Dies ist eine Vorlesungszusammenfassung, gedacht zur Vorlesungsbegleitung und als Gedächtnisstütze, nicht jedoch als etwas, das für sich selbst stehen könnte (wie etwa ein Lehrbuch). Der Besuch der Vorlesung ist durch die Lektüre in keinem Fall zu ersetzen, es gibt dort noch viel mehr an mündlichen Erklärungen, Erläuterungen und veranschaulichenden Skizzen, die für Verständnis und Einordnung des präsentierten Stoffes unabdingbar sind.

1 Fourierreihen 2π-periodischer Funktionen

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion, dh gilt

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f(x + 2\pi) = f(x),$$

so ist f eindeutig bestimmt durch $f|_{[0,2\pi)}$. Man kann f auch auffassen als Funktion $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, wobei

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} = \{x + 2\pi\mathbb{Z} : x \in \mathbb{R}\} = \{x + 2\pi\mathbb{Z} : x \in [0, 2\pi)\}.$$

Bemerkung: $(\mathbb{R}, +)$ ist abelsche Gruppe und $2\pi\mathbb{Z}$ ist Untergruppe. Die Abbildung $t \mapsto e^{it}$ ist ein surjektiver Homomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ nach $(\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \cdot)$ mit Kern $2\pi\mathbb{Z}$, also ist

$$(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \cdot), \quad [t] \mapsto e^{it}$$

ein Isomorphismus. $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ heißt (eindimensionaler) *Torus*, Bez: $\mathbb{T}$. Wir verwenden meist $[0, 2\pi)$ als Modell für $\mathbb{T}$. Wir verwenden das Lebeguemaß auf $\mathbb{T}$ und schreiben $\int_{\mathbb{T}} \ldots = \int_0^{2\pi} \ldots$.

1.1. Definition: Ein *trigonometrisches Polynom* ist ein Ausdruck der Form

$$P(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikt}, \tag{1}$$

wobei $N \in \mathbb{N}$ und $c_k \in \mathbb{C}$. Die auftretenden k heißen *Frequenzen* und die c_k die *Koeffizienten* von P. $\max\{k \in \mathbb{N}_0 : |a_k| + |a_{-k}| > 0\}$ heißt *Grad von* P. Die zugehörigen Funktionen $\mathbb{T} \to \mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ werden ebenfalls mit P bezeichnet.

1.2. Bemerkung: Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikt}\, dt = \begin{cases} 1 & , k = 0 \\ 0 & , k \neq 0 \end{cases} .$$

Somit gilt für ein trigonometrisches Polynom wie in (1):

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(t) e^{-int}\, dt = \sum_{k=-N}^{N} c_k \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t}\, dt = \begin{cases} c_n & , |n| \leq N \\ 0 & , |n| > N \end{cases} .$$

Problem: Für trigonometrische Reihen $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$ stellen sich die Fragen nach Konvergenz, nach der repräsentierten Funktion und nach der Bestimmung der Koeffizienten c_k aus der repräsentierten Funktion.

1.3. Definition: Für $f \in L^1(\mathbb{T})$ und $n \in \mathbb{Z}$ heißt

$$\hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{int} \, dt$$

der *n-te Fourierkoeffizient von f*, und

$$S[f] \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int} \quad \text{(formal!)}$$

heißt *Fourierreihe von f*.

Frage: Wie ist die Beziehung zwischen $S[f]$ und f?

1.4. Lemma: (a) Die Abbildung $f \mapsto (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ ist linear und stetig $L^1(\mathbb{T}) \to l^\infty(\mathbb{Z})$ mit

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| \leq \|f\|_1 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| \, dt.$$

(b) Für $f \in L^1(\mathbb{T})$ und $\tau \in \mathbb{T}$ sei $f_\tau \in L^1(\mathbb{T})$ definiert durch

$$f_\tau(t) := f(t-\tau), \quad t \in \mathbb{T}.$$

Dann gilt

$$\widehat{f_\tau}(n) = e^{-in\tau} \hat{f}(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. (a) Linearität ist klar. Für $n \in \mathbb{Z}$ ist

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| \underbrace{|e^{-int}|}_{=1} \, dt = \|f\|_1.$$

(b) Es gilt mittels der Substitution $t = s + \tau$:

$$\begin{aligned} \widehat{f_\tau}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t-\tau) e^{-int} \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) e^{-ins} e^{-in\tau} \, ds \\ &= e^{-in\tau} \hat{f}(n). \end{aligned}$$

$\square$

Ende 1.Vorl.

1.5. Satz: Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$ mit $\hat{f}(0) = 0$. Dann definiert $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \int_0^t f(s) \, ds$ eine 2π-periodische stetige Funktion, dh $F : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ist stetig, und es gilt

$$\hat{F}(n) = \frac{1}{in} \hat{f}(n), \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Zum Beweis benötigen wir ein Lemma, das im folgenden Einschub bereitgestellt wird.

— Einschub über absolutstetige Funktionen —

Definition (ad hoc): Eine Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt *absolutstetig* auf $[a,b]$, falls es $f \in L^1[a,b]$ gibt mit

$$F(d) - F(c) = \int_c^d f(t)\,dt \quad \text{für alle } [c,d] \subseteq [a,b].$$

Lemma: Seien $F, G : [a,b] \to \mathbb{C}$ absolutstetig auf $[a,b]$ mit zugehörigen $f, g \in L^1[a,b]$, dh für alle $x \in [a,b]$ ist

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt, \quad G(x) = G(a) + \int_a^x g(t)\,dt.$$

Dann gilt

$$\int_a^b Fg\,dt = FG|_a^b - \int_a^b fG\,dt$$

(partielle Integration).

