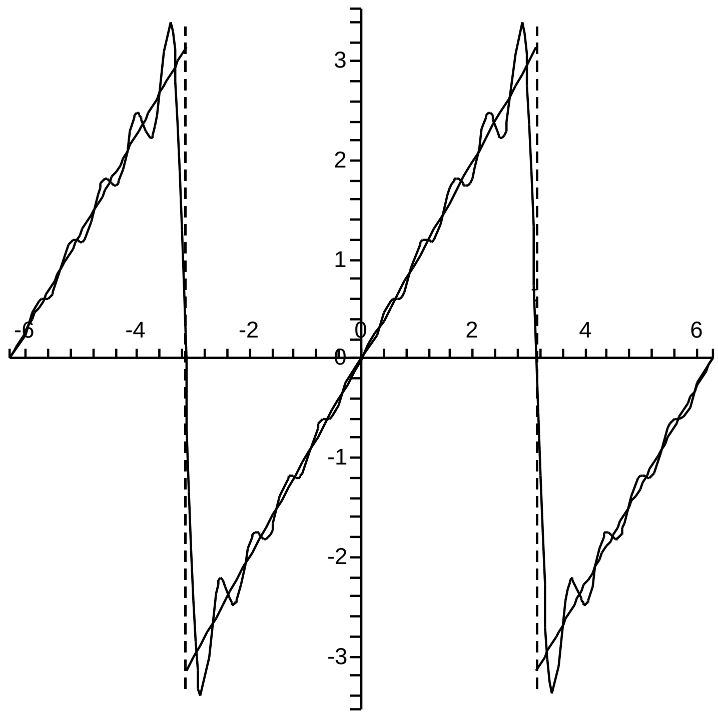
mit einer Überlagerung von vier Sinusschwingungen.

... und eine zehnte Näherung

... und eine zehnte Näherung



... und eine zehnte Näherung



mit einer Überlagerung von zehn Sinusschwingungen.

Was geht hier ab?

Was geht hier ab?

Die zu approximierende Sägezahnfunktion war

Was geht hier ab?

Die zu approximierende Sägezahnfunktion war

$$\begin{aligned} f : [-\pi, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ t &\longmapsto t, \end{aligned}$$

Was geht hier ab?

Die zu approximierende Sägezahnfunktion war

$$\begin{aligned} f : [-\pi, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ t &\longmapsto t, \end{aligned}$$

periodisch fortgesetzt auf ganz $\mathbb{R}$.

Was geht hier ab?

Die zu approximierende Sägezahnfunktion war

$$\begin{aligned} f : [-\pi, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ t &\longmapsto t, \end{aligned}$$

periodisch fortgesetzt auf ganz $\mathbb{R}$.

Wir werden einen Raum von Funktionen $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$

Wir werden einen Raum von Funktionen $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$
mit einem Skalarprodukt
und dadurch mit einer Geometrie ausstatten.

Wir werden einen Raum von Funktionen $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$
mit einem Skalarprodukt
und dadurch mit einer Geometrie ausstatten.

Warum $\mathbb{C}$ und nicht $\mathbb{R}$?

Wir werden einen Raum von Funktionen $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$
mit einem Skalarprodukt
und dadurch mit einer Geometrie ausstatten.

Warum $\mathbb{C}$ und nicht $\mathbb{R}$?

Weil man mit Sinus und Cosinus
besonders schön über die Euler-Formel rechnen kann!

Dazu zwei Vorbemerkung:

Dazu zwei Vorbemerkung:

1. Das Integral $\int_a^b \phi(t)dt$, $\quad a < b \in \mathbb{R}$
einer komplexwertigen Funktion $\phi(t) = g(t) + i\,h(t)$
bekommt man

Dazu zwei Vorbemerkung:

1. Das Integral $\int_a^b \phi(t)dt$, $\quad a < b \in \mathbb{R}$

einer komplexwertigen Funktion $\phi(t) = g(t) + i\,h(t)$

bekommt man

- über Realteil und Imaginärteil gesondert:

$$\int_a^b \phi(t)dt = \int_a^b g(t)dt + i \int_a^b h(t)dt$$

Dazu zwei Vorbemerkung:

1. Das Integral $\int_a^b \phi(t)dt$, $\quad a < b \in \mathbb{R}$

einer komplexwertigen Funktion $\phi(t) = g(t) + i\,h(t)$

bekommt man

- über Realteil und Imaginärteil gesondert:

$$\int_a^b \phi(t)dt = \int_a^b g(t)dt + i\int_a^b h(t)dt$$

- oder auch “direkt im Komplexen ” als Grenzwert von $\sum \phi(t)\Delta t$.

Dazu zwei Vorbemerkung:

1. Das Integral $\int_a^b \phi(t)dt$, $\quad a < b \in \mathbb{R}$
einer komplexwertigen Funktion $\phi(t) = g(t) + i\,h(t)$
bekommt man
- über Realteil und Imaginärteil gesondert:
$\int_a^b \phi(t)dt = \int_a^b g(t)dt + i\int_a^b h(t)dt$
- oder auch “direkt im Komplexen ” als Grenzwert von $\sum \phi(t)\Delta t$.

Es gelten die vertrauten Formeln (mit $\mu \in \mathbb{C}$)

Dazu zwei Vorbemerkung:

1. Das Integral $\int_a^b \phi(t)dt$, $\quad a < b \in \mathbb{R}$

einer komplexwertigen Funktion $\phi(t) = g(t) + i\,h(t)$

bekommt man

- über Realteil und Imaginärteil gesondert:

$\int_a^b \phi(t)dt = \int_a^b g(t)dt + i\int_a^b h(t)dt$

- oder auch “direkt im Komplexen ” als Grenzwert von $\sum \phi(t)\Delta t$.

Es gelten die vertrauten Formeln (mit $\mu \in \mathbb{C}$)

$$\frac{d}{dt}e^{\mu\,t} = \mu e^{\mu\,t}$$

Dazu zwei Vorbemerkung:

1. Das Integral $\int_a^b \phi(t)dt$, $\quad a < b \in \mathbb{R}$

einer komplexwertigen Funktion $\phi(t) = g(t) + i\,h(t)$

bekommt man

- über Realteil und Imaginärteil gesondert:

$$\int_a^b \phi(t)dt = \int_a^b g(t)dt + i \int_a^b h(t)dt$$

- oder auch “direkt im Komplexen ” als Grenzwert von $\sum \phi(t)\Delta t$.

Es gelten die vertrauten Formeln (mit $\mu \in \mathbb{C}$)

$$\frac{d}{dt}e^{\mu\, t} = \mu e^{\mu\, t}$$

$$\int_a^b e^{\mu\, t}dt = \frac{1}{\mu}e^{\mu\, t}|_a^b = \frac{1}{\mu}(e^{\mu b} - e^{\mu a}).$$

Für stetige $f, g : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{C}$ setzen wir

$$< f, g > := \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(t) g(t) dt.$$

Für stetige f, g : $[-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{C}$ setzen wir

$$< f, g > := \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(t) g(t) dt.$$

Das erinnert an $< \vec{f}, \vec{g} >= \sum_{j=1}^{n} f_j \, g_j$ für Vektoren $\vec{f}, \vec{g} \in \mathbb{R}^n$

Für stetige $f, g : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{C}$ setzen wir

$$< f, g > := \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(t) g(t) dt.$$

Das erinnert an $< \vec{f}, \vec{g} >= \sum_{j=1}^{n} f_j \, g_j$ für Vektoren $\vec{f}, \vec{g} \in \mathbb{R}^n$

(die Funktionswerte $f(t)$ von f entsprechen
den Koordinaten f_j eines Vektors $\vec{f}$.)

Für stetige $f, g : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{C}$ setzen wir

$$< f, g > := \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(t) g(t) dt.$$

Das erinnert an $< \vec{f}, \vec{g} >= \sum_{j=1}^{n} f_j \, g_j$ für Vektoren $\vec{f}, \vec{g} \in \mathbb{R}^n$

(die Funktionswerte $f(t)$ von f entsprechen den Koordinaten f_j eines Vektors $\vec{f}$.)

Warum steht im Integral $\bar{f}$ und nicht f?

Für stetige $f, g : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{C}$ setzen wir

$$< f, g > := \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(t) g(t) dt.$$

Das erinnert an $< \vec{f}, \vec{g} > = \sum_{j=1}^{n} f_j \, g_j$ für Vektoren $\vec{f}, \vec{g} \in \mathbb{R}^n$

(die Funktionswerte $f(t)$ von f entsprechen den Koordinaten f_j eines Vektors $\vec{f}$.)

Warum steht im Integral $\overline{f}$ und nicht f?

Zur Erinnerung: $\overline{\alpha + i\beta} = \alpha - i\beta$ ist die Komplexkonjugierte der Zahl $\alpha + i\beta$.

Für stetige $f, g : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{C}$ setzen wir

$$< f, g > := \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(t) g(t) dt.$$

Das erinnert an $< \vec{f}, \vec{g} >= \sum_{j=1}^{n} f_j\, g_j$ für Vektoren $\vec{f}, \vec{g} \in \mathbb{R}^n$

(die Funktionswerte $f(t)$ von f entsprechen
den Koordinaten f_j eines Vektors $\vec{f}$.)

Warum steht im Integral $\bar{f}$ und nicht f?

Zur Erinnerung: $\overline{\alpha + i\beta} = \alpha - i\beta$ ist die Komplexkonjugierte der Zahl $\alpha + i\beta$.

$\bar{f}(t) := \overline{f(t)}$ definiert die Komplexkonjugierte der Funktion f.

Für stetige $f, g : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{C}$ setzen wir

$$< f, g > := \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(t) g(t) dt.$$

Das erinnert an $< \vec{f}, \vec{g} >= \sum_{j=1}^{n} f_j \, g_j$ für Vektoren $\vec{f}, \vec{g} \in \mathbb{R}^n$

(die Funktionswerte $f(t)$ von f entsprechen den Koordinaten f_j eines Vektors $\vec{f}$.)

Warum steht im Integral $\bar{f}$ und nicht f?

Zur Erinnerung: $\overline{\alpha + i\beta} = \alpha - i\beta$ ist die Komplexkonjugierte der Zahl $\alpha + i\beta$.

$\bar{f}(t) := \overline{f(t)}$ definiert die Komplexkonjugierte der Funktion f.

Warum also $\bar{f}$ und nicht f?

Für stetige $f, g : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{C}$ setzen wir

$$< f, g > := \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(t) g(t) dt.$$

Das erinnert an $< \vec{f}, \vec{g} >= \sum_{j=1}^{n} f_j \, g_j$ für Vektoren $\vec{f}, \vec{g} \in \mathbb{R}^n$

(die Funktionswerte $f(t)$ von f entsprechen
den Koordinaten f_j eines Vektors $\vec{f}$.)

Warum steht im Integral $\bar{f}$ und nicht f?

Zur Erinnerung: $\overline{\alpha + i\beta} = \alpha - i\beta$ ist die Komplexkonjugierte der Zahl $\alpha + i\beta$.

$\bar{f}(t) := \overline{f(t)}$ definiert die Komplexkonjugierte der Funktion f.

Warum also $\bar{f}$ und nicht f?
Weil damit das “Längenquadrat” $< f, f >$ reell und nichtnegativ ist!

