1 Fourierreihen 2π-periodischer Funktionen

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion, dh gilt

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f(x + 2\pi) = f(x),$$

so ist f eindeutig bestimmt durch $f|_{[0,2\pi)}$. Man kann f auch auffassen als Funktion $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, wobei

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} = \{x + 2\pi\mathbb{Z} : x \in \mathbb{R}\} = \{x + 2\pi\mathbb{Z} : x \in [0, 2\pi)\}.$$

Bemerkung: $(\mathbb{R}, +)$ ist abelsche Gruppe und $2\pi\mathbb{Z}$ ist Untergruppe. Die Abbildung $t \mapsto e^{it}$ ist ein surjektiver Homomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ nach $(\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \cdot)$ mit Kern $2\pi\mathbb{Z}$, also ist

$$(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \cdot), \quad [t] \mapsto e^{it}$$

ein Isomorphismus. $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ heißt (eindimensionaler) *Torus*, Bez: $\mathbb{T}$. Wir verwenden meist $[0, 2\pi)$ als Modell für $\mathbb{T}$. Wir verwenden das Lebeguemaß auf $\mathbb{T}$ und schreiben $\int_{\mathbb{T}} \ldots = \int_0^{2\pi} \ldots$.

1.1. Definition: Ein *trigonometrisches Polynom* ist ein Ausdruck der Form

$$P(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikt}, \tag{1}$$

wobei $N \in \mathbb{N}$ und $c_k \in \mathbb{C}$. Die auftretenden k heißen *Frequenzen* und die c_k die *Koeffizienten* von P. $\max\{k \in \mathbb{N}_0 : |a_k| + |a_{-k}| > 0\}$ heißt *Grad von* P. Die zugehörigen Funktionen $\mathbb{T} \to \mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ werden ebenfalls mit P bezeichnet.

1.2. Bemerkung: Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikt}\, dt = \begin{cases} 1 & , k = 0 \\ 0 & , k \neq 0 \end{cases} .$$

Somit gilt für ein trigonometrisches Polynom wie in (1):

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(t) e^{-int}\, dt = \sum_{k=-N}^{N} c_k \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t}\, dt = \begin{cases} c_n & , |n| \leq N \\ 0 & , |n| > N \end{cases} .$$

Problem: Für trigonometrische Reihen $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$ stellen sich die Fragen nach Konvergenz, nach der repräsentierten Funktion und nach der Bestimmung der Koeffizienten c_k aus der repräsentierten Funktion.

1.3. Definition: Für $f \in L^1(\mathbb{T})$ und $n \in \mathbb{Z}$ heißt

$$\hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{int}\, dt$$

der *n-te Fourierkoeffizient von f*, und

$$S[f] \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int} \quad \text{(formal!)}$$

heißt *Fourierreihe von f*.

Frage: Wie ist die Beziehung zwischen $S[f]$ und f?

1.4. Lemma: (a) Die Abbildung $f \mapsto (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ ist linear und stetig $L^1(\mathbb{T}) \to l^\infty(\mathbb{Z})$ mit

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| \leq \|f\|_1 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|\, dt.$$

(b) Für $f \in L^1(\mathbb{T})$ und $\tau \in \mathbb{T}$ sei $f_\tau \in L^1(\mathbb{T})$ definiert durch

$$f_\tau(t) := f(t - \tau), \quad t \in \mathbb{T}.$$

Dann gilt

$$\widehat{f_\tau}(n) = e^{-in\tau} \hat{f}(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. (a) Linearität ist klar. Für $n \in \mathbb{Z}$ ist

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| \underbrace{|e^{-int}|}_{=1}\, dt = \|f\|_1.$$

(b) Es gilt mittels der Substitution $t = s + \tau$:

$$\begin{aligned} \widehat{f_\tau}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t-\tau) e^{-int}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) e^{-ins} e^{-in\tau}\, ds \\ &= e^{-in\tau} \hat{f}(n). \end{aligned}$$

□

Ende 1.Vorl.

1.5. Satz: Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$ mit $\hat{f}(0) = 0$. Dann definiert $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \int_0^t f(s)\, ds$ eine 2π-periodische stetige Funktion, dh $F : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ist stetig, und es gilt

$$\hat{F}(n) = \frac{1}{in} \hat{f}(n), \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Zum Beweis benötigen wir ein Lemma, das im folgenden Einschub bereitgestellt wird.