Beweis. Wähle $f_n, g_n \in C[a,b]$ mit $f_n \to f$, $g_n \to g$ bzgl. $\|\cdot\|_1$ und setze

$$F_n(x) := F(a) + \int_a^x f_n(t)\,dt, \quad G_n(x) = G(a) + \int_a^x g_n(t)\,dt.$$

Dann sind $F_n, G_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar mit $F_n' = f_n$, $G_n' = g_n$ und $F_n \to F$, $G_n \to G$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$. Mit partieller Integration gilt

$$\int_a^b F_n g_n\,dt = F_n G_n|_a^b - \int_a^b f_n G_n\,dt.$$

Für $n \to \infty$ folgt daraus die Behauptung, da $F_n G_n \to FG$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ und $F_n g_n \to Fg$, $f_n G_n \to fG$ bzgl. $\|\cdot\|_1$. □

— Ende des Einschubs über absolutstetige Funktionen —

Beweis von Satz 1.5. Stetigkeit von F ist klar. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$F(t+2\pi) - F(t) = \int_t^{t+2\pi} f(s)\,ds = \int_0^{2\pi} f(s)\,ds = 2\pi \hat{f}(0) = 0,$$

also ist F 2π-periodisch. Weiter ist für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$:

$$\hat{F}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)e^{-int}\,dt = F(t)\frac{1}{-in}e^{-int}|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\frac{1}{-in}e^{-int}\,dt = \frac{1}{in}\hat{f}(n).$$

□

1.6. Definition und Satz: Seien $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Für fast jedes $t \in \mathbb{T}$ ist die Funktion $\tau \mapsto f(t-\tau)g(\tau)$ integrierbar über $\mathbb{T}$, und für

$$h(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t-\tau)g(\tau)\, d\tau, \quad t \in \mathbb{T},$$

gilt $h \in L^1(\mathbb{T})$, $\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$, sowie

$$\hat{h}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Die Funktion h heißt *Faltung von f und g* und wird mit $f * g$ bezeichnet. Es gilt also

$$\begin{array}{rcl} * & : & L^1(\mathbb{T}) \times L^1(\mathbb{T}) \to L^1(\mathbb{T}) \\ & & \|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1 \\ \forall n \in \mathbb{Z} & : & \widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n). \end{array}$$

Beweis. Die Abbildungen $(t, \tau) \mapsto f(t-\tau)$ und $(t, \tau) \mapsto g(\tau)$ sind messbar, also ist auch

$$(t, \tau) \mapsto F(t, \tau) := f(t-\tau)g(\tau)$$

messbar. Für fast jedes τ ist $t \mapsto F(t, \tau)$ Vielfaches von f_τ, also integrierbar. Weiter gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int \Big(\frac{1}{2\pi} \int |F(t, \tau)|\, dt \Big)\, d\tau = \frac{1}{2\pi} \int |g(\tau)| \|f_\tau\|_1\, d\tau = \|g\|_1 \|f\|_1 < \infty.$$

Nach Fubini-Tonelli ist $(t, \tau) \mapsto F(t, \tau)$ integrierbar und $h \in L^1(\mathbb{T})$, $\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$. Für $n \in \mathbb{Z}$ ist nun

$$\begin{aligned} \hat{h}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{2\pi} \int f(t-\tau)g(\tau)\, d\tau\, e^{-int}\, dt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int f(t-\tau)e^{-in(t-\tau)}\, g(\tau)e^{-in\tau}\, dt\, d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int f(t-\tau)e^{-in(t-\tau)}\, dt \cdot \frac{1}{2\pi} \int g(\tau)e^{-in\tau}\, d\tau \\ &= \hat{f}(n)\hat{g}(n), \end{aligned}$$

wobei wir beim letzten Gleichheitszeichen die Translationsinvarianz des Integrals benutzt haben. □

1.7. Satz: Die Faltung $* : L^1(\mathbb{T}) \times L^1(\mathbb{T}) \to L^1(\mathbb{T})$ ist bilinear, stetig, kommutativ und assoziativ.

Beweis. Kommutativität folgt mittels einfacher Substitution. Für die Assoziativität muss man außerdem noch Fubini verwenden. □

1.8. Lemma: Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$.

(a) Ist $n \in \mathbb{Z}$ und $\varphi(t) = e^{int}$, $t \in \mathbb{T}$, so gilt

$$\varphi * f(t) = \hat{f}(n)e^{int}, \quad t \in \mathbb{T}.$$

(b) Ist $k(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikt}$, $t \in \mathbb{T}$, ein trigonometrisches Polynom, so gilt

$$k * f(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k \hat{f}(k) e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Beweis. (b) folgt aus (a) mit Linearität. Zu (a):

$$\varphi * f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau = e^{int} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) e^{-in\tau}\, d\tau}_{=\hat{f}(n)}.$$

□

Ende 2.Vorl.

2 Summierbarkeit von Fourierreihen

Idee: Verwende den Zusammenhang von Lemma 1.8(b) und die Faltung.

2.1. Definition: Eine *Dirac-Folge* (stetiger Funktionen) auf $\mathbb{T}$ ist eine Folge (k_n) stetiger 2π-periodischer Funktionen mit

(D1) $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_n(t)\, dt = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(D2) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |k_n(t)|\, dt < \infty$,

(D3) $\forall \delta \in (0, \pi) : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_\delta^{2\pi-\delta} |k_n(t)|\, dt = 0$.

Gilt außerdem $k_n(t) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{T}$, so heißt (k_n) eine *positive Dirac-Folge* auf $\mathbb{T}$ (in diesem Fall folgt (D2) aus (D1)).

Ziel: $k_n * f \to f$ in $\|\cdot\|_1$ für jedes $f \in L^1(\mathbb{T})$.

Beispiel: Sei $k : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ stetig mit $\int k(t)\, dt = 1$ und $k(t) = 0$ für $|t| \geq \pi$. Setze für jedes $n \in \mathbb{N}$: $k_n(t) := nk(nt)$, $t \in \mathbb{T}$. Dann ist (k_n) eine Dirac-Folge. Es ist nämlich $k_n(t) = 0$ für $|t| \geq \pi/n$ und mittels einer einfachen Substitution:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_n(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(t)\, dt = 1, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |k_n(t)|\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |k(t)|\, dt.$$

Also gelten (D1) und (D2). Ist $\delta > 0$, so gilt $\int_\delta^{2\pi-\delta} |k_n(t)|\, dt = 0$ für $n > \pi/\delta$. Somit genügt (k_n) auch der Bedingung (D3).