Denn für

$$f(t) = u(t) + iv(t)$$

mit reellwertigen Funktionen $u(t)$ und $v(t)$ hat man

Denn für

$$f(t) = u(t) + iv(t)$$

mit reellwertigen Funktionen $u(t)$ und $v(t)$ hat man

$$\overline{f(t)}f(t) = (u(t) - iv(t))(u(t) + iv(t)) = u^2(t) + v^2(t)$$

Denn für

$$f(t) = u(t) + iv(t)$$

mit reellwertigen Funktionen $u(t)$ und $v(t)$ hat man

$$\overline{f(t)}f(t) = (u(t) - iv(t))(u(t) + iv(t)) = u^2(t) + v^2(t)$$

und damit

Denn für

$$f(t) = u(t) + iv(t)$$

mit reellwertigen Funktionen $u(t)$ und $v(t)$ hat man

$$\overline{f(t)}f(t) = (u(t) - iv(t))(u(t) + iv(t)) = u^2(t) + v^2(t)$$

und damit

$$||f||^2 :=< f, f >= \int_{-\pi}^{\pi} \left(u^2(t) + v^2(t)\right) dt \geq 0.$$

BEISPIEL

Sei $f(t) := e^{it}$. Dann ist

BEISPIEL

Sei $f(t) := e^{it}$. Dann ist

$$< f, f > = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(t) f(t) dt$$

BEISPIEL

Sei $f(t) := e^{it}$. Dann ist

$$< f, f > = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(t) f(t) dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \overline{e^{it}} e^{it} dt$$

BEISPIEL

Sei $f(t) := e^{it}$. Dann ist

$$< f, f > = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(t) f(t) dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \overline{e^{it}} e^{it} dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-it} e^{it} dt$$

BEISPIEL

Sei $f(t) := e^{it}$. Dann ist

$$< f, f > = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(t) f(t) dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \overline{e^{it}} e^{it} dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-it} e^{it} dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} 1 \; dt = 2\pi.$$

BEISPIEL

Sei $f(t) := e^{it}$. Dann ist

$$< f, f > = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(t) f(t) dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \overline{e^{it}} e^{it} dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-it} e^{it} dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} 1 \; dt = 2\pi.$$

Die Funktion e^{it} hat also “Länge” $\sqrt{2\pi}$.

BEISPIEL

Sei $g(x) := 1$ die Funktion, die identisch gleich 1 ist,

BEISPIEL

Sei $g(x) := 1$ die Funktion, die identisch gleich 1 ist, und sei wieder $f(t) := e^{it}$.

BEISPIEL

Sei $g(x) := 1$ die Funktion, die identisch gleich 1 ist, und sei wieder $f(t) := e^{it}$.

$$< f, g > = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(t) g(t) dt$$

BEISPIEL

Sei $g(x) := 1$ die Funktion, die identisch gleich 1 ist, und sei wieder $f(t) := e^{it}$.

$$< f, g > = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(t) g(t) dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \overline{e^{it}} \, 1 \, dt$$

BEISPIEL

Sei $g(x) := 1$ die Funktion, die identisch gleich 1 ist,
und sei wieder $f(t) := e^{it}$.

$$< f, g > = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(t) g(t) dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \overline{e^{it}} \, 1 \, dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-it} dt$$

BEISPIEL

Sei $g(x) := 1$ die Funktion, die identisch gleich 1 ist,
und sei wieder $f(t) := e^{it}$.

$$< f, g > = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(t) g(t) dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \overline{e^{it}}\, 1\, dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-it} dt$$

$$= \frac{1}{-i} e^{-it} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

BEISPIEL

Sei $g(x) := 1$ die Funktion, die identisch gleich 1 ist, und sei wieder $f(t) := e^{it}$.

$$< f, g > = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(t) g(t) dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \overline{e^{it}}\, 1\, dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-it} dt$$

$$= \frac{1}{-i} e^{-it} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Die Funktionen e^{it} und 1 sind also orthogonal.

Die Fourier-Basis:

Die Fourier-Basis:

Wir setzen für $k \in \mathbb{Z}$

Die Fourier-Basis:

Wir setzen für $k \in \mathbb{Z}$

$$e_k(t) := e^{ikt}, \quad -\pi \le t \le \pi.$$

Die Fourier-Basis:

Wir setzen für $k \in \mathbb{Z}$

$$e_k(t) := e^{ikt}, \quad -\pi \leq t \leq \pi.$$

Die $\{e_k\}$ sind paarweise orthogonal, denn für $k \neq \ell$ gilt:

Die Fourier-Basis:

Wir setzen für $k \in \mathbb{Z}$

$$e_k(t) := e^{ikt}, \quad -\pi \leq t \leq \pi.$$

Die $\{e_k\}$ sind paarweise orthogonal, denn für $k \neq \ell$ gilt:

$$< e_k, e_\ell >= \int_{-\pi}^{\pi} \overline{e^{ikt}} e^{i\ell t} dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} e^{i\ell t} dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\ell - k)t} dt$$

Die Fourier-Basis:

Wir setzen für $k \in \mathbb{Z}$

$$e_k(t) := e^{ikt}, \quad -\pi \le t \le \pi.$$

Die $\{e_k\}$ sind paarweise orthogonal, denn für $k \neq \ell$ gilt:

$$< e_k, e_\ell > = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{e^{ikt}} e^{i\ell t} dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} e^{i\ell t} dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\ell - k)t} dt$$

$$= \frac{1}{i(\ell - k)} e^{i(\ell - k)t} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Für $k = \ell$ hat man

Für $k = \ell$ hat man

$$< e_k, e_k >= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} e^{ikt} dt = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dt = 2\pi.$$

Man kann zeigen:

Man kann zeigen:

Jedes $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ mit $||f||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < \infty$

(also insbesondere die stetigen oder auch nur stückweise stetigen $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$)

Man kann zeigen:

Jedes $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ mit $||f||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < \infty$

(also insbesondere die stetigen oder auch nur stückweise stetigen $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$)

lässt sich als Fourierreihe,

Man kann zeigen:

Jedes $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ mit $||f||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < \infty$

(also insbesondere die stetigen oder auch nur stückweise stetigen $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$)

lässt sich als Fourierreihe,

sprich als Grenzwert von Linearkombinationen

Man kann zeigen:

Jedes $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ mit $||f||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < \infty$

(also insbesondere die stetigen oder auch nur stückweise stetigen $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$)

lässt sich als Fourierreihe,
sprich als Grenzwert von Linearkombinationen
des Orthogonalsystems $\{e_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ darstellen:

Man kann zeigen:

Jedes $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ mit $||f||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < \infty$

(also insbesondere die stetigen oder auch nur stückweise stetigen $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$)

lässt sich als Fourierreihe,
sprich als Grenzwert von Linearkombinationen
des Orthogonalsystems $\{e_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ darstellen:

Es gibt Koeffizienten $\{c_k\}$ so, dass

Man kann zeigen:

Jedes $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ mit $||f||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < \infty$

(also insbesondere die stetigen oder auch nur stückweise stetigen $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$)

lässt sich als Fourierreihe,
sprich als Grenzwert von Linearkombinationen
des Orthogonalsystems $\{e_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ darstellen:

Es gibt Koeffizienten $\{c_k\}$ so, dass

$$||f - \sum_{k=-K}^{K} c_k e_k|| \to 0 \quad \text{für } K \to \infty.$$

Man kann zeigen:

Jedes $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ mit $||f||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < \infty$

(also insbesondere die stetigen oder auch nur stückweise stetigen $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$)

lässt sich als Fourierreihe,
sprich als Grenzwert von Linearkombinationen
des Orthogonalsystems $\{e_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ darstellen:

Es gibt Koeffizienten $\{c_k\}$ so, dass

$$||f - \sum_{k=-K}^{K} c_k e_k|| \to 0 \quad \text{für } K \to \infty.$$

Man schreibt dafür kurz:

Man kann zeigen:

Jedes $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ mit $||f||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < \infty$

(also insbesondere die stetigen oder auch nur stückweise stetigen $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$)

lässt sich als Fourierreihe,
sprich als Grenzwert von Linearkombinationen
des Orthogonalsystems $\{e_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ darstellen:

Es gibt Koeffizienten $\{c_k\}$ so, dass

$$||f - \sum_{k=-K}^{K} c_k e_k|| \to 0 \quad \text{für } K \to \infty.$$

Man schreibt dafür kurz:

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e_k.$$

Die Orthogonalität der e_k macht es leicht,

Die Orthogonalität der e_k macht es leicht,
die Fourierkoeffizienten c_k zu berechnen:

Die Orthogonalität der e_k macht es leicht,
die Fourierkoeffizienten c_k zu berechnen:

$$< e_k, f > = < e_k, \left(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_\ell \, e_\ell \right) >$$

Die Orthogonalität der e_k macht es leicht,
die Fourierkoeffizienten c_k zu berechnen:

$$< e_k, f > = < e_k, \left(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_\ell \, e_\ell \right) >$$

$$= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_\ell < e_k, e_\ell >$$

Die Orthogonalität der e_k macht es leicht,
die Fourierkoeffizienten c_k zu berechnen:

$$< e_k, f > = < e_k, \left(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_\ell \, e_\ell \right) >$$

$$= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_\ell \; < e_k, \, e_\ell >$$

$$= c_k \; < e_k, \, e_k > = 2\pi \, c_k.$$

Die Orthogonalität der e_k macht es leicht,
die Fourierkoeffizienten c_k zu berechnen:

$$< e_k, f > = < e_k, \left(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_\ell \, e_\ell \right) >$$

$$= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_\ell \; < e_k, \, e_\ell >$$

$$= c_k \; < e_k, \, e_k > = 2\pi \, c_k.$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \; < e_k, \, f > = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} f(t) dt.$$

Für $k = 0$ ergibt sich:

Für $k = 0$ ergibt sich:

$$e_0(t) = 1.$$

Für $k = 0$ ergibt sich:

$$e_0(t) = 1.$$

Der nullte Fourierkoeffizient ist damit:

Für $k = 0$ ergibt sich:

$$e_0(t) = 1.$$

Der nullte Fourierkoeffizient ist damit:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} < e_0, \, f > = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt$$

Für $k = 0$ ergibt sich:

$$e_0(t) = 1.$$

Der nullte Fourierkoeffizient ist damit:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} < e_0,\, f > = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt$$

also der Mittelwert von f.

Mit der Euler-Formel

Mit der Euler-Formel

$$e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt$$

Mit der Euler-Formel

$$e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt$$

können wir die Sinusfunktion und die Cosinusfunktion

Mit der Euler-Formel

$$e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt$$

können wir die Sinusfunktion und die Cosinusfunktion ins Spiel bringen.

Mit der Euler-Formel

$$e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt$$

können wir die Sinusfunktion und die Cosinusfunktion ins Spiel bringen.

Das erlaubt es (wie wir gleich sehen werden)

Mit der Euler-Formel

$$e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt$$

können wir die Sinusfunktion und die Cosinusfunktion ins Spiel bringen.

Das erlaubt es (wie wir gleich sehen werden) die Fourierreihe einer reellen Funktion f

Mit der Euler-Formel

$$e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt$$

können wir die Sinusfunktion und die Cosinusfunktion ins Spiel bringen.

Das erlaubt es (wie wir gleich sehen werden) die Fourierreihe einer reellen Funktion f reell zu schreiben.