— Einschub über absolutstetige Funktionen —

Definition (ad hoc): Eine Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt *absolutstetig* auf $[a,b]$, falls es $f \in L^1[a,b]$ gibt mit

$$F(d) - F(c) = \int_c^d f(t)\,dt \quad \text{für alle } [c,d] \subseteq [a,b].$$

Lemma: Seien $F, G : [a,b] \to \mathbb{C}$ absolutstetig auf $[a,b]$ mit zugehörigen $f, g \in L^1[a,b]$, dh für alle $x \in [a,b]$ ist

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt, \quad G(x) = G(a) + \int_a^x g(t)\,dt.$$

Dann gilt

$$\int_a^b Fg\,dt = FG|_a^b - \int_a^b fG\,dt$$

(partielle Integration).

Beweis. Wähle $f_n, g_n \in C[a,b]$ mit $f_n \to f$, $g_n \to g$ bzgl. $\|\cdot\|_1$ und setze

$$F_n(x) := F(a) + \int_a^x f_n(t)\,dt, \quad G_n(x) = G(a) + \int_a^x g_n(t)\,dt.$$

Dann sind $F_n, G_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar mit $F_n' = f_n$, $G_n' = g_n$ und $F_n \to F$, $G_n \to G$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$. Mit partieller Integration gilt

$$\int_a^b F_n g_n\,dt = F_n G_n|_a^b - \int_a^b f_n G_n\,dt.$$

Für $n \to \infty$ folgt daraus die Behauptung, da $F_n G_n \to FG$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ und $F_n g_n \to Fg$, $f_n G_n \to fG$ bzgl. $\|\cdot\|_1$. $\square$

— Ende des Einschubs über absolutstetige Funktionen —

Beweis von Satz 1.5. Stetigkeit von F ist klar. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$F(t+2\pi) - F(t) = \int_t^{t+2\pi} f(s)\,ds = \int_0^{2\pi} f(s)\,ds = 2\pi \hat{f}(0) = 0,$$

also ist F 2π-periodisch. Weiter ist für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$:

$$\hat{F}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t) e^{-int}\,dt = F(t) \frac{1}{-in} e^{-int}|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{1}{-in} e^{-int}\,dt = \frac{1}{in} \hat{f}(n).$$

$\square$

1.6. Definition und Satz: Seien $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Für fast jedes $t \in \mathbb{T}$ ist die Funktion $\tau \mapsto f(t-\tau)g(\tau)$ integrierbar über $\mathbb{T}$, und für

$$h(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t-\tau)g(\tau)\, d\tau, \quad t \in \mathbb{T},$$

gilt $h \in L^1(\mathbb{T})$, $\|h\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$, sowie

$$\hat{h}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Die Funktion h heißt *Faltung von f und g* und wird mit $f * g$ bezeichnet. Es gilt also

$$\begin{array}{rcl} * & : & L^1(\mathbb{T}) \times L^1(\mathbb{T}) \to L^1(\mathbb{T}) \\ & & \|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1 \\ \forall n \in \mathbb{Z} & : & \widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n). \end{array}$$

Beweis. Die Abbildungen $(t,\tau) \mapsto f(t-\tau)$ und $(t,\tau) \mapsto g(\tau)$ sind messbar, also ist auch

$$(t,\tau) \mapsto F(t,\tau) := f(t-\tau)g(\tau)$$

messbar. Für fast jedes τ ist $t \mapsto F(t,\tau)$ Vielfaches von f_τ, also integrierbar. Weiter gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int \Big(\frac{1}{2\pi} \int |F(t,\tau)|\, dt \Big)\, d\tau = \frac{1}{2\pi} \int |g(\tau)| \|f_\tau\|_1 \, d\tau = \|g\|_1 \|f\|_1 < \infty.$$

Nach Fubini-Tonelli ist $(t,\tau) \mapsto F(t,\tau)$ integrierbar und $h \in L^1(\mathbb{T})$, $\|h\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$. Für $n \in \mathbb{Z}$ ist nun

$$\begin{aligned} \hat{h}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{2\pi} \int f(t-\tau)g(\tau)\, d\tau\, e^{-int}\, dt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int f(t-\tau)e^{-in(t-\tau)}\, g(\tau)e^{-in\tau}\, dt\, d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int f(t-\tau)e^{-in(t-\tau)}\, dt \cdot \frac{1}{2\pi} \int g(\tau)e^{-in\tau}\, d\tau \\ &= \hat{f}(n)\hat{g}(n), \end{aligned}$$

wobei wir beim letzten Gleichheitszeichen die Translationsinvarianz des Integrals benutzt haben. □

1.7. Satz: Die Faltung $* : L^1(\mathbb{T}) \times L^1(\mathbb{T}) \to L^1(\mathbb{T})$ ist bilinear, stetig, kommutativ und assoziativ.