Bezeichnung: Mit $C(\mathbb{T})$ bezeichnen wir den Raum aller stetigen und 2π-periodischen Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

2.2. Lemma: Sei X ein Banachraum, $\varphi : \mathbb{R} \to X$ stetig und 2π-periodisch und (k_n) eine Dirac-Folge auf $\mathbb{T}$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} k_n(t)\varphi(t)\, dt = \varphi(0).$$

— Einschub: Riemann-Integral für $g \in C([a,b], X)$, X Banachraum —

Wir definieren

$$\int_a^b g(t)\, dt := \lim_{\max_j |t_j - t_{j-1}| \to 0} \sum_{j=1}^n g(\xi_j)(t_j - t_{j-1}),$$

wobei $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ und $\xi_j \in [t_{j-1}, t_j]$ für alle j.

Dieser Limes existiert, da g auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ gleichmäßig stetig ist:

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ so, dass $|g(t) - g(s)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ für alle t, s mit $|t - s| < \delta$. Sind Z_1, Z_2 dann Zerlegungen mit Feinheit $< \delta/2$, so wähle man eine gemeinsame Verfeinerung $\widetilde{Z}$. Bezeichne die Zwischenpunkte von Z_1 mit ξ_j und die von Z_2 mit η_j, wobei j die Intervalle von $\widetilde{Z}$ durchnummeriere (ξ_j liegt dann nicht unbedingt im j-ten Intervall von $\widetilde{Z}$, sondern in dem Intervall von Z_1, welches Obermenge des j-ten Intervalls von Z_1 ist etc; wird ein Teilintervall von Z_1 durch $\widetilde{Z}$ in k kleinere Teilintervalle geteilt, kommt der entsprechende Zwischenwert genau k-mal unter den ξ_j vor). Wir bezeichnen $\widetilde{Z}$ versehen mit den ξ_j als $\widetilde{Z}_1$ und versehen mit den η_j als $\widetilde{Z}_2$. Für ein gegebenes Teilintervall $[t_{j-1}, t_j]$ von $\widetilde{Z}$ ist der Abstand von ξ_j und η_j dann kleiner als δ, denn die Abstände von ξ und η zu t_{j-1} und t_j sind jeweils kleiner als $\delta/2$. Somit gilt

$$\|S(g, Z_1) - S(g, Z_2)\| = \|S(g, \widetilde{Z}_1) - S(g, \widetilde{Z}_2)\| \le \sum_j \underbrace{\|g(\xi_j) - g(\eta_j)\|}_{<\varepsilon/(b-a)}(t_j - t_{j-1}) < \varepsilon.$$

Das so definierte Integral $C([a,b], X) \to X$ ist linear und es gilt:

- $\forall c \in (a,b)$: $\int_a^b g(t)\, dt = \int_a^c g(t)\, dt + \int_c^b g(t)\, dt$,
- $\| \int_a^b g(t)\, dt\| \le \int_a^b \|g(t)\|\, dt$,
- Ist Y ein weiterer Banachraum und $T : X \to Y$ linear und stetig, so ist

$$T\Big(\int_a^b g(t)\, dt\Big) = \int_a^b T(g(t))\, dt.$$

— Einschubende —

Beweis von Lemma 2.2. Für jedes $\delta > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} & |\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k_n(t)\varphi(t)\,dt - \varphi(0)| \overset{(D1)}{=} |\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k_n(t)(\varphi(t)-\varphi(0))\,dt| \\ \leq \quad & \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leq\delta} |k_n(t)||\varphi(t)-\varphi(0)|\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi} |k_n(t)|\,dt \cdot 2\|\varphi\|_\infty \\ \overset{(D2)}{\leq} \quad & C\cdot \sup_{|t|\leq\delta}|\varphi(t)-\varphi(0)| + 2\|\varphi\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}|k_n(t)|\,dt, \end{aligned}$$

wobei $C := \sup_n \|k_n\|_1$.
Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir $\delta > 0$ mit $|\varphi(t)-\varphi(0)| \leq \varepsilon/C$ für $|t| \leq \delta$ und dann $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_0 : \frac{2\|\varphi\|_\infty}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}|k_n(t)|\,dt < \varepsilon$$

(nach (D3)!). Dann gilt

$$\Big|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k_n(t)\varphi(t)\,dt - \varphi(0)\Big| \leq 2\varepsilon$$

für jedes $n \geq n_0$. □

2.3. Lemma: Für jedes $f \in L^1(\mathbb{T})$ und jedes $\tau_0 \in \mathbb{T}$ gilt

$$\lim_{\tau\to\tau_0} \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_{L^1} = 0.$$

Beweis. Wegen

$$\|f_\tau - f_{\tau_0}\|_{L^1} = \|(f_{\tau-\tau_0} - f)_{\tau_0}\|_{L^1} = \|f_{\tau-\tau_0} - f\|_{L^1}$$

reicht ein Beweis für $\tau_0 = 0$.

Schritt 1: g stetig. Es gilt

$$\begin{aligned} \|g_\tau - g\|_{L^1} &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |g(t-\tau)-g(t)|\,dt \leq \sup_{t\in\mathbb{R}}|g(t-\tau)-g(t)| \\ &\leq \sup_{\xi,\eta\in\mathbb{R}:|\xi-\eta|\leq|\tau|} |g(\xi)-g(\eta)| \to 0 \ (\tau\to 0), \end{aligned}$$

da g als stetige 2π-periodische Funktion auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

Schritt 2: $f \in L^1(\mathbb{T})$ beliebig. Sei $\varepsilon > 0$. Wir finden $g \in C(\mathbb{T})$ mit $\|f-g\|_{L^1} < \varepsilon/3$ und zu g nach Schritt 1 ein $\delta > 0$ mit $\|g_\tau - g\|_{L^1} < \varepsilon/3$ für $|t| < \delta$. Für jedes $|\tau| < \delta$ gilt dann

$$\|f_\tau - f\|_{L^1} \leq \underbrace{\|f_\tau - g_\tau\|_{L^1}}_{=\|f-g\|_{L^1}} + \|g_\tau - g\|_{L^1} + \|g-f\|_{L^1} < \varepsilon.$$