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e_{ikt} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(\cos kt + i \sin kt).$$

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e_{ikt} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k (\cos kt + i \sin kt).$$

Unter Berücksichtigtigung von

$$\cos(-kt) = \cos(kt), \qquad \sin(-kt) = -\sin(kt)$$

ergibt dies

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e_{ikt} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(\cos kt + i \sin kt).$$

Unter Berücksichtigtigung von

$$\cos(-kt) = \cos(kt), \qquad \sin(-kt) = -\sin(kt)$$

ergibt dies

$$f(t) = c_0 + \sum_{1}^{\infty}(c_k + c_{-k}) \cos kt + i \sum_{1}^{\infty}(c_k - c_{-k}) \sin kt.$$

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e_{ikt} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(\cos kt + i \sin kt).$$

Unter Berücksichtigtigung von

$$\cos(-kt) = \cos(kt), \qquad \sin(-kt) = -\sin(kt)$$

ergibt dies

$$f(t) = c_0 + \sum_{1}^{\infty}(c_k + c_{-k}) \cos kt + i \sum_{1}^{\infty}(c_k - c_{-k}) \sin kt.$$

Also mit

$$a_0 := c_0 \qquad a_k := c_k + c_{-k} \qquad b_k := i(c_k - c_{-k})$$

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e_{ikt} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(\cos kt + i \sin kt).$$

Unter Berücksichtigtigung von

$$\cos(-kt) = \cos(kt), \qquad \sin(-kt) = -\sin(kt)$$

ergibt dies

$$f(t) = c_0 + \sum_{1}^{\infty}(c_k + c_{-k}) \cos kt + i \sum_{1}^{\infty}(c_k - c_{-k}) \sin kt.$$

Also mit

$$a_0 := c_0 \qquad a_k := c_k + c_{-k} \qquad b_k := i(c_k - c_{-k})$$

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

Ist f eine gerade Funktion, d.h. $f(-t) = f(t)$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

Ist f eine gerade Funktion, d.h. $f(-t) = f(t)$, dann ist

$$f(t) = \frac{1}{2}(f(t) + f(-t))$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

Ist f eine gerade Funktion, d.h. $f(-t) = f(t)$,
dann ist

$$f(t) = \frac{1}{2}(f(t) + f(-t))$$

Weil bei dieser Addition die Sinusterme wegfallen
(denn $\sin(x) = -\sin(x)$),

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

Ist f eine gerade Funktion, d.h. $f(-t) = f(t)$,
dann ist

$$f(t) = \tfrac{1}{2}(f(t) + f(-t))$$

Weil bei dieser Addition die Sinusterme wegfallen
(denn $\sin(x) = -\sin(x)$),
ist die Fourierreihe einer geraden Funktion eine reine Cosinusreihe:

$$f(t) = \sum_{0}^{\infty} a_k \cos kt.$$

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

Ist f eine ungerade Funktion, d.h. $f(-t) = -f(t)$,

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

Ist f eine ungerade Funktion, d.h. $f(-t) = -f(t)$,
dann ist

$$f(t) = \frac{1}{2}(f(t) - f(-t))$$

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

Ist f eine ungerade Funktion, d.h. $f(-t) = -f(t)$, dann ist

$$f(t) = \frac{1}{2}(f(t) - f(-t))$$

Weil bei dieser Subtraktion die Cosinusterme wegfallen (denn $\cos(x) = \cos(-x)$),

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

Ist f eine ungerade Funktion, d.h. $f(-t) = -f(t)$,
dann ist

$$f(t) = \tfrac{1}{2}(f(t) - f(-t))$$

Weil bei dieser Subtraktion die Cosinusterme wegfallen
(denn $\cos(x) = \cos(-x)$),
ist die Fourierreihe einer ungeraden Funktion eine reine Sinusreihe:

$$f(t) = \sum_{1}^{\infty} b_k \sin kt.$$

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

Ist f eine ungerade Funktion, d.h. $f(-t) = -f(t)$,
dann ist

$$f(t) = \tfrac{1}{2}(f(t) - f(-t))$$

Weil bei dieser Subtraktion die Cosinusterme wegfallen
(denn $\cos(x) = \cos(-x)$),
ist die Fourierreihe einer ungeraden Funktion eine reine Sinusreihe:

$$f(t) = \sum_{1}^{\infty} b_k \sin kt.$$

Beispiel: “Sägezahnfunktion”

Beispiel: “Sägezahnfunktion”

$$f(t) := t, \qquad t \in [-\pi, \pi]$$

Beispiel: “Sägezahnfunktion”

$$f(t) := t, \qquad t \in [-\pi, \pi]$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \, dt = 0.$$

Beispiel: “Sägezahnfunktion”

$$f(t) := t, \qquad t \in [-\pi, \pi]$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \, dt = 0.$$

$$c_k = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} t \, dt = ?$$

Beispiel: “Sägezahnfunktion”

$$f(t) := t, \qquad t \in [-\pi, \pi]$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \, dt = 0.$$

$$c_k = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} t \, dt = ?$$

Wir erinnern an die (aus der Produktregel folgende)
Formel der “partiellen Integration”

Beispiel: “Sägezahnfunktion”

$$f(t) := t, \qquad t \in [-\pi, \pi]$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \; dt = 0.$$

$$c_k = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} t \, dt = ?$$

Wir erinnern an die (aus der Produktregel folgende)
Formel der “partiellen Integration”

$$\int_c^d h'(t) g(t) dt = hg|_c^d - \int_c^d h(t) g'(t) dt.$$

Damit folgt für $k \neq 0$

Damit folgt für $k \neq 0$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} t \, dt$$

Damit folgt für $k \neq 0$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} t \, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(t \frac{1}{-ik} e^{-ikt} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{-ik} e^{-ikt} dt \right)$$

Damit folgt für $k \neq 0$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} t \, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(t \frac{1}{-ik} e^{-ikt} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{-ik} e^{-ikt} dt \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{-ik} \right) (-1)^k \, t|_{-\pi}^{\pi} - 0 = \frac{(-1)^k}{k} i$$

Damit folgt für $k \neq 0$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} t \, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(t \frac{1}{-ik} e^{-ikt} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{-ik} e^{-ikt} dt \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{-ik} \right) (-1)^k \, t|_{-\pi}^{\pi} - 0 = \frac{(-1)^k}{k} i$$

(denn $e^{ikt} = e^{-ikt} = (-1)^k$, und $< e_k, 1 >= 0$).

$$f(t) = t, \qquad t \in [-\pi, \pi]$$

$$f(t) = t, \qquad t \in [-\pi, \pi]$$

$$c_k = \frac{(-1)^k}{k} i$$

$$f(t) = t, \qquad t \in [-\pi, \pi]$$

$$c_k = \frac{(-1)^k}{k} i$$

Also:

$$f(t) = t, \qquad t \in [-\pi, \pi]$$

$$c_k = \frac{(-1)^k}{k} i$$

Also:

$$a_k = c_k + c_{-k} = 0$$

$$f(t) = t, \qquad t \in [-\pi, \pi]$$

$$c_k = \frac{(-1)^k}{k} i$$

Also:

$$a_k = c_k + c_{-k} = 0$$

$$b_k = i(c_k - c_{-k}) = (-1)^{k+1} \frac{2}{k}$$

$$f(t) = t, \qquad t \in [-\pi, \pi]$$

$$c_k = \frac{(-1)^k}{k} i$$

Also:

$$a_k = c_k + c_{-k} = 0$$

$$b_k = i(c_k - c_{-k}) = (-1)^{k+1}\,\frac{2}{k}$$

$$f(t) = \sum_1^\infty b_k \sin kt$$

$$f(t) = t, \qquad t \in [-\pi, \pi]$$

$$c_k = \frac{(-1)^k}{k} i$$

Also:

$$a_k = c_k + c_{-k} = 0$$

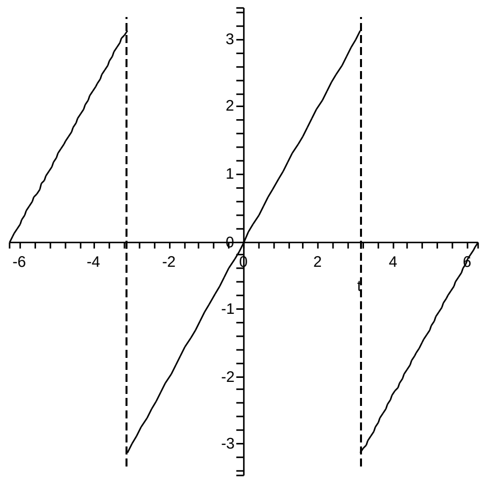
$$b_k = i(c_k - c_{-k}) = (-1)^{k+1} \, \frac{2}{k}$$

$$f(t) = \textstyle\sum_1^\infty b_k \sin kt$$

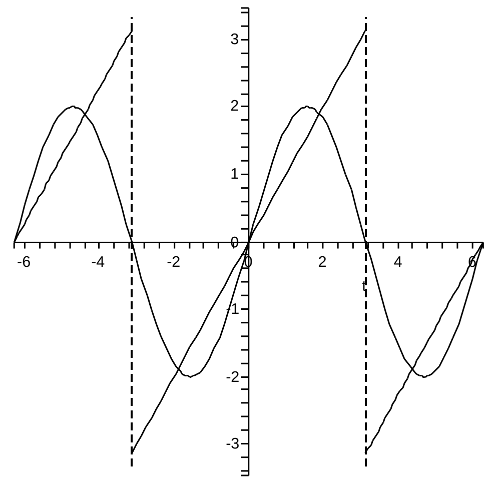
Es gilt die überraschende Formel

$$t = 2\left(\frac{\sin t}{1} - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \dots\right), \quad -\pi < t < \pi.$$

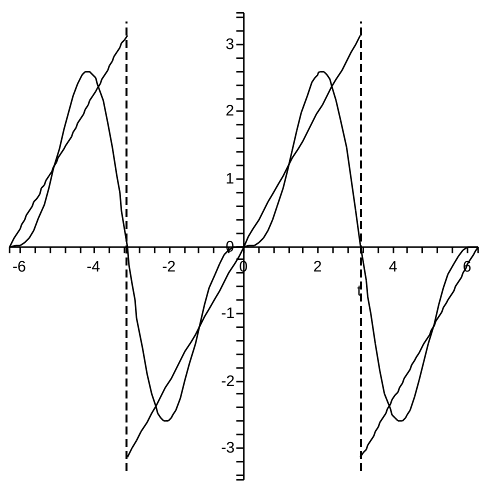
$$f(t)$$



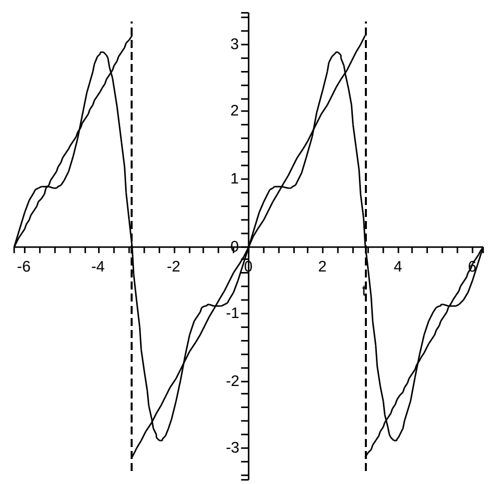
$$2\left(\frac{\sin t}{1}\right)$$



$$2\left(\frac{\sin t}{1} - \frac{\sin 2t}{2}\right)$$



$$2\left(\frac{\sin t}{1} - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3}\right)$$



$$t = 2\left(\frac{\sin t}{1} - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \ldots\right), \qquad -\pi < t < \pi$$

$$t = 2\left(\frac{\sin t}{1} - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \ldots\right), \qquad -\pi < t < \pi$$

Für $t = \pi/2$ ergibt sich wegen

$$t = 2\left(\frac{\sin t}{1} - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \dots\right), \qquad -\pi < t < \pi$$

Für $t = \pi/2$ ergibt sich wegen

$$\{\sin(k\tfrac{\pi}{2})\} = \{0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1, \dots\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$t = 2\left(\frac{\sin t}{1} - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \dots\right), \qquad -\pi < t < \pi$$

Für $t = \pi/2$ ergibt sich wegen

$$\{\sin(k\tfrac{\pi}{2})\} = \{0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1, \dots\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

eine hübsche,
allerdings von der Konvergenzgeschwindigkeit her kaum brauchbare
Reihendarstellung für die Zahl π:

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right).$$

Noch ein Wort zur *Wärmeleitung in einem (homogenen) Stab*:

Noch ein Wort zur *Wärmeleitung in einem (homogenen) Stab*:

Ist $\theta(t, x)$ die Temperatur zur Zeit t,

Noch ein Wort zur *Wärmeleitung in einem (homogenen) Stab*:

Ist $\theta(t, x)$ die Temperatur zur Zeit t,

dann besagt die Wärmeleitungsgleichung

Noch ein Wort zur *Wärmeleitung in einem (homogenen) Stab*:
Ist $\theta(t, x)$ die Temperatur zur Zeit t,
dann besagt die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta(t, x) = \gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta(t, x).$$

Noch ein Wort zur *Wärmeleitung in einem (homogenen) Stab*:
Ist $\theta(t,x)$ die Temperatur zur Zeit t,
dann besagt die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta(t,x) = \gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta(t,x).$$

γ ist dabei eine positive Konstante, wir setzten sie der Einfachheit halber gleich 1.