Beweis. Kommutativität folgt mittels einfacher Substitution. Für die Assoziativität muss man außerdem noch Fubini verwenden. □

1.8. Lemma: Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$.

(a) Ist $n \in \mathbb{Z}$ und $\varphi(t) = e^{int}$, $t \in \mathbb{T}$, so gilt

$$\varphi * f(t) = \hat{f}(n)e^{int}, \quad t \in \mathbb{T}.$$

(b) Ist $k(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikt}$, $t \in \mathbb{T}$, ein trigonometrisches Polynom, so gilt

$$k * f(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k \hat{f}(k) e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Beweis. (b) folgt aus (a) mit Linearität. Zu (a):

$$\varphi * f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau = e^{int} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) e^{-in\tau}\, d\tau}_{=\hat{f}(n)}.$$

$\square$

Ende
2.Vorl.

2 Summierbarkeit von Fourierreihen

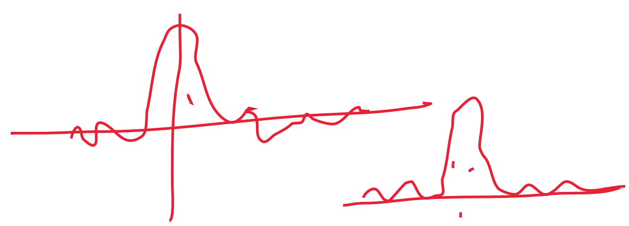
Idee: Verwende den Zusammenhang von Lemma 1.8(b) und die Faltung.

2.1. Definition: Eine *Dirac-Folge* (stetiger Funktionen) auf $\mathbb{T}$ ist eine Folge (k_n) stetiger 2π-periodischer Funktionen mit

(D1) $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_n(t)\, dt = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(D2) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |k_n(t)|\, dt < \infty$,

(D3) $\forall \delta \in (0, \pi) : \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_\delta^{2\pi - \delta} |k_n(t)|\, dt = 0$.



Gilt außerdem $k_n(t) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{T}$, so heißt (k_n) eine *positive Dirac-Folge* auf $\mathbb{T}$ (in diesem Fall folgt (D2) aus (D1)).

Ziel: $k_n * f \to f$ in $\|\cdot\|_1$ für jedes $f \in L^1(\mathbb{T})$.

Beispiel: Sei $k : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ stetig mit $\int k(t)\, dt = 1$ und $k(t) = 0$ für $|t| \geq \pi$. Setze für jedes $n \in \mathbb{N}$: $k_n(t) := nk(nt)$, $t \in \mathbb{T}$. Dann ist (k_n) eine Dirac-Folge. Es ist nämlich $k_n(t) = 0$ für $|t| \geq \pi/n$ und mittels einer einfachen Substitution:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_n(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(t)\, dt = 1, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |k_n(t)|\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |k(t)|\, dt.$$

Also gelten (D1) und (D2). Ist $\delta > 0$, so gilt $\int_\delta^{2\pi-\delta} |k_n(t)|\,dt = 0$ für $n > \pi/\delta$. Somit genügt (k_n) auch der Bedingung (D3).

Bezeichnung: Mit $C(\mathbb{T})$ bezeichnen wir den Raum aller stetigen und 2π-periodischen Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

2.2. Lemma: Sei X ein Banachraum, $\varphi : \mathbb{R} \to X$ stetig und 2π-periodisch und (k_n) eine Dirac-Folge auf $\mathbb{T}$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} k_n(t)\varphi(t)\,dt = \varphi(0).$$

— Einschub: Riemann-Integral für $g \in C([a,b],X)$, X Banachraum —

Wir definieren

$$\int_a^b g(t)\,dt := \lim_{\max_j |t_j - t_{j-1}| \to 0} \sum_{j=1}^n g(\xi_j)(t_j - t_{j-1}),$$

wobei $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ und $\xi_j \in [t_{j-1}, t_j]$ für alle j.

Dieser Limes existiert, da g auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ gleichmäßig stetig ist:

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ so, dass $|g(t) - g(s)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ für alle t, s mit $|t-s| < \delta$. Sind Z_1, Z_2 dann Zerlegungen mit Feinheit $< \delta/2$, so wähle man eine gemeinsame Verfeinerung $\widetilde{Z}$. Bezeichne die Zwischenpunkte von Z_1 mit ξ_j und die von Z_2 mit η_j, wobei j die Intervalle von $\widetilde{Z}$ durchnummeriere (ξ_j liegt dann nicht unbedingt im j-ten Intervall von $\widetilde{Z}$, sondern in dem Intervall von Z_1, welches Obermenge des j-ten Intervalls von Z_1 ist etc; wird ein Teilintervall von Z_1 durch $\widetilde{Z}$ in k kleinere Teilintervalle geteilt, kommt der entsprechende Zwischenwert genau k-mal unter den ξ_j vor). Wir bezeichnen $\widetilde{Z}$ versehen mit den ξ_j als $\widetilde{Z}_1$ und versehen mit den η_j als $\widetilde{Z}_2$. Für ein gegebenes Teilintervall $[t_{j-1}, t_j]$ von $\widetilde{Z}$ ist der Abstand von ξ_j und η_j dann kleiner als δ, denn die Abstände von ξ und η zu t_{j-1} und t_j sind jeweils kleiner als $\delta/2$. Somit gilt

$$\|S(g,Z_1) - S(g,Z_2)\| = \|S(g,\widetilde{Z}_1) - S(g,\widetilde{Z}_2)\| \le \sum_j \underbrace{\|g(\xi_j) - g(\eta_j)\|}_{<\varepsilon/(b-a)}(t_j - t_{j-1}) < \varepsilon.$$