□

2.4. Lemma: Für $k \in C(\mathbb{T})$ und $f \in L^1(\mathbb{T})$ gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k(\tau) f_\tau \, d\tau = k * f.$$

Beweis. Schritt 1: $f = g$ ist stetig. Dann ist $\tau \mapsto g_\tau$ als Abbildung $\mathbb{T} \to C(\mathbb{T})$ stetig. Für festes $t \in \mathbb{T}$ ist die Abbildung $C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$, $h \mapsto h(t)$ linear und stetig, also gilt

$$\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k(\tau) g_\tau \, d\tau\Big)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k(\tau) \underbrace{g_\tau(t)}_{=g(t-\tau)} \, d\tau = k * g(t).$$

Schritt 2: Nach §1 ist $L^1(\mathbb{T}) \to L^1(\mathbb{T})$, $f \mapsto k * f$ linear und stetig. Außerdem gilt

$$\|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k(\tau) f_\tau \, d\tau\|_{L^1} \le \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |k(\tau)| \underbrace{\|f_\tau\|_{L^1}}_{=\|f\|_{L^1}} \, d\tau \le \|k\|_\infty \|f\|_{L^1},$$

dh die Abbildung $f \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k(\tau) f_\tau \, d\tau$ ist linear und stetig $L^1(\mathbb{T}) \to L^1(\mathbb{T})$.
Da $C(\mathbb{T})$ dicht in $L^1(\mathbb{T})$ ist, stimmen die Abbildungen auf $L^1(\mathbb{T})$ überein. □

2.5. Satz: Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$ und (k_n) eine Dirac-Folge auf $\mathbb{T}$. Dann gilt bzgl. $\|\cdot\|_{L^1}$:

$$f = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k_n(\tau) f_\tau \, d\tau = \lim_{n\to\infty} k_n * f.$$

Beweis. Lemma 2.3, Lemma 2.2 und Lemma 2.4. □

Bemerkung: Nach Lemma 1.8(b) gilt für $f \in L^1(\mathbb{T})$ und jedes $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e^{ikt} = D_N * f(t), \quad t \in \mathbb{T},$$

wobei

$$D_N(t) := \sum_{k=-N}^{N} e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{T},$$

Dirichlet-Kern heißt.

Frage: Ist (D_N) eine Dirac-Folge?

Die Antwort ist leider negativ.

2.6. Lemma: (a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$D_n(t) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)}.$$

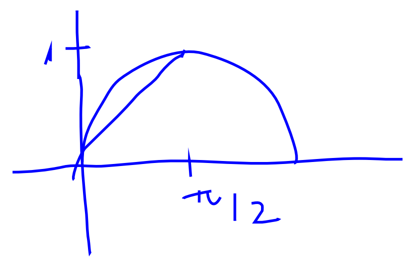
(b) Es gilt $\|D_n\|_{L^1} \to \infty (n \to \infty)$, genauer $\|D_n\|_{L^1} \ge c \operatorname{Log} n + d$.

Somit ist (D_n) keine Dirac-Folge, da (D2) wegen (b) nicht gilt!

Beweis. zu (a): Es gilt

$$\begin{aligned} 2i\sin(t/2)\Big(\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}\Big) &= \Big(e^{it/2}-e^{-it/2}\Big)\Big(\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}\Big) \\ &= \sum_{k=-n}^{n}\Big(e^{i(k+1/2)t}-e^{i(k-1/2)t}\Big) \\ &= e^{i(n+1/2)t}-e^{-i(n+1/2)t} = 2i\sin((n+\frac{1}{2})t). \end{aligned}$$

zu (b): Zunächst stellen wir fest, dass für $s \in [0, \pi/2]$ gilt:



$$\frac{2}{\pi}s \le \sin s \le s.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt dann nach (a):

$$\begin{aligned} \|D_n\|_{L^1} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big|\frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)}\Big|\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Big|\frac{\sin(m\tau)}{\sin\tau}\Big|\,d\tau,\ \text{ wobei } m=2n+1. \\ &\ge \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m-1}\int_{k\pi/m}^{(2k+1)\pi/(2m)}\Big|\frac{\sin(m\tau)}{\sin\tau}\Big|\,d\tau \\ &= \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m-1}\int_0^{\pi/(2m)}\frac{\sin(mt)}{\sin(t+k\pi/m)}\,dt \\ &\ge \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m-1}\int_0^{\pi/(2m)}\frac{\frac{2mt}{\pi}}{t+\frac{k\pi}{m}}\,dt \\ &\ge \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\frac{2m}{\pi}}{\frac{\pi}{2m}+\frac{k\pi}{m}}\underbrace{\int_0^{\pi/(2m)} t\,dt}_{=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{4m^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{2k+1} \longrightarrow \infty\ (n\to\infty), \end{aligned}$$

da $m = 2n + 1$. $\square$

Erinnerung an Analysis I (übliche Übungsaufgabe): Gilt $a_n \to a$ $(n \to \infty)$, so folgt $b_n := \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \to a$ $(n \to \infty)$. Dabei ist (b_n) die Folge der arithmetischen Mittel. Die

Umkehrung ist i.a. falsch, wie das Beispiel $a_n = (-1)^n$ zeigt: Hier gilt $|b_n| \le 1/n$, also $b_n \to 0$, aber (a_n) konvergiert nicht.

Wir werden diese Beobachtung anwenden auf Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, dh auf die Folge der Partialsummen $(s_n) = (\sum_{k=1}^{n} a_k)$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *Cesaro-summierbar* mit Wert s, falls die Folge der *Cesaro-Mittel* $(\sigma_n) = (\frac{s_1+s_2+\ldots+s_n}{n})$ gegen s konvergiert.