Mulden des aktuellen Temperaturprofils $x \mapsto \theta(t,x)$ werden gehoben,

Noch ein Wort zur *Wärmeleitung in einem (homogenen) Stab*:
Ist $\theta(t,x)$ die Temperatur zur Zeit t,
dann besagt die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta(t,x) = \gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta(t,x).$$

γ ist dabei eine positive Konstante, wir setzten sie der Einfachheit halber gleich 1.

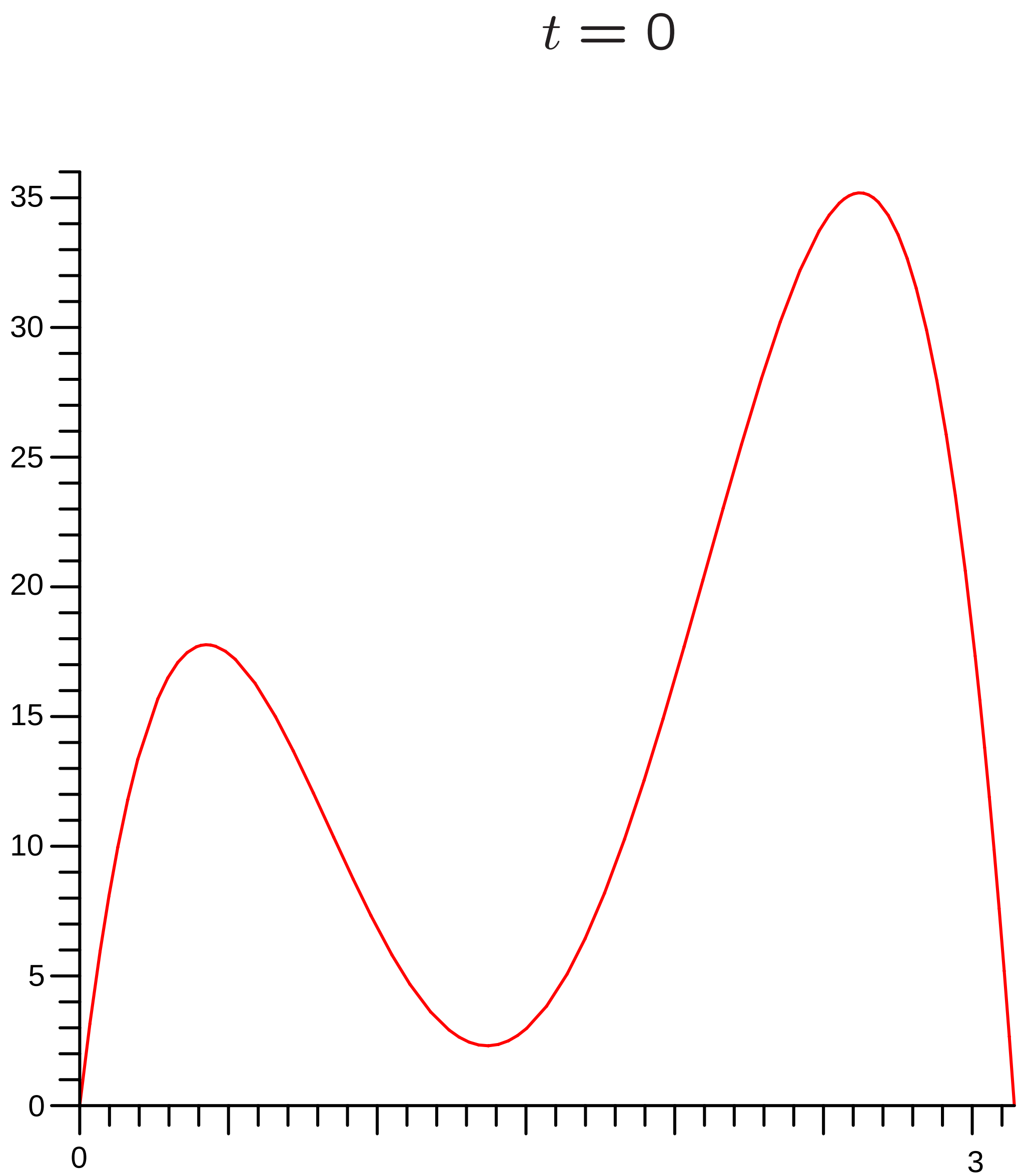
Mulden des aktuellen Temperaturprofils $x \mapsto \theta(t,x)$ werden gehoben,
Kuppen werden gesenkt.

Noch ein Wort zur *Wärmeleitung in einem (homogenen) Stab*:
Ist $\theta(t,x)$ die Temperatur zur Zeit t,
dann besagt die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta(t,x) = \gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta(t,x).$$

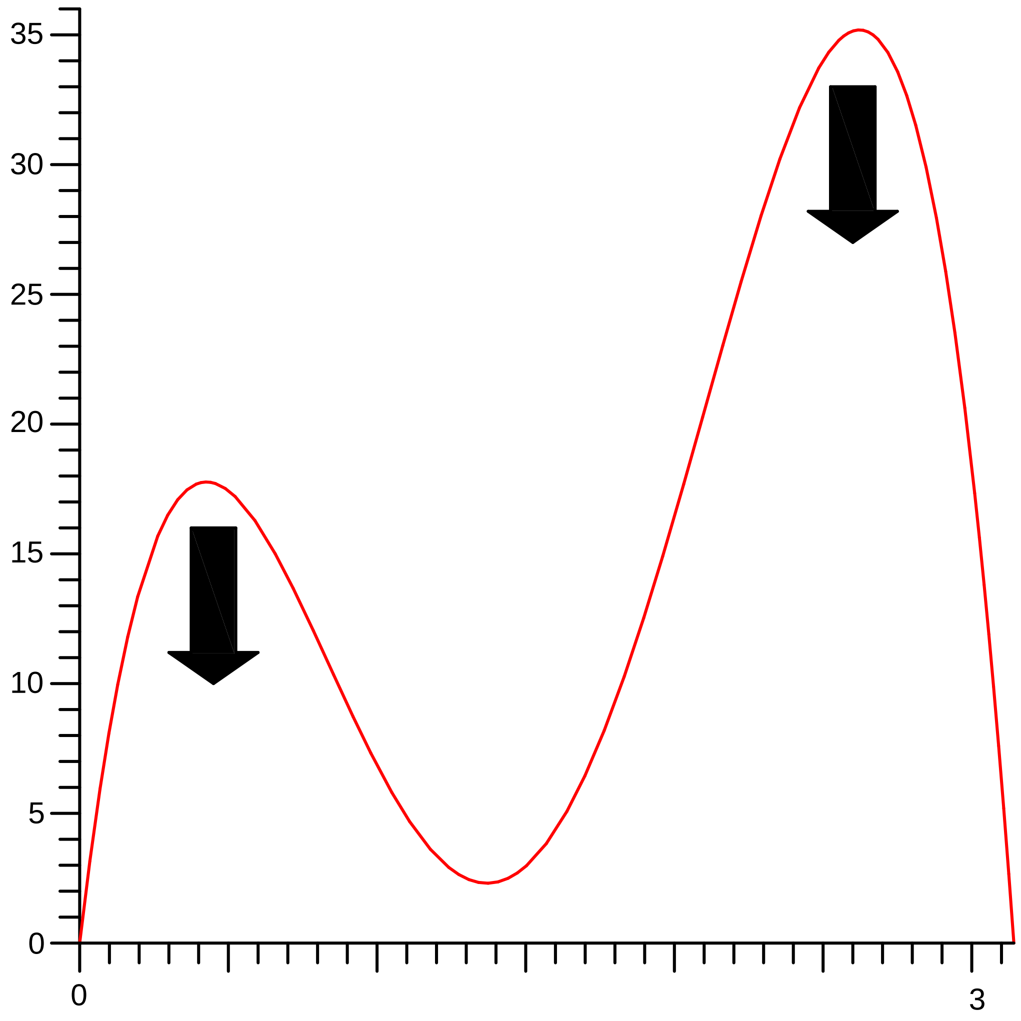
γ ist dabei eine positive Konstante, wir setzten sie der Einfachheit halber gleich 1.

Mulden des aktuellen Temperaturprofils $x \mapsto \theta(t,x)$ werden gehoben,
Kuppen werden gesenkt.

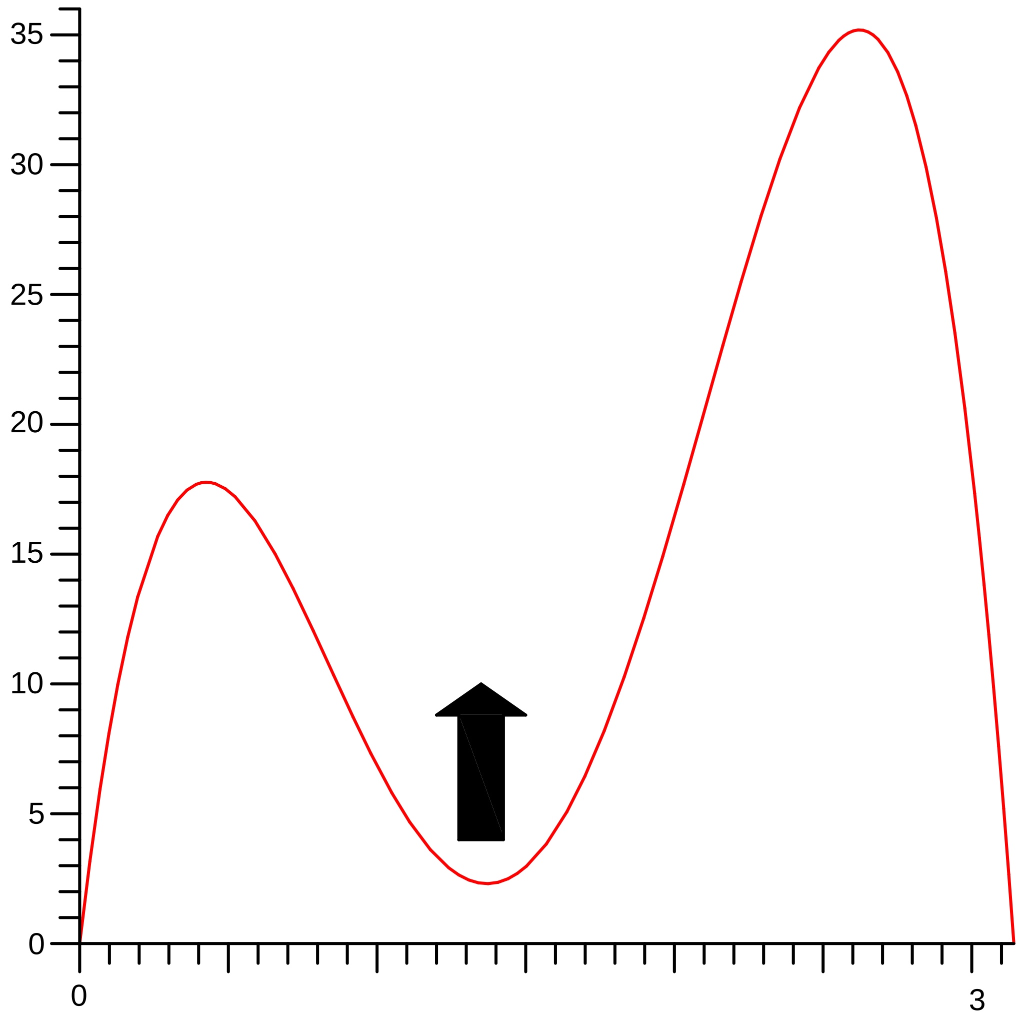


$t = 0$
35
30
25
20
15
10
5
0
0
3

$t = 0$



$t = 0$



$$\frac{\partial}{\partial t}\theta(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta(t,x).$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta(t,x).$$