Das so definierte Integral $C([a,b],X) \to X$ ist linear und es gilt:

- $\forall c \in (a,b)$: $\int_a^b g(t)\,dt = \int_a^c g(t)\,dt + \int_c^b g(t)\,dt$,
- $\| \int_a^b g(t)\,dt\| \le \int_a^b \|g(t)\|\,dt$,
- Ist Y ein weiterer Banachraum und $T : X \to Y$ linear und stetig, so ist

$$T\Big(\int_a^b g(t)\,dt\Big) = \int_a^b T(g(t))\,dt.$$

— Einschubende —

Beweis von Lemma 2.2. Für jedes $\delta > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} & |\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k_n(t)\varphi(t)\,dt - \varphi(0)| \overset{(D1)}{=} |\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k_n(t)(\varphi(t)-\varphi(0))\,dt| \\ \leq \quad & \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leq\delta} |k_n(t)||\varphi(t)-\varphi(0)|\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi} |k_n(t)|\,dt \cdot 2\|\varphi\|_\infty \\ \overset{(D2)}{\leq} \quad & C\cdot\sup_{|t|\leq\delta}|\varphi(t)-\varphi(0)| + 2\|\varphi\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}|k_n(t)|\,dt, \end{aligned}$$

wobei $C := \sup_n \|k_n\|_1$.
Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir $\delta > 0$ mit $|\varphi(t)-\varphi(0)| \leq \varepsilon/C$ für $|t| \leq \delta$ und dann $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_0 : \frac{2\|\varphi\|_\infty}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}|k_n(t)|\,dt < \varepsilon$$

(nach (D3)!). Dann gilt

$$\Big|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k_n(t)\varphi(t)\,dt - \varphi(0)\Big| \leq 2\varepsilon$$

für jedes $n \geq n_0$. □

2.3. Lemma: Für jedes $f \in L^1(\mathbb{T})$ und jedes $\tau_0 \in \mathbb{T}$ gilt

$$\lim_{\tau\to\tau_0}\|f_\tau - f_{\tau_0}\|_{L^1} = 0.$$

Beweis. Wegen

$$\|f_\tau - f_{\tau_0}\|_{L^1} = \|(f_{\tau-\tau_0} - f)_{\tau_0}\|_{L^1} = \|f_{\tau-\tau_0} - f\|_{L^1}$$

reicht ein Beweis für $\tau_0 = 0$.

Schritt 1: g stetig. Es gilt

$$\begin{aligned} \|g_\tau - g\|_{L^1} &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|g(t-\tau)-g(t)|\,dt \leq \sup_{t\in\mathbb{R}}|g(t-\tau)-g(t)| \\ &\leq \sup_{\xi,\eta\in\mathbb{R}:|\xi-\eta|\leq|\tau|}|g(\xi)-g(\eta)| \to 0\ (\tau\to 0), \end{aligned}$$

da g als stetige 2π-periodische Funktion auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

Schritt 2: $f \in L^1(\mathbb{T})$ beliebig. Sei $\varepsilon > 0$. Wir finden $g \in C(\mathbb{T})$ mit $\|f-g\|_{L^1} < \varepsilon/3$ und zu g nach Schritt 1 ein $\delta > 0$ mit $\|g_\tau - g\|_{L^1} < \varepsilon/3$ für $|t| < \delta$. Für jedes $|\tau| < \delta$ gilt dann

$$\|f_\tau - f\|_{L^1} \leq \underbrace{\|f_\tau - g_\tau\|_{L^1}}_{=\|f-g\|_{L^1}} + \|g_\tau - g\|_{L^1} + \|g-f\|_{L^1} < \varepsilon.$$

□

2.4. Lemma: Für $k \in C(\mathbb{T})$ und $f \in L^1(\mathbb{T})$ gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k(\tau) f_\tau \, d\tau = k * f.$$