Wir führen die folgenden **Bezeichnungen** ein: Für $f \in L^1(\mathbb{T})$ und $N \in \mathbb{N}_0$ sei

$$\begin{aligned} S_N(f)(t) &:= S_N(f,t) := \sum_{k=-N}^{N} S_k(\cancel{f},t), \quad t \in \mathbb{T} \qquad \hat{f}(k)e^{ikt} \\ \sigma_N(f)(t) &:= \sigma_N(f,t) := \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n(f,t), \quad t \in \mathbb{T}. \end{aligned}$$

Es gilt dann (wegen Lemma 1.8(b)):

$$\sigma_N(f,t) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=-N}^{N}(N+1-|k|)\hat{f}(k)e^{ikt} = \sum_{k=-N}^{N}\Big(1-\frac{|k|}{N+1}\Big)\hat{f}(k)e^{ikt} = F_N * f(t),$$

wobei

$$F_N(t) := \sum_{k=-N}^{N}\Big(1-\frac{|k|}{N+1}\Big)e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{T}, N \in \mathbb{N}_0,$$

der *Fejér-Kern* ist.

Frage: Ist (F_n) eine Dirac-Folge auf $\mathbb{T}$?

Nach Konstruktion gilt $F_n = \frac{1}{n+1}(D_0 + D_1 + \ldots + D_n)$, also genügt die Folge (F_n) der Bedingung (D1).

2.7. Lemma: (a) Für $n \in \mathbb{N}_0$, $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$F_n(t) = \frac{1}{n+1}\Big(\frac{\sin(\frac{n+1}{2}t)}{\sin(t/2)}\Big)^2.$$

(b) (F_n) ist eine positive Dirac-Folge.

Beweis. zu (a): Es gilt

$$\sin^2(t/2) = \frac{1}{2}(1-\cos t) = -\frac{1}{4}e^{-it} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{it}$$

und weiter

$$
\begin{aligned}
&\Big(-\frac{1}{4}e^{-it}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{it}\Big)\sum_{k=-n}^{n}\Big(1-\frac{|k|}{n+1}\Big)e^{ikt}\\
=\;& \sum_{k=-n}^{n}-\Big(1-\frac{|k|}{n+1}\Big)\frac{e^{i(k-1)t}}{4}+\sum_{k=-n}^{n}\Big(1-\frac{|k|}{n+1}\Big)\frac{e^{ikt}}{2}+\sum_{k=-n}^{n}-\Big(1-\frac{|k|}{n+1}\Big)\frac{e^{i(k+1)t}}{4}\\
=\;& \sum_{k=-(n+1)}^{n}-\Big(1-\frac{|k+1|}{n+1}\Big)\frac{e^{ikt}}{4}+\sum_{k=-n}^{n}\Big(1-\frac{|k|}{n+1}\Big)\frac{e^{ikt}}{2}+\sum_{k=-n}^{n+1}-\Big(1-\frac{|k-1|}{n+1}\Big)\frac{e^{ikt}}{4}\\
=\;& \frac{1}{n+1}\Big(-\frac{1}{4}e^{-i(n+1)t}-\frac{1}{4}e^{i(n+1)t}+\frac{1}{2}\Big),
\end{aligned}
$$

denn für $|k|\leq n$ gilt

$$
\frac{|k+1|-2|k|+|k-1|}{4(n+1)}=\begin{cases}\frac{1}{2(n+1)} & ,k=0\\ 0 & ,1\leq |k|\leq n\end{cases}.
$$

zu (b): Wie oben gesehen, genügt (F_n) der Bedingung (D1). Nach (a) ist $F_n(t)\geq 0$ für alle $n\in\mathbb{N}_0$, $t\in\mathbb{T}$, also genügt (F_n) der Bedingung (D2). Zum Beweis von (D3) sei $\delta\in(0,\pi)$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}|F_n(t)|\,dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}\frac{1}{n+1}\Big(\frac{\sin(\frac{n+1}{2}t)}{\sin(t/2)}\Big)^2\,dt\\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}dt\cdot\frac{1}{(n+1)\sin(\delta/2)}\longrightarrow 0\ (n\to\infty).
\end{aligned}
$$

□

2.8. Satz: Sei $f\in L^1(\mathbb{T})$. Dann gilt

$$
\|\sigma_n(f)-f\|_{L^1(\mathbb{T})}\longrightarrow 0\ (n\to\infty).
$$

Beweis. Satz 2.5, Lemma 2.7 und die Darstellung $\sigma_n(f)=F_n*f$. □

2.9. Folgerung: Ist $f\in L^1(\mathbb{T})$ mit $\hat{f}(n)=0$ für alle $n\in\mathbb{Z}$, so ist $f=0$ fast überall.

Beweis. $\sigma_n(f)=0$ und Satz 2.8. □

2.10. Satz (Riemann-Lebesgue-Lemma): Für jedes $f\in L^1(\mathbb{T})$ gilt

$$
\hat{f}(n)\to 0\quad(|n|\to\infty).
$$

Beweis. Sei $\varepsilon>0$. Wähle $n_0\in\mathbb{N}$ mit $\|\sigma_{n_0}(f)-f\|_{L^1}<\varepsilon$. Dann gilt für alle $n\geq n_0$:

$$
|\hat{f}(n)|=|(f-\widehat{\sigma_{n_0}(f)})(n)|\leq\|f-\sigma_{n_0}(f)\|_{L^1}<\varepsilon.
$$

□

Homogene Banachräume

2.11. Definition: Ein *homogener Banachraum auf* $\mathbb{T}$ ist ein Teilraum B von $L^1(\mathbb{T})$ mit Norm $\|\cdot\|_B \geq \|\cdot\|_{L^1}$ so, dass $(B, \|\cdot\|_B)$ ein Banachraum ist und dass gilt:

(H1) Für alle $f \in B$ und $\tau \in \mathbb{T}$ ist $f_\tau \in B$ und $\|f_\tau\|_B = \|f\|_B$.

(H2) Für alle $f \in B$ und $\tau_0 \in \mathbb{T}$ gilt $\lim_{\tau \to \tau_0} \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_B = 0$.

Ende 4.Vorl.

Bemerkung: (a) $L^1(\mathbb{T})$ ist ein homogener Banachraum (nach Lemma 2.3).