Spezielle Lösungen davon sind

harmonische Schwingungen mit in der Zeit abklingender Amplitude:

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta(t,x).$$

Spezielle Lösungen davon sind

harmonische Schwingungen mit in der Zeit abklingender Amplitude:

$$e^{-k^2 t}\cos kx, \qquad e^{-k^2 t}\sin kx.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta(t,x).$$

Spezielle Lösungen davon sind

harmonische Schwingungen mit in der Zeit abklingender Amplitude:

$$e^{-k^2 t}\cos kx, \qquad\qquad e^{-k^2 t}\sin kx.$$

In der Tat:

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta(t,x).$$

Spezielle Lösungen davon sind
harmonische Schwingungen mit in der Zeit abklingender Amplitude:

$$e^{-k^2 t}\cos kx, \qquad\qquad e^{-k^2 t}\sin kx.$$

In der Tat:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-k^2 t}\cos kx\right) = -k^2 e^{-k^2 t}\cos kx = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(e^{-k^2 t}\cos kx\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta(t,x).$$

Spezielle Lösungen davon sind
harmonische Schwingungen mit in der Zeit abklingender Amplitude:

$$e^{-k^2 t}\cos kx, \qquad\qquad e^{-k^2 t}\sin kx.$$

In der Tat:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-k^2 t}\cos kx\right) = -k^2 e^{-k^2 t}\cos kx = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(e^{-k^2 t}\cos kx\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-k^2 t}\sin kx\right) = -k^2 e^{-k^2 t}\sin kx = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(e^{-k^2 t}\sin kx\right).$$

Auch Linearkombinationen von $e^{-k^2 t} \cos kx$ und $e^{-k^2 t} \sin kx$ lösen die Wärmeleitungsgleichung

Auch Linearkombinationen von $e^{-k^2t}\cos kx$ und $e^{-k^2t}\sin kx$
lösen die Wärmeleitungsgleichung
(denn das Bilden von Ableitungen operiert ja linear):

Auch Linearkombinationen von $e^{-k^2t}\cos kx$ und $e^{-k^2t}\sin kx$
lösen die Wärmeleitungsgleichung
(denn das Bilden von Ableitungen operiert ja linear):

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=0}^{K} e^{-k^2t}\left(a_k\cos kx + b_k\sin kx\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{k=0}^{K} e^{-k^2t}\left(a_k\cos kx + b_k\sin kx\right)$$

Und auch der Grenzwert $K\to\infty$ verhält sich hier in aller Regel gutartig,
sodass man bekommt:

Auch Linearkombinationen von $e^{-k^2t}\cos kx$ und $e^{-k^2t}\sin kx$
lösen die Wärmeleitungsgleichung
(denn das Bilden von Ableitungen operiert ja linear):

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=0}^{K} e^{-k^2t}\left(a_k\cos kx + b_k\sin kx\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{k=0}^{K} e^{-k^2t}\left(a_k\cos kx + b_k\sin kx\right)$$

Und auch der Grenzwert $K \to \infty$ verhält sich hier in aller Regel gutartig,
sodass man bekommt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k^2t}\left(a_k\cos kx + b_k\sin kx\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k^2t}\left(a_k\cos kx + b_k\sin kx\right)$$

Um die Wärmeleitungsgleichung mit gegebenem Anfangsprofil

Um die Wärmeleitungsgleichung mit gegebenem Anfangsprofil

$$\theta(0, x) = f(x)$$

Um die Wärmeleitungsgleichung mit gegebenem Anfangsprofil

$$\theta(0, x) = f(x)$$

zu lösen, reicht es also, die Funktion f in eine Fourier-Reihe zu entwicken:

Um die Wärmeleitungsgleichung mit gegebenem Anfangsprofil

$$\theta(0, x) = f(x)$$

zu lösen, reicht es also, die Funktion f in eine Fourier-Reihe zu entwicken:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Um die Wärmeleitungsgleichung mit gegebenem Anfangsprofil

$$\theta(0, x) = f(x)$$

zu lösen, reicht es also, die Funktion f in eine Fourier-Reihe zu entwicken:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Es ergibt sich dann als Lösung:

Um die Wärmeleitungsgleichung mit gegebenem Anfangsprofil

$$\theta(0,x) = f(x)$$

zu lösen, reicht es also, die Funktion f in eine Fourier-Reihe zu entwicken:

$$f(x) = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Es ergibt sich dann als Lösung:

$$\theta(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k^2 t} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right).$$

Beispiel:

Beispiel:

Gegeben sei ein Anfangsprofil $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}_+$
mit $f(0) = f(\pi) = 0$.
Denken wir uns f “ungerade fortgesetzt” auf $[-\pi, \pi]$
(also $f(-x) := -f(x)$)

Beispiel:

Gegeben sei ein Anfangsprofil $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}_+$
mit $f(0) = f(\pi) = 0$.
Denken wir uns f “ungerade fortgesetzt” auf $[-\pi, \pi]$
(also $f(-x) := -f(x)$)

und die Fortsetzung in eine reine Sinusreihe entwickelt:

Beispiel:

Gegeben sei ein Anfangsprofil $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}_+$
mit $f(0) = f(\pi) = 0$.
Denken wir uns f “ungerade fortgesetzt” auf $[-\pi, \pi]$
(also $f(-x) := -f(x)$)

und die Fortsetzung in eine reine Sinusreihe entwickelt:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx.$$

Beispiel:

Gegeben sei ein Anfangsprofil $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}_+$
mit $f(0) = f(\pi) = 0$.
Denken wir uns f “ungerade fortgesetzt” auf $[-\pi, \pi]$
(also $f(-x) := -f(x)$)

und die Fortsetzung in eine reine Sinusreihe entwickelt:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx.$$

Dann löst

Beispiel:

Gegeben sei ein Anfangsprofil $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}_+$
mit $f(0) = f(\pi) = 0$.
Denken wir uns f "ungerade fortgesetzt" auf $[-\pi, \pi]$
(also $f(-x) := -f(x)$)

und die Fortsetzung in eine reine Sinusreihe entwickelt:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx.$$

Dann löst
$$\theta(t, x) := \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 t} b_k \sin kx$$

Beispiel:

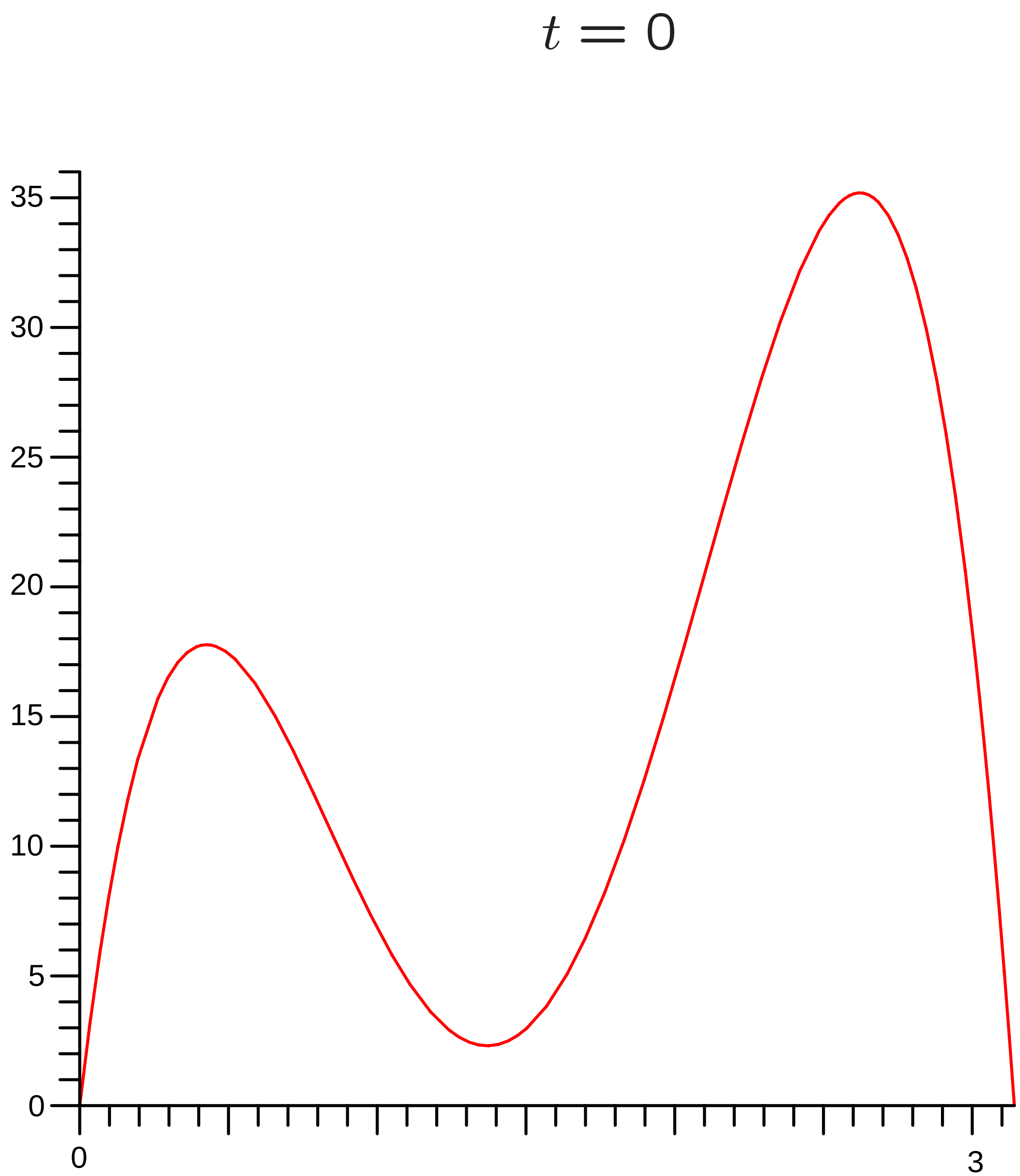
Gegeben sei ein Anfangsprofil $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}_+$
mit $f(0) = f(\pi) = 0$.
Denken wir uns f “ungerade fortgesetzt” auf $[-\pi, \pi]$
(also $f(-x) := -f(x)$)

und die Fortsetzung in eine reine Sinusreihe entwickelt:

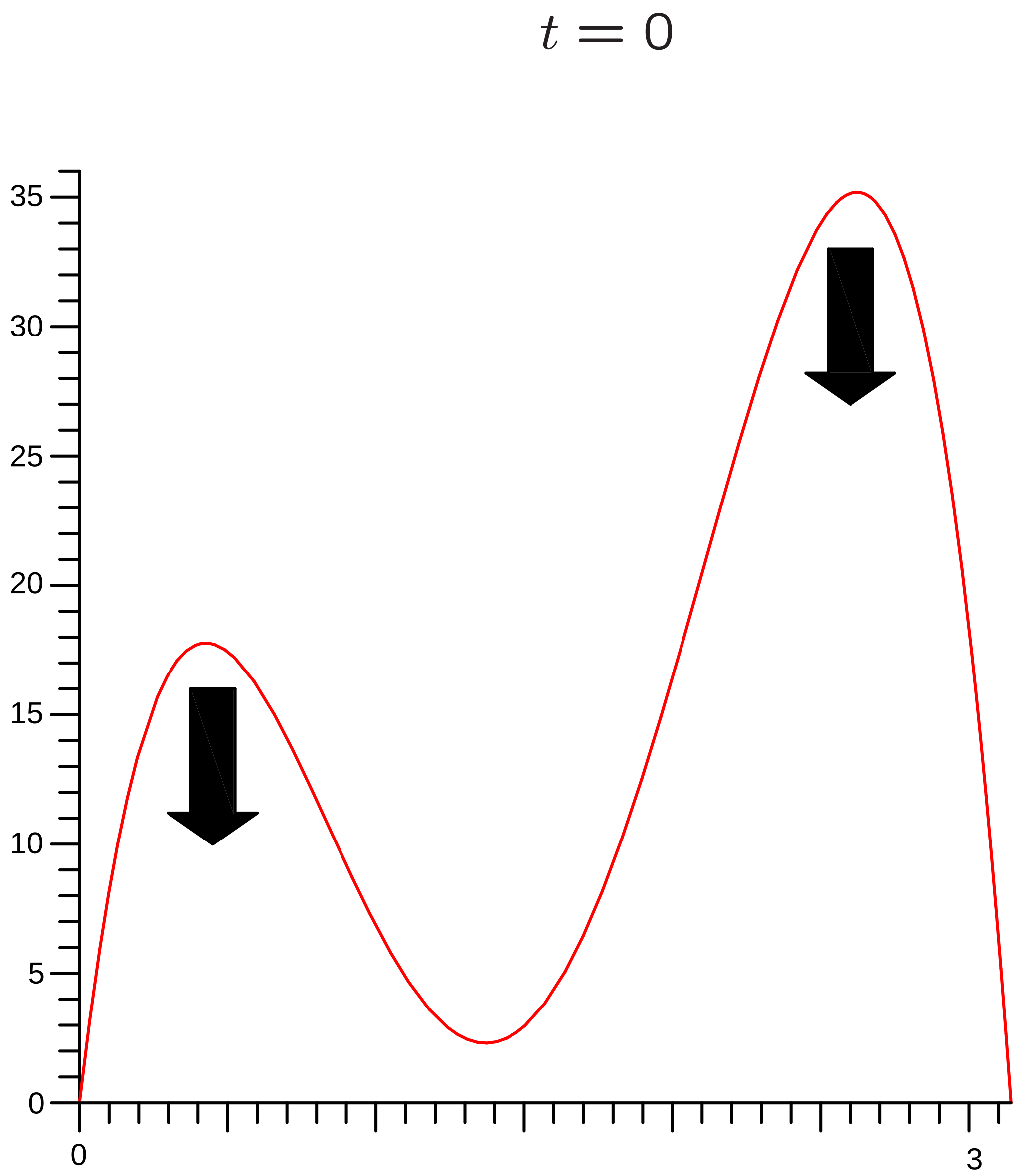
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx.$$

Dann löst
$$\theta(t, x) := \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 t} b_k \sin kx$$

auf $[0, \pi]$ die Wärmeleitungsgleichung
mit Anfangsbedingung f und Randbedingung $\theta(t, 0) = \theta(t, \pi) = 0$.