Beweis. Schritt 1: $f = g$ ist stetig. Dann ist $\tau \mapsto g_\tau$ als Abbildung $\mathbb{T} \to C(\mathbb{T})$ stetig. Für festes $t \in \mathbb{T}$ ist die Abbildung $C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$, $h \mapsto h(t)$ linear und stetig, also gilt

$$\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k(\tau) g_\tau \, d\tau\Big)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k(\tau) \underbrace{g_\tau(t)}_{=g(t-\tau)} \, d\tau = k * g(t).$$

Schritt 2: Nach §1 ist $L^1(\mathbb{T}) \to L^1(\mathbb{T})$, $f \mapsto k * f$ linear und stetig. Außerdem gilt

$$\|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k(\tau) f_\tau \, d\tau\|_{L^1} \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |k(\tau)| \underbrace{\|f_\tau\|_{L^1}}_{=\|f\|_{L^1}} \, d\tau \leq \|k\|_\infty \|f\|_{L^1},$$

dh die Abbildung $f \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k(\tau) f_\tau \, d\tau$ ist linear und stetig $L^1(\mathbb{T}) \to L^1(\mathbb{T})$.
Da $C(\mathbb{T})$ dicht in $L^1(\mathbb{T})$ ist, stimmen die Abbildungen auf $L^1(\mathbb{T})$ überein. □

2.5. Satz: Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$ und (k_n) eine Dirac-Folge auf $\mathbb{T}$. Dann gilt bzgl. $\|\cdot\|_{L^1}$:

$$f = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k_n(\tau) f_\tau \, d\tau = \lim_{n\to\infty} k_n * f.$$

Beweis. Lemma 2.3, Lemma 2.2 und Lemma 2.4. □

Bemerkung: Nach Lemma 1.8(b) gilt für $f \in L^1(\mathbb{T})$ und jedes $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e^{ikt} = D_N * f(t), \quad t \in \mathbb{T},$$

wobei

$$D_N(t) := \sum_{k=-N}^{N} e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{T},$$

Dirichlet-Kern heißt.

Frage: Ist (D_N) eine Dirac-Folge?

Die Antwort ist leider negativ. Ende 3.Vorl.

2.6. Lemma: (a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$D_n(t) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)}.$$

(b) Es gilt $\|D_n\|_{L^1} \to \infty (n \to \infty)$, genauer $\|D_n\|_{L^1} \geq c \operatorname{Log} n + d$.

Somit ist (D_n) keine Dirac-Folge, da (D2) wegen (b) nicht gilt!

Beweis. zu (a): Es gilt

$$\begin{aligned}
2i\sin(t/2)\Big(\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}\Big) &= \Big(e^{it/2}-e^{-it/2}\Big)\Big(\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}\Big)\\
&= \sum_{k=-n}^{n}\Big(e^{i(k+1/2)t}-e^{i(k-1/2)t}\Big)\\
&= e^{i(n+1/2)t}-e^{-i(n+1/2)t} = 2i\sin((n+\frac{1}{2})t).
\end{aligned}$$

zu (b): Zunächst stellen wir fest, dass für $s \in [0,\pi/2]$ gilt:

$$\frac{2}{\pi}s \le \sin s \le s.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt dann nach (a):

$$\begin{aligned}
\|D_n\|_{L^1} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big|\frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)}\Big|\,dt\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Big|\frac{\sin(m\tau)}{\sin\tau}\Big|\,d\tau,\ \text{wobei } m=2n+1.\\
&\ge \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m-1}\int_{k\pi/m}^{(2k+1)\pi/(2m)}\Big|\frac{\sin(m\tau)}{\sin\tau}\Big|\,d\tau\\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m-1}\int_0^{\pi/(2m)}\frac{\sin(mt)}{\sin(t+k\pi/m)}\,dt\\
&\ge \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m-1}\int_0^{\pi/(2m)}\frac{\frac{2mt}{\pi}}{t+\frac{k\pi}{m}}\,dt\\
&\ge \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\frac{2m}{\pi}}{\frac{\pi}{2m}+\frac{k\pi}{m}}\underbrace{\int_0^{\pi/(2m)} t\,dt}_{=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{4m^2}}\\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{2k+1}\longrightarrow\infty\ (n\to\infty),
\end{aligned}$$

da $m = 2n+1$. $\square$

Erinnerung an Analysis I (übliche Übungsaufgabe): Gilt $a_n \to a$ $(n \to \infty)$, so folgt $b_n := \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \to a$ $(n\to\infty)$. Dabei ist (b_n) die Folge der arithmetischen Mittel. Die

Umkehrung ist i.a. falsch, wie das Beispiel $a_n = (-1)^n$ zeigt: Hier gilt $|b_n| \leq 1/n$, also $b_n \to 0$, aber (a_n) konvergiert nicht.