(b) Es reicht, dass $\|\cdot\|_{L^1} \leq c_0 \|\cdot\|_B$ für eine Konstante c_0 und dass für jedes $f \in B$ die Abbildung $\tau \to f_\tau$ wohldefiniert und stetig $\mathbb{T} \to B$ ist (Übungsaufgabe).

2.12. Beispiele: (a) $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$. (H2) folgt aus der gleichmäßigen Stetigkeit von $f \in C(\mathbb{T})$.

(b) $C^n(\mathbb{T})$, der Raum aller n-mal stetig differenzierbaren 2π-periodischen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, ist ein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$ bzgl. der Norm $\|f\|_{C^n(\mathbb{T})} = \sum_{k=0}^n \|f^{(k)}\|_\infty$.

(c) Für $1 \leq p < \infty$ ist $L^p(\mathbb{T}) = \{f \in L^1(\mathbb{T}) : \|f\|_{L^p} := \left(\frac{1}{2\pi}\int_\mathbb{T} |f(t)|^p \, dt\right)^{1/p} < \infty\}$ ein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$. Die Eigenschaft (H2) gilt für $f \in C(\mathbb{T})$ und $C(\mathbb{T})$ ist dicht in $L^p(\mathbb{T})$.

(d) Der Raum $(L^\infty(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ ist kein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$, da für $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ gilt:

$$\tau \mapsto f_\tau \text{ ist stetig bzgl. } \|\cdot\|_\infty \iff f \text{ ist gleichmäßig stetig.}$$

2.13. Lemma: Sei $B \subseteq L^1(\mathbb{T})$ ein homogener Banachraum, der (H1) genügt. Sei

$$B_c := \{f \in B : \ \tau \mapsto f_\tau \text{ ist stetig } \mathbb{T} \to B \ \}.$$

Dann ist B_c ein abgeschlossener Teilraum von $(B, \|\cdot\|_B)$ und ein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$.

Das folgende Theorem verallgemeinert Satz 2.5.

2.14. Theorem: Sei B ein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$. Ist $f \in B$ und (k_n) eine Dirac-Folge auf $\mathbb{T}$, so gilt

$$\|k_n * f - f\|_B \longrightarrow 0 \ (n \to \infty).$$

2.15. Folgerung: (a) Ist B homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$, so ist

$$\mathbb{P}_B := \{p \in B : \ p \text{ ist trigonometrisches Polynom } \}$$

dicht in B.

(b) Jede stetige 2π-periodische Funktion kann gleichmäßig durch trigonometrische Polynome approximiert werden (Weierstraß).

Beweis. (a) Bzgl. $\|\cdot\|_B$ gilt nach Theorem 2.14:

$$\sigma_n(f) = F_n * f \longrightarrow f.$$

(b) Beispiel 2.12(a) und Theorem 2.14. □

Beweis von Theorem 2.14. Wie wir im Beweis zeigen, gilt:

Ist $f \in B$ und $k \in C(\mathbb{T})$, so gilt $k * f \in B$ und

$$\|k * f\|_B \leq \|k\|_{L^1}\|f\|_B.$$

Sei $f \in B$. Dann ist $\tau \mapsto f_\tau$ stetig als Abbildung $\mathbb{T} \to B$ und nach Lemma 2.2 gilt:

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k_n(\tau) f_\tau \, d\tau}_{\in B} \longrightarrow f \ (n \to \infty) \text{ bzgl. } \|\cdot\|_B.$$

Wegen $B \subseteq L^1(\mathbb{T})$ ist $f \in L^1(\mathbb{T})$ und $\tau \mapsto f_\tau$ ist stetig als Abbildung $\mathbb{T} \to L^1(\mathbb{T})$. Somit existiert

$$\frac{1}{2\pi}\|\cdot\|_{L^1}\text{-}\int_{\mathbb{T}} k_n(\tau) f_\tau \, d\tau \overset{2.4}{=} k_n * f.$$

Wegen $\|\cdot\|_B \geq \|\cdot\|_{L^1}$ gilt $\|\cdot\|_{L^1}\text{-}\int \ldots = \|\cdot\|_B\text{-}\int \ldots$ (betrachte die Konvergenz entsprechender Riemann-Summen). Also gilt $k_n * f \in B$ und $k_n * f \longrightarrow f$ bzgl. $\|\cdot\|_B$. Die Abschätzung ergibt sich folgendermaßen:

$$\|k * f\|_B = \|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k(\tau) f_\tau \, d\tau\|_B \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |k(t)| \|f_\tau\|_B \, d\tau = \|k\|_{L^1}\|f\|_B.$$

□

2.16. Weitere Dirac-Folgen: (a) Der *de la Vallée-Poussin-Kern* (→ Übungsaufgabe)

$$V_n(t) := 2F_{2n+1}(t) - F_n(t).$$

(b) Der *Poisson-Kern*: Definiere für $r \in [0, 1)$:

$$P(r,t) := 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos(kt), \quad t \in \mathbb{T}.$$

Hier betrachtet man $r \to 1-$ statt $n \to \infty$. Die Reihe konvergiert absolut in $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{T}$. Es ist $\cos(kt) = \operatorname{Re}(e^{ikt})$. Somit gilt

$$\begin{aligned}
P(r,t) &= 1 + 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty}(re^{it})^k \\
&= 1 + 2\operatorname{Re}\frac{re^{it}}{1-re^{it}} \\
&= \operatorname{Re}\Big(\frac{1+re^{it}}{1-re^{it}}\Big) = \operatorname{Re}\Big(\frac{1+re^{it}}{1-re^{it}}\frac{1-re^{it}}{1-re^{it}}\Big) \\
&= \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2},
\end{aligned}$$

wie man durch Rechnung bestätigt. Insbesondere ist $P(r,\cdot)$ monoton fallend auf $[0,\pi]$.

zu (D1): Es gilt (wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} P(r,t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} dt + \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 1.$$

zu (D2): Nach obiger Darstellung ist $P(r,t) \geq 0$, da $1-r^2 > 0$ und $1-2r\cos t + r^2 \geq 1-2r+r^2 > 0$. Somit folgt (D2) aus (D1).

