# 1 Fourierreihen $2\pi$-periodischer Funktionen

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine $2\pi$-periodische Funktion, dh gilt

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f(x + 2\pi) = f(x),$$

so ist $f$ eindeutig bestimmt durch $f|_{[0,2\pi)}$. Man kann $f$ auch auffassen als Funktion $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, wobei

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} = \{x + 2\pi\mathbb{Z} : x \in \mathbb{R}\} = \{x + 2\pi\mathbb{Z} : x \in [0, 2\pi)\}.$$

**Bemerkung:** $(\mathbb{R}, +)$ ist abelsche Gruppe und $2\pi\mathbb{Z}$ ist Untergruppe. Die Abbildung $t \mapsto e^{it}$ ist ein surjektiver Homomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ nach $(\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \cdot)$ mit Kern $2\pi\mathbb{Z}$, also ist

$$(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \cdot), \quad [t] \mapsto e^{it}$$

ein Isomorphismus. $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ heißt (eindimensionaler) *Torus*, Bez: $\mathbb{T}$. Wir verwenden meist $[0, 2\pi)$ als Modell für $\mathbb{T}$. Wir verwenden das Lebeguemaß auf $\mathbb{T}$ und schreiben $\int_{\mathbb{T}} \ldots = \int_0^{2\pi} \ldots$.

**1.1. Definition:** Ein *trigonometrisches Polynom* ist ein Ausdruck der Form

$$P(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikt}, \tag{1}$$

wobei $N \in \mathbb{N}$ und $c_k \in \mathbb{C}$. Die auftretenden $k$ heißen *Frequenzen* und die $c_k$ die *Koeffizienten* von $P$. $\max\{k \in \mathbb{N}_0 : |a_k| + |a_{-k}| > 0\}$ heißt *Grad von* $P$. Die zugehörigen Funktionen $\mathbb{T} \to \mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ werden ebenfalls mit $P$ bezeichnet.

**1.2. Bemerkung:** Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikt}\, dt = \begin{cases} 1 & , k = 0 \\ 0 & , k \neq 0 \end{cases} .$$

Somit gilt für ein trigonometrisches Polynom wie in (1):

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(t) e^{-int}\, dt = \sum_{k=-N}^{N} c_k \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t}\, dt = \begin{cases} c_n & , |n| \leq N \\ 0 & , |n| > N \end{cases} .$$

**Problem:** Für trigonometrische Reihen $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$ stellen sich die Fragen nach Konvergenz, nach der repräsentierten Funktion und nach der Bestimmung der Koeffizienten $c_k$ aus der repräsentierten Funktion.

**1.3. Definition:** Für $f \in L^1(\mathbb{T})$ und $n \in \mathbb{Z}$ heißt

$$\hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{int} \, dt$$

der *$n$-te Fourierkoeffizient von $f$*, und

$$S[f] \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int} \quad \text{(formal!)}$$

heißt *Fourierreihe von $f$*.

**Frage:** Wie ist die Beziehung zwischen $S[f]$ und $f$?

**1.4. Lemma:** (a) Die Abbildung $f \mapsto (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ ist linear und stetig $L^1(\mathbb{T}) \to l^\infty(\mathbb{Z})$ mit

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| \leq \|f\|_1 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| \, dt.$$

(b) Für $f \in L^1(\mathbb{T})$ und $\tau \in \mathbb{T}$ sei $f_\tau \in L^1(\mathbb{T})$ definiert durch

$$f_\tau(t) := f(t - \tau), \quad t \in \mathbb{T}.$$

Dann gilt

$$\widehat{f_\tau}(n) = e^{-in\tau} \hat{f}(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

*Beweis.* (a) Linearität ist klar. Für $n \in \mathbb{Z}$ ist

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| \underbrace{|e^{-int}|}_{=1} \, dt = \|f\|_1.$$

(b) Es gilt mittels der Substitution $t = s + \tau$:

$$\begin{aligned}
\widehat{f_\tau}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t-\tau) e^{-int} \, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) e^{-ins} e^{-in\tau} \, ds \\
&= e^{-in\tau} \hat{f}(n).
\end{aligned}$$

□

Ende 1.Vorl.

**1.5. Satz:** Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$ mit $\hat{f}(0) = 0$. Dann definiert $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \int_0^t f(s) \, ds$ eine $2\pi$-periodische stetige Funktion, dh $F : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ist stetig, und es gilt

$$\hat{F}(n) = \frac{1}{in} \hat{f}(n), \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$