Wir werden diese Beobachtung anwenden auf Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, dh auf die Folge der Partialsummen $(s_n) = (\sum_{k=1}^{n} a_k)$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *Cesaro-summierbar* mit Wert s, falls die Folge der *Cesaro-Mittel* $(\sigma_n) = (\frac{s_1+s_2+\ldots+s_n}{n})$ gegen s konvergiert.

Wir führen die folgenden **Bezeichnungen** ein: Für $f \in L^1(\mathbb{T})$ und $N \in \mathbb{N}_0$ sei

$$\begin{aligned} S_N(f)(t) &:= S_N(f,t) := \sum_{k=-N}^{N} S_k(f,t), \quad t \in \mathbb{T} \\ \sigma_N(f)(t) &:= \sigma_N(f,t) := \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} S_n(f,t), \quad t \in \mathbb{T}. \end{aligned}$$

Es gilt dann (wegen Lemma 1.8(b)):

$$\sigma_N(f,t) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=-N}^{N} (N+1-|k|)\hat{f}(k)e^{ikt} = \sum_{k=-N}^{N} \Big(1 - \frac{|k|}{N+1}\Big)\hat{f}(k)e^{ikt} = F_N * f(t),$$

wobei

$$F_N(t) := \sum_{k=-N}^{N} \Big(1 - \frac{|k|}{N+1}\Big)e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{T}, N \in \mathbb{N}_0,$$

der *Fejér-Kern* ist.

Frage: Ist (F_n) eine Dirac-Folge auf $\mathbb{T}$?

Nach Konstruktion gilt $F_n = \frac{1}{n+1}(D_0 + D_1 + \ldots + D_n)$, also genügt die Folge (F_n) der Bedingung (D1).

2.7. Lemma: (a) Für $n \in \mathbb{N}_0$, $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$F_n(t) = \frac{1}{n+1}\Big(\frac{\sin(\frac{n+1}{2}t)}{\sin(t/2)}\Big)^2.$$

(b) (F_n) ist eine positive Dirac-Folge.

Beweis. zu (a): Es gilt

$$\sin^2(t/2) = \frac{1}{2}(1 - \cos t) = -\frac{1}{4}e^{-it} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{it}$$

und weiter

$$
\begin{aligned}
&\Big(-\frac{1}{4}e^{-it}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{it}\Big)\sum_{k=-n}^{n}\Big(1-\frac{|k|}{n+1}\Big)e^{ikt}\\
=\;& \sum_{k=-n}^{n}-\Big(1-\frac{|k|}{n+1}\Big)\frac{e^{i(k-1)t}}{4}+\sum_{k=-n}^{n}\Big(1-\frac{|k|}{n+1}\Big)\frac{e^{ikt}}{2}+\sum_{k=-n}^{n}-\Big(1-\frac{|k|}{n+1}\Big)\frac{e^{i(k+1)t}}{4}\\
=\;& \sum_{k=-(n+1)}^{n}-\Big(1-\frac{|k+1|}{n+1}\Big)\frac{e^{ikt}}{4}+\sum_{k=-n}^{n}\Big(1-\frac{|k|}{n+1}\Big)\frac{e^{ikt}}{2}+\sum_{k=-n}^{n+1}-\Big(1-\frac{|k-1|}{n+1}\Big)\frac{e^{ikt}}{4}\\
=\;& \frac{1}{n+1}\Big(-\frac{1}{4}e^{-i(n+1)t}-\frac{1}{4}e^{i(n+1)t}+\frac{1}{2}\Big),
\end{aligned}
$$

denn für $|k|\le n$ gilt

$$
\frac{|k+1|-2|k|+|k-1|}{4(n+1)}=\begin{cases}\frac{1}{2(n+1)} & ,k=0\\ 0 & ,1\le |k|\le n\end{cases}.
$$

zu (b): Wie oben gesehen, genügt (F_n) der Bedingung (D1). Nach (a) ist $F_n(t)\ge 0$ für alle $n\in\mathbb{N}_0$, $t\in\mathbb{T}$, also genügt (F_n) der Bedingung (D2). Zum Beweis von (D3) sei $\delta\in(0,\pi)$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}|F_n(t)|\,dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}\frac{1}{n+1}\Big(\frac{\sin(\frac{n+1}{2}t)}{\sin(t/2)}\Big)^2\,dt\\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}dt\cdot\frac{1}{(n+1)\sin(\delta/2)}\longrightarrow 0\ (n\to\infty).
\end{aligned}
$$