zu (D3): Für $\delta \in (0,\pi)$ gilt:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta} P(r,t)\,dt \leq \frac{2(\pi-\delta)}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta + r^2} \longrightarrow \frac{2(\pi-\delta)}{2\pi}\frac{0}{2(1-\cos\delta)} \ (r\to 1-).$$

Nach Theorem 2.14 gilt somit

$$P(r,\cdot) * f \longrightarrow f \ (r\to 1-) \text{ bzgl. } \|\cdot\|_B,$$

falls $f \in B$ und B homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$ ist. Dabei ist

$$P(r,t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} r^k \underbrace{\cos(kt)}_{(e^{ikt}+e^{-ikt})/2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ikt}$$

und wegen der gleichmäßigen Konvergenz folglich

$$(P(r,\cdot) * f)(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}\hat{f}(n)e^{int},\ t\in\mathbb{T}.$$

Die rechte Seite bezeichnet man als *Abel-Mittel* der Reihe $\sum_n \hat{f}(n)e^{int}$. Die Konvergenzaussage bedeutet dann, dass die Fourierreihe $\sum_n \hat{f}(n)e^{in(\cdot)}$ in B *Abel-summierbar* ist mit Wert f.

Ende 5.Vorl.

— Bonus —

Definition: Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt *Abel-summierbar* mit Wert $s \in \mathbb{R}$, falls für jedes $r \in [0,1)$ das *Abel-Mittel* $A(r) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ konvergiert und $\lim_{r\to 1-} A(r) = s$ gilt.

Dabei gilt: Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ Cesáro-summierbar mit Wert s, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ Abel-summierbar mit Wert s.

Beweis. Setze $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ und $\sigma_n := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k$. Es gelte $\sigma_n \to s$. Für $r\in[0,1)$ ist

$$A(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(s_k - s_{k-1})r^k = (1-r)\sum_{k=0}^{\infty} s_k r^k = (1-r)^2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\sigma_k r^k$$

und $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)r^k = (1-r)^{-2}$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Wir finden $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|\sigma_k - s| < \varepsilon$ für $k \geq n_0$. Dann gilt für $r \in [0,1)$:

$$\begin{aligned} |A(r) - s| &= |(1-r)^2 \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(\sigma_k - s)r^k| \\ &\leq \underbrace{(1-r)^2 \sum_{k=0}^{n_0}(k+1)|\sigma_k - s|r^k}_{\to 0 \ (r \to 1-)} + \underbrace{(1-r)^2 \sum_{k>n_0}(k+1)\varepsilon r^k}_{\leq \varepsilon}. \end{aligned}$$

□

— Ende des Bonus —

3 Fourierreihen in $L^2(\mathbb{T})$ und in Dualräumen

3.1. Erinnerung: (a) Der Raum $L^2(\mathbb{T})$ ist gegeben durch

$$L^2(\mathbb{T}) = \{f \in L^1(\mathbb{T}) : \|f\|_{L^2} := \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2\,dt\Big)^{1/2} < \infty\}.$$

Der Raum $L^2(\mathbb{T})$ ist ein Hilbertraum bzgl. des Skalarproduktes

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

Es ist $\|f\|_{L^2} = \sqrt{\langle f, f\rangle}$.
Zwei Funktionen $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ heißen *orthogonal*, geschrieben $f \perp g$, wenn $\langle f, g\rangle = 0$ ist.

(b) Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und $\Lambda \neq 0$. Eine Familie $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ heißt *Orthonormalsystem* (ONS), falls gilt

$$\forall \lambda, \mu \in \Lambda : \langle f_\lambda, f_\mu\rangle = \delta_{\lambda\mu}.$$

Ein ONS $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ heißt *vollständig*, falls für alle $f \in H$ gilt:

$$\Big(\forall \lambda \in \Lambda : \langle f, f_\lambda\rangle = 0\Big) \Longrightarrow f = 0.$$

Ein vollständiges ONS kann also nicht echt vergrößert werden.

(c) Ist $(\varphi_j)_{j=1}^N$ ein ONS und sind $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{C}$, so gilt

$$\|\sum_{j=1}^N a_j\varphi_j\|^2 = \sum_{j=1}^N |a_j|^2$$

(vgl. Lineare Algebra).

(d) Ist $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ein ONS, $f \in H$ und $(a_j) := (\langle f, \varphi_j\rangle)$, so gilt für jedes $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|f - \sum_{j=1}^{N} a_j\varphi_j\|^2 = \langle f - \sum a_j\varphi_j, f - \sum a_j\varphi_j\rangle \\ &= \|f\|^2 - \sum_j a_j\langle\varphi_j, f\rangle - \sum_j \overline{a_j}\langle f, \varphi_j\rangle + \sum_j |a_j|^2 \\ &= \|f\|^2 - \sum_{j=1}^{N} |a_j|^2. \end{aligned}$$

Also ist

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 \leq \|f\|^2 \quad \text{(Besselsche Ungleichung).}$$

(e) **Satz:** Sei $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ein ONS im Hilbertraum H. Dann sind äquivalent:

(i) $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ist vollständig.

(ii) $\forall f \in H$: $f = \sum_{j=1}^{\infty}\langle f, \varphi_j\rangle\varphi_j$.

(iii) $\forall f \in H$: $\|f\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_j\rangle|^2$.

(iv) $\forall f, g \in H$: $\langle f, g\rangle = \sum_{j=1}^{\infty}\langle f, \varphi_j\rangle\overline{\langle g, \varphi_j\rangle}$.

Die Eigenschaften (iii) und (iv) heißen *Parsevalsche* Gleichungen.

(f) **Satz:** Ist $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein vollständiges ONS, so ist die Abbildung

$$H \to l^2(\mathbb{N}),\ f \mapsto (\langle f, \varphi_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$$

eine lineare und isometrische Bijektion.

3.2. Satz: Im Hilbertraum $(L^2(\mathbb{T}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ bilden die Funktionen $(e^{in(\cdot)})_{n\in\mathbb{Z}}$ ein vollständiges ONS.