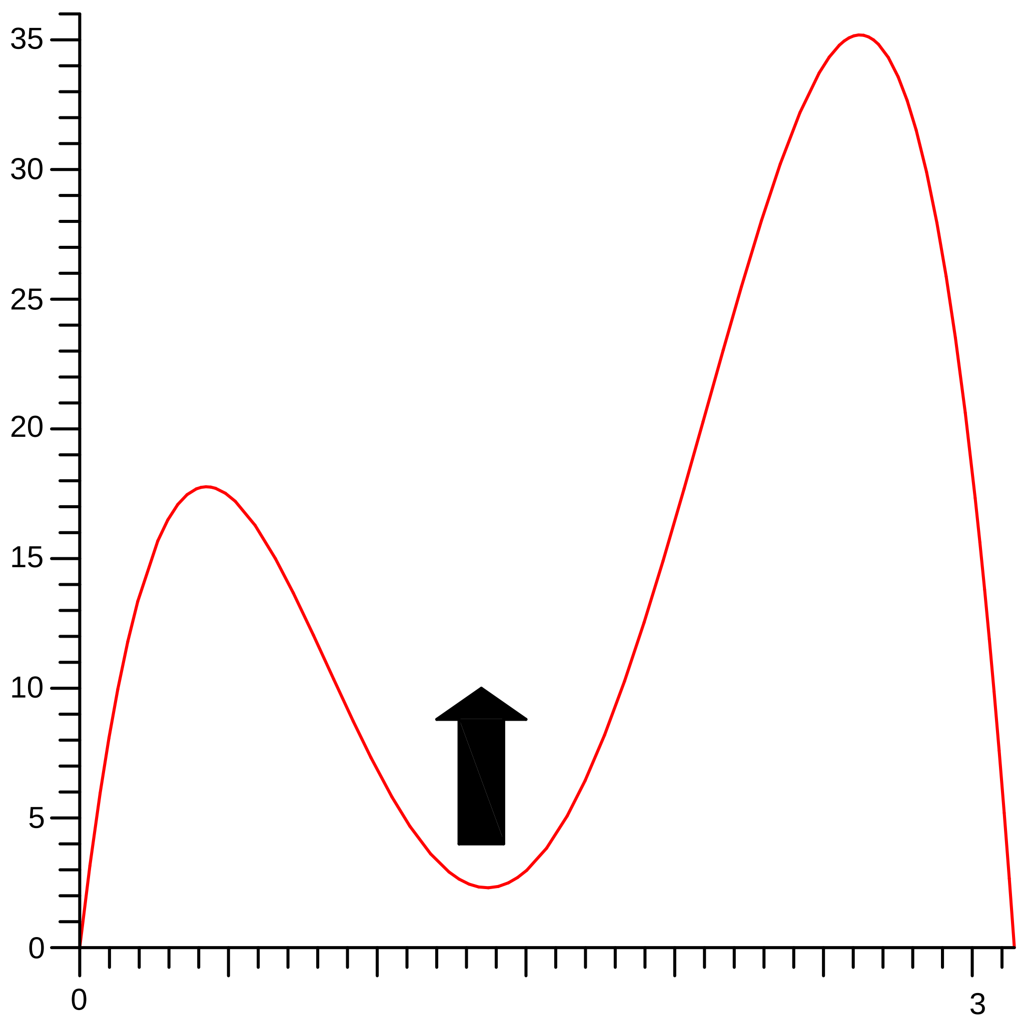


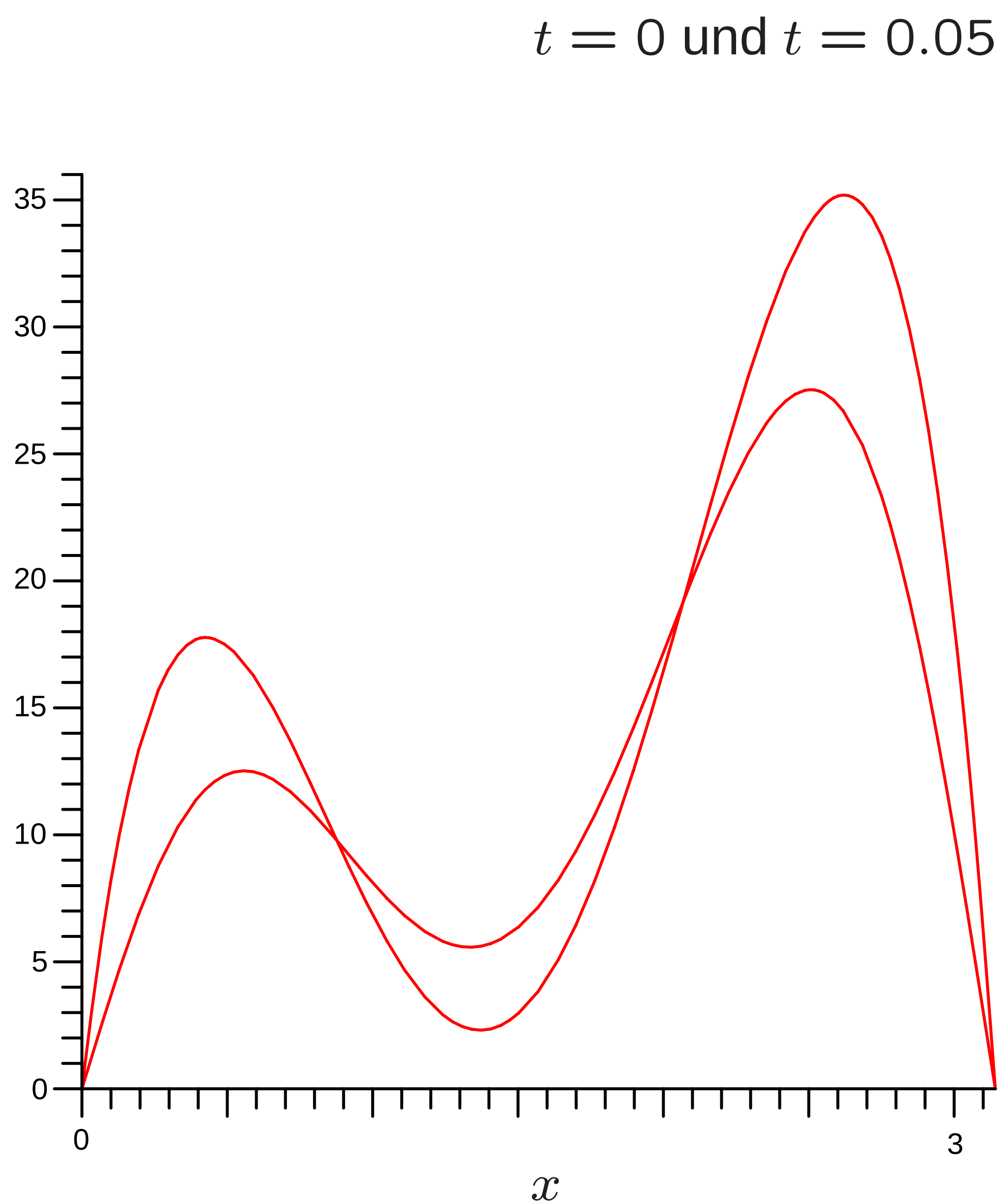
$t = 0$
35
30
25
20
15
10
5
0
0
3



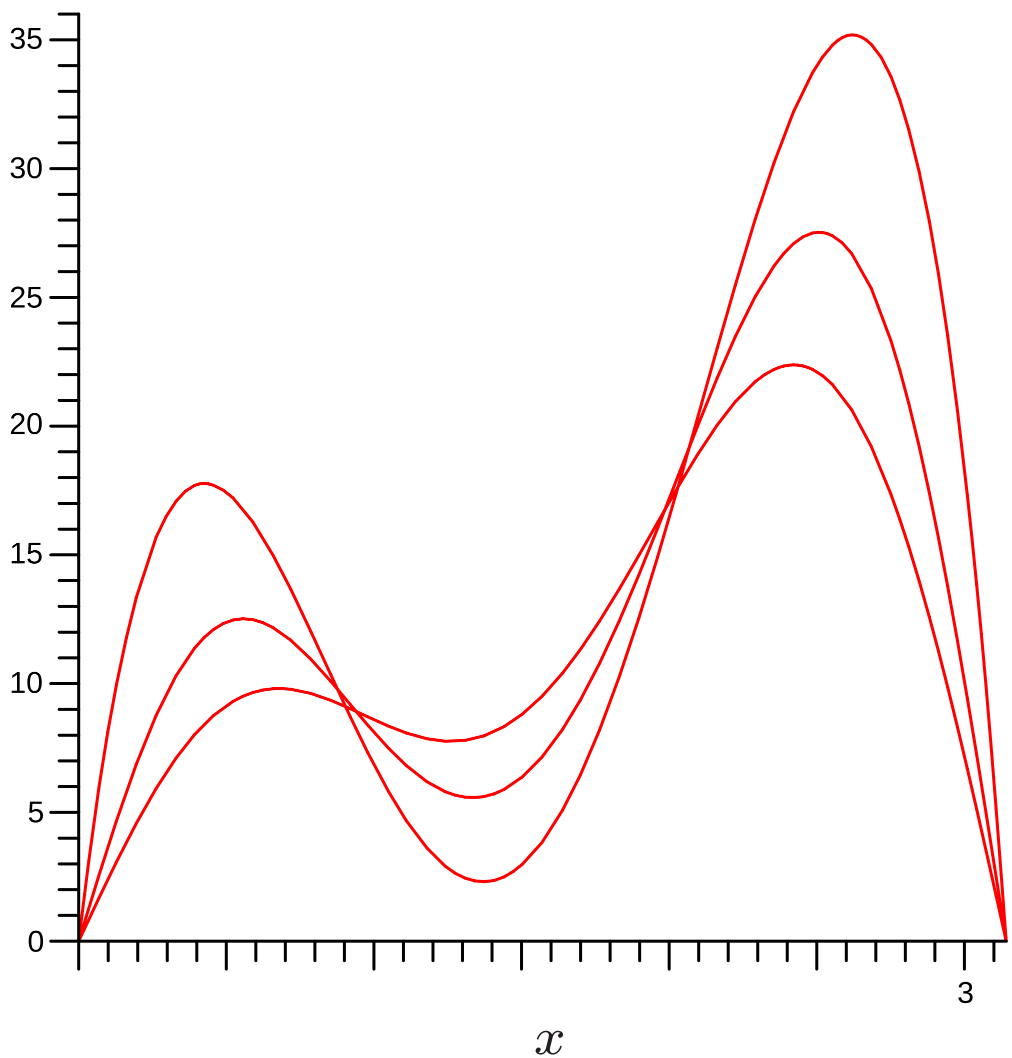
$t = 0$
35
30
25
20
15
10
5
0
0
3

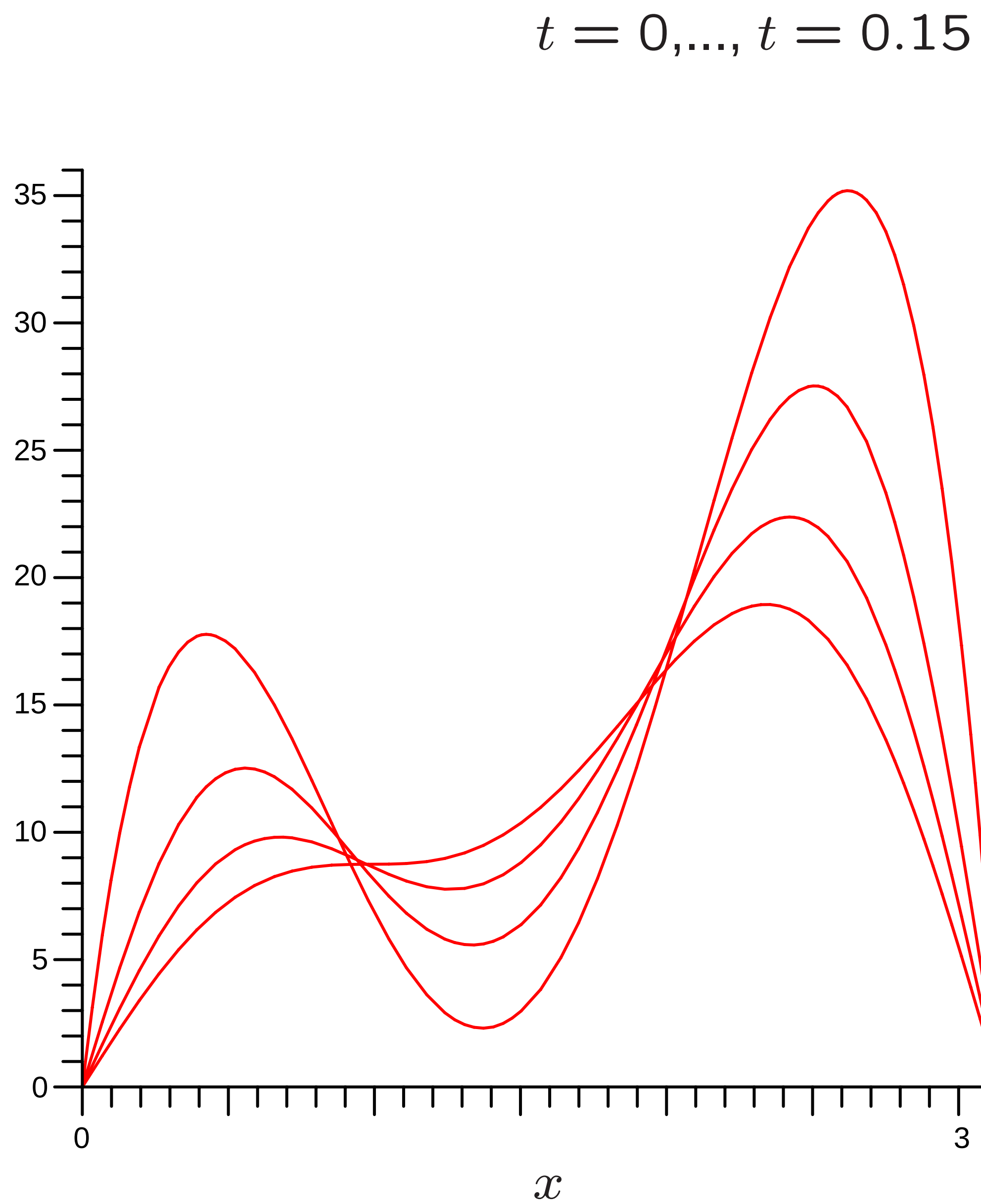
$t = 0$



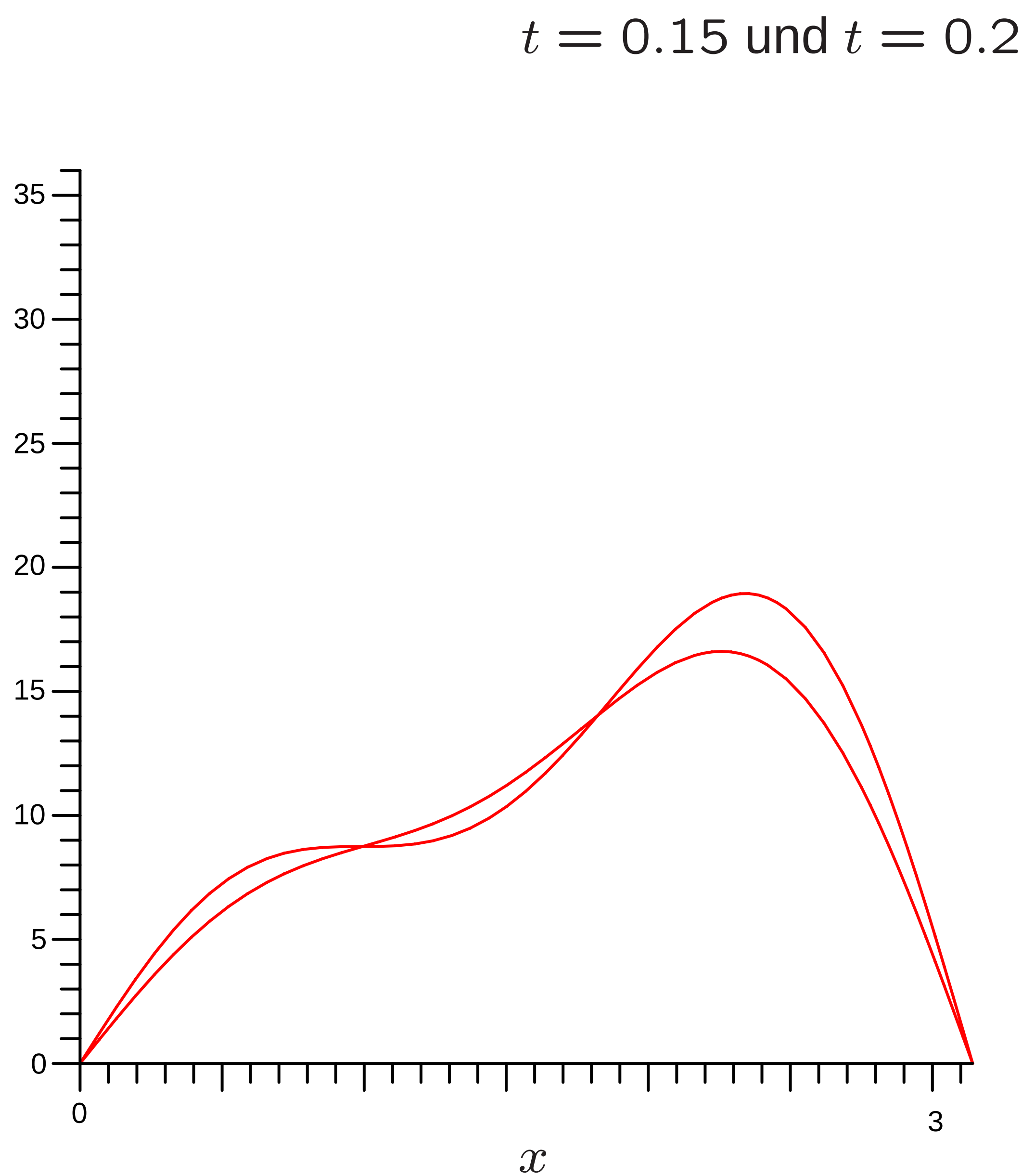

$t = 0$ und $t = 0.05$
35
30
25
20
15
10
5
0
0
3
x

$t = 0$, $t = 0.05$ und $t = 0.1$