□

2.8. Satz: Sei $f\in L^1(\mathbb{T})$. Dann gilt

$$
\|\sigma_n(f)-f\|_{L^1(\mathbb{T})}\longrightarrow 0\ (n\to\infty).
$$

Beweis. Satz 2.5, Lemma 2.7 und die Darstellung $\sigma_n(f)=F_n*f$. □

2.9. Folgerung: Ist $f\in L^1(\mathbb{T})$ mit $\hat{f}(n)=0$ für alle $n\in\mathbb{Z}$, so ist $f=0$ fast überall.

Beweis. $\sigma_n(f)=0$ und Satz 2.8. □

2.10. Satz (Riemann-Lebesgue-Lemma): Für jedes $f\in L^1(\mathbb{T})$ gilt

$$
\hat{f}(n)\to 0\quad(|n|\to\infty).
$$

Beweis. Sei $\varepsilon>0$. Wähle $n_0\in\mathbb{N}$ mit $\|\sigma_{n_0}(f)-f\|_{L^1}<\varepsilon$. Dann gilt für alle $n\ge n_0$:

$$
|\hat{f}(n)|=|(\widehat{f-\sigma_{n_0}(f)})(n)|\le\|f-\sigma_{n_0}(f)\|_{L^1}<\varepsilon.
$$

□

Homogene Banachräume

2.11. Definition: Ein *homogener Banachraum auf* $\mathbb{T}$ ist ein Teilraum B von $L^1(\mathbb{T})$ mit Norm $\|\cdot\|_B \geq \|\cdot\|_{L^1}$ so, dass $(B, \|\cdot\|_B)$ ein Banachraum ist und dass gilt:

(H1) Für alle $f \in B$ und $\tau \in \mathbb{T}$ ist $f_\tau \in B$ und $\|f_\tau\|_B = \|f\|_B$.

(H2) Für alle $f \in B$ und $\tau_0 \in \mathbb{T}$ gilt $\lim_{\tau\to\tau_0} \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_B = 0$.

Ende
4.Vorl.

Bemerkung: (a) $L^1(\mathbb{T})$ ist ein homogener Banachraum (nach Lemma 2.3).

(b) Es reicht, dass $\|\cdot\|_{L^1} \leq c_0\|\cdot\|_B$ für eine Konstante c_0 und dass für jedes $f \in B$ die Abbildung $\tau \to f_\tau$ wohldefiniert und stetig $\mathbb{T} \to B$ ist (Übungsaufgabe).

2.12. Beispiele: (a) $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$. (H2) folgt aus der gleichmäßigen Stetigkeit von $f \in C(\mathbb{T})$.

(b) $C^n(\mathbb{T})$, der Raum aller n-mal stetig differenzierbaren 2π-periodischen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, ist ein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$ bzgl. der Norm $\|f\|_{C^n(\mathbb{T})} = \sum_{k=0}^n \|f^{(k)}\|_\infty$.

(c) Für $1 \leq p < \infty$ ist $L^p(\mathbb{T}) = \{f \in L^1(\mathbb{T}) : \|f\|_{L^p} := \left(\frac{1}{2\pi}\int_\mathbb{T} |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p} < \infty\}$ ein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$. Die Eigenschaft (H2) gilt für $f \in C(\mathbb{T})$ und $C(\mathbb{T})$ ist dicht in $L^p(\mathbb{T})$.

(d) Der Raum $(L^\infty(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ ist kein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$, da für $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ gilt:

$$\tau \mapsto f_\tau \text{ ist stetig bzgl. } \|\cdot\|_\infty \iff f \text{ ist gleichmäßig stetig.}$$

2.13. Lemma: Sei $B \subseteq L^1(\mathbb{T})$ ein homogener Banachraum, der (H1) genügt. Sei

$$B_c := \{f \in B : \ \tau \mapsto f_\tau \text{ ist stetig } \mathbb{T} \to B\ \}.$$

Dann ist B_c ein abgeschlossener Teilraum von $(B, \|\cdot\|_B)$ und ein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$.

Das folgende Theorem verallgemeinert Satz 2.5.

2.14. Theorem: Sei B ein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$. Ist $f \in B$ und (k_n) eine Dirac-Folge auf $\mathbb{T}$, so gilt

$$\|k_n * f - f\|_B \longrightarrow 0 \ (n \to \infty).$$

2.15. Folgerung: (a) Ist B homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$, so ist

$$\mathbb{P}_B := \{p \in B : \ p \text{ ist trigonometrisches Polynom }\}$$

dicht in B.

(b) Jede stetige 2π-periodische Funktion kann gleichmäßig durch trigonometrische Polynome approximiert werden (Weierstraß).