Beweis. Wegen

$$\langle e^{in(\cdot)}, e^{im(\cdot)}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{int}\overline{e^{imt}}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{i(n-m)t}\,dt = \delta_{nm}$$

ist die Folge ein ONS. Ist $f \in L^2(\mathbb{T})$ mit

$$0 = \langle f, e^{in(\cdot)}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-int}\,dt = \hat{f}(n)$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$, so folgt $f = 0$ fast überall nach Folgerung 2.9 (beachte $f \in L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$). □

3.3. Folgerung: Für alle $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ gilt:

(a) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 \, dt$,

(b) $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)\overline{g(t)} \, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}$,

(c) $f = \| \cdot \|_{L^2} - \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{in(\cdot)}}_{=S_N(f)}$.

(d) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$, so gibt es genau ein $h \in L^2(\mathbb{T})$ mit $\hat{h}(n) = a_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, nämlich

$$f = \| \cdot \|_{L^2} - \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{in(\cdot)}.$$

Bemerkung: Folgerung 3.3(c) besagt, dass Fourierreihen sich in $L^2(\mathbb{T})$ besser verhalten, als wir dies nach Satz 2.8 wissen.

Frage: Wie ist das für homogene Banachräume $B \neq L^2(\mathbb{T})$?

3.4. Satz: Sei B ein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$. Dann sind äquivalent:

(i) Für alle $f \in B$ gilt $\|S_n(f) - f\|_B \to 0$ $(n \to \infty)$.

(ii) Es gibt ein $C > 0$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $f \in B$ gilt: $\|S_n(f)\|_B \leq C\|f\|_B$.

Eigenschaft (ii) ist gleichbedeutend mit $\sup_n \|S_n\|_{B\to B} < \infty$.

Beweis. Nach Folgerung 2.15(a) ist $\mathbb{P}_B$ dicht in B. Für $p \in \mathbb{P}_B$ gilt $S_n(p) = p$, wenn $n \geq \operatorname{Grad} p$. Die Aussage gilt somit nach Banach-Steinhaus ($\to$ Funktionalanalysis). □

Bemerkung: In der Situation von Satz 3.4 ist nach Theorem 2.14:

$$\|S_n(f)\|_B = \|D_n * f\|_B \leq \|D_n\|_{L^1} \|f\|_B,$$

also $\|S_n\|_{B\to B} \leq \|D_n\|_{L^1}$.

3.5. Beispiele: (a) Es ist $\|S_n\|_{L^2\to L^2} = 1$ (nach 3.3(a) und 3.1(d)).

(b) $B = L^1(\mathbb{T})$: Für den Fejér-Kern gilt $\|F_N\|_{L^1} = 1$ für jedes $N \in \mathbb{N}$. Für festes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\|S_n(F_N)\|_{L^1} = \|D_n * F_N\|_{L^1} = \|F_N * D_n\|_{L^1} \to \|D_n\|_{L^1} \ (N \to \infty).$$

Somit ist $\|S_n\|_{L^1\to L^1} = \|D_n\|_{L^1} \to \infty$ $(n \to \infty)$ nach Lemma 2.6.

(c) $B = C(\mathbb{T})$: Sei $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Sei $\psi_n \in C(\mathbb{T})$ mit $\|\psi_n\|_\infty = 1$ und $\psi_n(-t) = \operatorname{sgn}(D_n(t))$ für $t \in \mathbb{T} \setminus M$, wobei $\frac{1}{2\pi}\int_M |D_n(t)|\,dt < \varepsilon/2$ (M ist eine "kleine" Obermenge der Sprungstellen von $\operatorname{sgn} D_n$). Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|S_n(\psi_n)\|_\infty &\geq |S_n(\psi_n, 0)| = \frac{1}{2\pi}\Big|\int_{\mathbb{T}} D_n(t)\psi_n(-t)\,dt\Big| \\
&\geq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}\setminus M} |D_n(t)|\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_M |D_n(t)|\,dt \\
&\geq \|D_n\|_{L^1} - 2\cdot\frac{1}{2\pi}\int_M |D_n(t)|\,dt \geq \|D_n\|_{L^1} - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Somit ist auch hier $\|S_n\|_{C(\mathbb{T})\to C(\mathbb{T})} = \|D_n\|_{L^1} \to \infty$ $(n \to \infty)$.

Fazit: Es gibt $f \in L^1(\mathbb{T})$ und $g \in C(\mathbb{T})$ mit

$$S_n(f) \not\to f \text{ bzgl. } \|\cdot\|_{L^1}, \quad S_n(g) \not\to g \text{ bzgl. } \|\cdot\|_\infty.$$

Fourierreihen linearer Funktionale

3.6. Definition: Sei B ein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$ mit $e^{in(\cdot)} \in B$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Sei

$$B' := \{\mu : B \to \mathbb{C} : \ \mu \text{ ist stetig}\}$$

der *Dualraum von B* mit Norm

$$\|\mu\|_{B'} := \sup_{\|f\|_B \leq 1} |\mu(f)|.$$

Für $\mu \in B'$ und $n \in \mathbb{Z}$ heißt

$$\hat{\mu}(n) := \mu(e^{-in(\cdot)})$$

der *n-te Fourierkoeffizient von μ* und

$$S[\mu] \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\mu}(n)e^{in(\cdot)} \quad \text{(formal!)}$$

die *Fourierreihe von μ*.

3.7. Bemerkung: Sei B ein homogener Banachraum mit $\overline{f} \in B$ und $\|\overline{f}\|_B = \|f\|_B$ für alle $f \in B$. Setze $B^* := B'$. Für $f \in B$, $\mu \in B^*$ schreiben wir

$$\langle f, \mu\rangle := \overline{\mu(\overline{f})}, \quad \langle \mu, f\rangle := \overline{\langle f, \mu\rangle} = \mu(\overline{f})$$

in Analogie zum L^2-Skalarprodukt: Für $B = L^2(\mathbb{T})$ ist

$$L^2(\mathbb{T}) \to B^*, \quad g \mapsto \langle \cdot, g\rangle_{L^2}$$