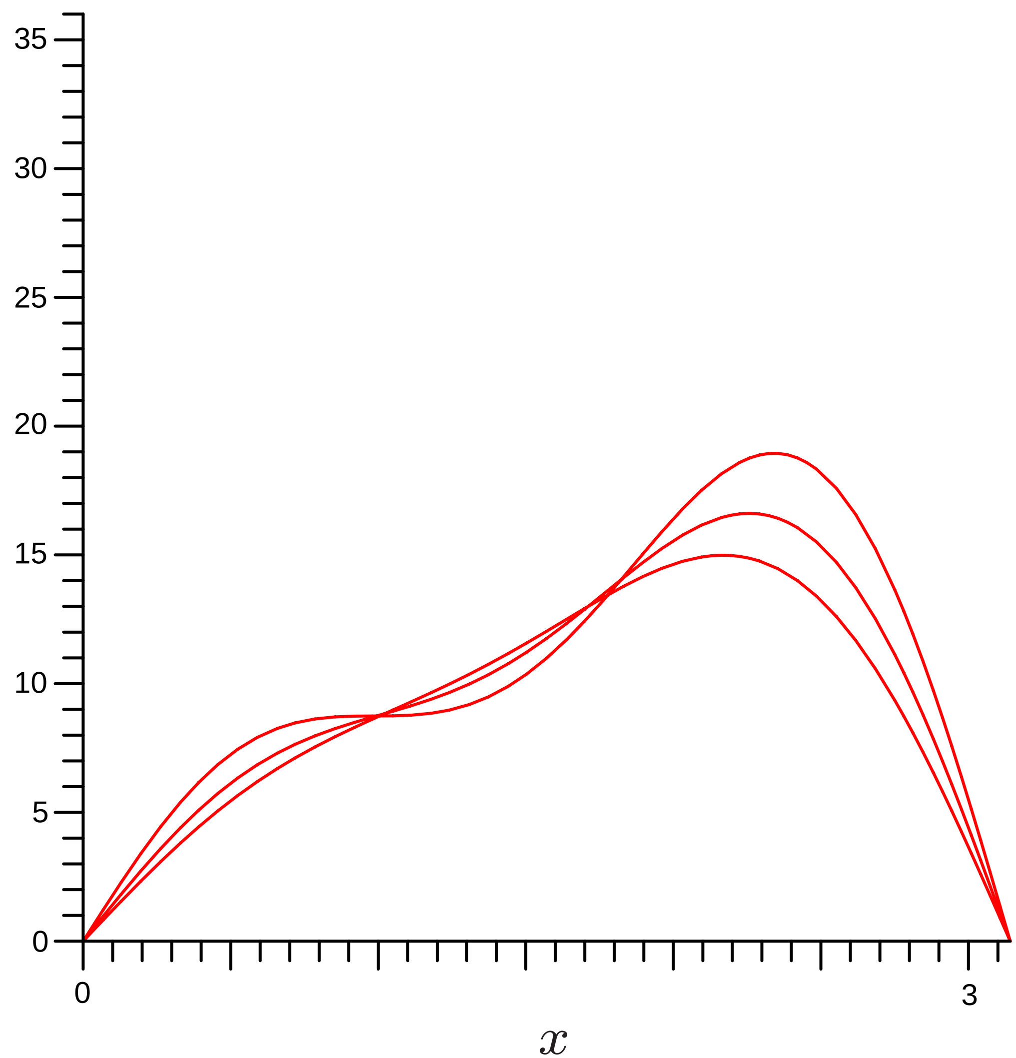


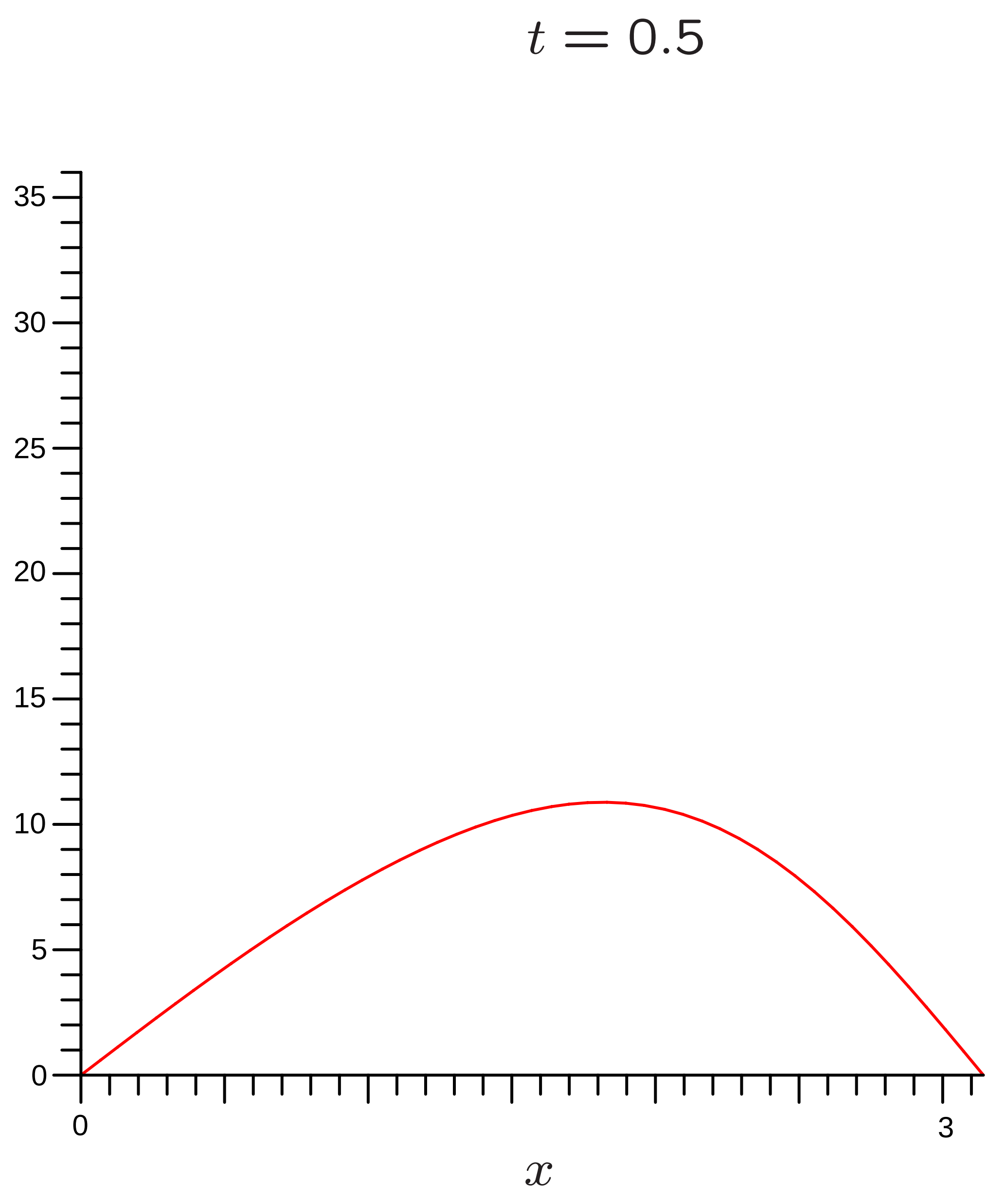
$t = 0,..., t = 0.15$
35
30
25
20
15
10
5
0
0
3
x

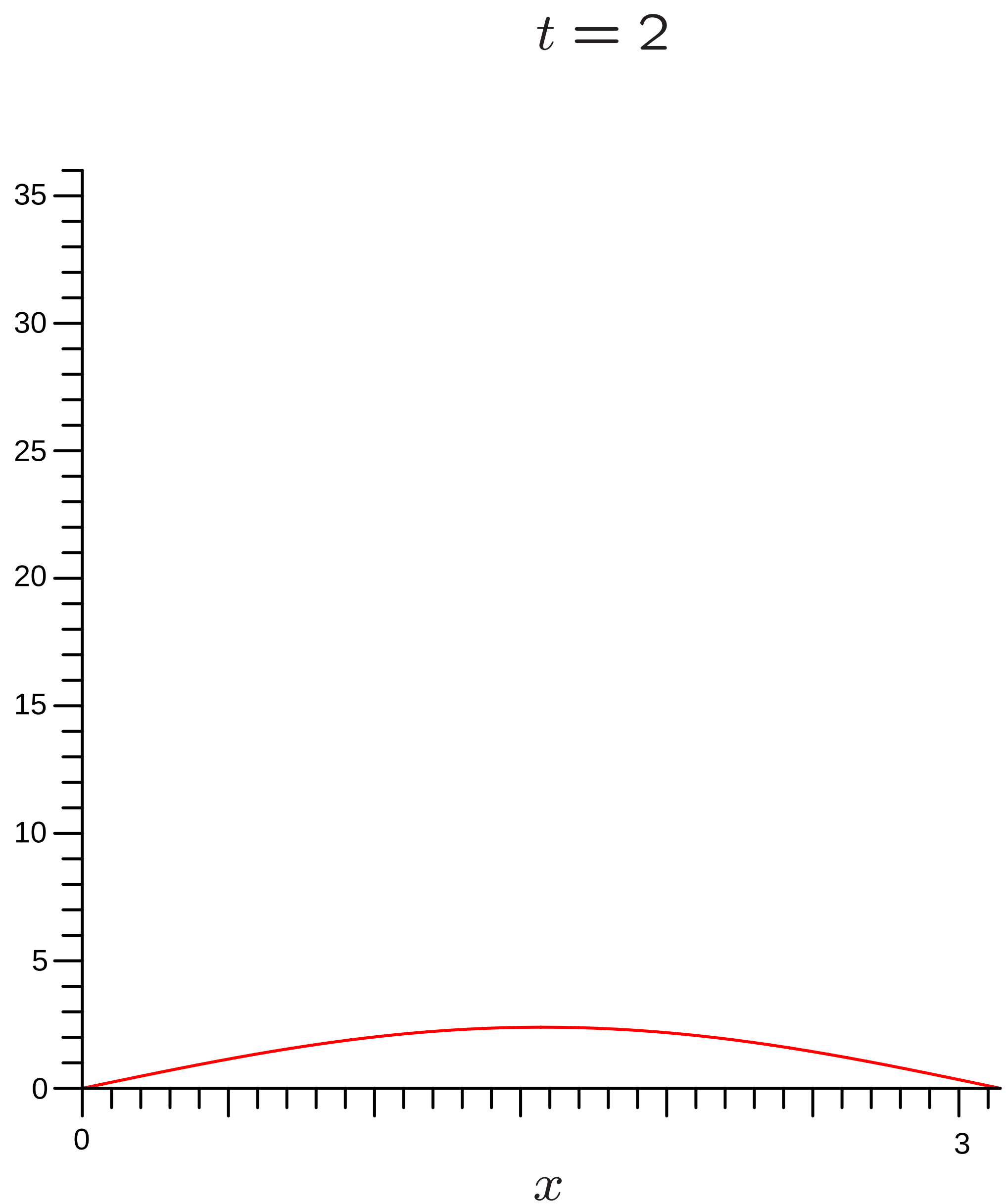


$t = 0.15$ und $t = 0.2$
35
30
25
20
15
10
5
0
0
3
x

$t = 0.15$, $t = 0.2$ und $t = 0.25$




$t = 0.5$
35
30
25
20
15
10
5
0
0
3
x



$t = 2$
35
30
25
20
15
10
5
0
0
3
x