Beweis. (a) Bzgl. $\|\cdot\|_B$ gilt nach Theorem 2.14:

$$\sigma_n(f) = F_n * f \longrightarrow f.$$

(b) Beispiel 2.12(a) und Theorem 2.14. □

Beweis von Theorem 2.14. Wie wir im Beweis zeigen, gilt:

Ist $f \in B$ und $k \in C(\mathbb{T})$, so gilt $k * f \in B$ und

$$\|k * f\|_B \leq \|k\|_{L^1}\|f\|_B.$$

Sei $f \in B$. Dann ist $\tau \mapsto f_\tau$ stetig als Abbildung $\mathbb{T} \to B$ und nach Lemma 2.2 gilt:

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k_n(\tau) f_\tau \, d\tau}_{\in B} \longrightarrow f \ (n \to \infty) \text{ bzgl. } \|\cdot\|_B.$$

Wegen $B \subseteq L^1(\mathbb{T})$ ist $f \in L^1(\mathbb{T})$ und $\tau \mapsto f_\tau$ ist stetig als Abbildung $\mathbb{T} \to L^1(\mathbb{T})$. Somit existiert

$$\frac{1}{2\pi}\|\cdot\|_{L^1}\text{-}\int_{\mathbb{T}} k_n(\tau) f_\tau \, d\tau \overset{2.4}{=} k_n * f.$$

Wegen $\|\cdot\|_B \geq \|\cdot\|_{L^1}$ gilt $\|\cdot\|_{L^1}\text{-}\int \ldots = \|\cdot\|_B\text{-}\int \ldots$ (betrachte die Konvergenz entsprechender Riemann-Summen). Also gilt $k_n * f \in B$ und $k_n * f \longrightarrow f$ bzgl. $\|\cdot\|_B$. Die Abschätzung ergibt sich folgendermaßen:

$$\|k * f\|_B = \|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k(\tau) f_\tau \, d\tau\|_B \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |k(t)|\|f_\tau\|_B \, d\tau = \|k\|_{L^1}\|f\|_B.$$

□

2.16. Weitere Dirac-Folgen: (a) Der *de la Vallée-Poussin-Kern* (→ Übungsaufgabe)

$$V_n(t) := 2F_{2n+1}(t) - F_n(t).$$

(b) Der *Poisson-Kern*: Definiere für $r \in [0, 1)$:

$$P(r, t) := 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos(kt), \quad t \in \mathbb{T}.$$

Hier betrachtet man $r \to 1-$ statt $n \to \infty$. Die Reihe konvergiert absolut in $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{T}$. Es ist $\cos(kt) = \operatorname{Re}(e^{ikt})$. Somit gilt

$$\begin{aligned}
P(r,t) &= 1 + 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty}(re^{it})^k \\
&= 1 + 2\operatorname{Re}\frac{re^{it}}{1 - re^{it}} \\
&= \operatorname{Re}\Big(\frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}}\Big) = \operatorname{Re}\Big(\frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}}\frac{1 - re^{it}}{1 - re^{it}}\Big) \\
&= \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2},
\end{aligned}$$

wie man durch Rechnung bestätigt. Insbesondere ist $P(r,\cdot)$ monoton fallend auf $[0,\pi]$.

zu (D1): Es gilt (wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} P(r,t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} dt + \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 1.$$

zu (D2): Nach obiger Darstellung ist $P(r,t) \geq 0$, da $1-r^2 > 0$ und $1 - 2r\cos t + r^2 \geq 1 - 2r + r^2 > 0$. Somit folgt (D2) aus (D1).

zu (D3): Für $\delta \in (0,\pi)$ gilt:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta} P(r,t)\,dt \leq \frac{2(\pi-\delta)}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta + r^2} \longrightarrow \frac{2(\pi-\delta)}{2\pi}\frac{0}{2(1-\cos\delta)} \ (r \to 1-).$$

Nach Theorem 2.14 gilt somit

$$P(r,\cdot) * f \longrightarrow f \ (r \to 1-) \text{ bzgl. } \|\cdot\|_B,$$

falls $f \in B$ und B homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$ ist. Dabei ist

$$P(r,t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} r^k \underbrace{\cos(kt)}_{(e^{ikt}+e^{-ikt})/2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ikt}$$

und wegen der gleichmäßigen Konvergenz folglich

$$(P(r,\cdot) * f)(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}\hat{f}(n)e^{int}, \ t \in \mathbb{T}.$$

Die rechte Seite bezeichnet man als *Abel-Mittel* der Reihe $\sum_n \hat{f}(n)e^{int}$. Die Konvergenzaussage bedeutet dann, dass die Fourierreihe $\sum_n \hat{f}(n)e^{in(\cdot)}$ in B *Abel-summierbar* ist mit Wert f.

Ende 5.Vorl.

— Bonus —

Definition: Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt *Abel-summierbar* mit Wert $s \in \mathbb{R}$, falls für jedes $r \in [0,1)$ das *Abel-Mittel* $A(r) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ konvergiert und $\lim_{r\to 1-} A(r) = s$ gilt.

Dabei gilt: Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ Cesáro-summierbar mit Wert s, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ Abel-summierbar mit Wert s.

Beweis. Setze $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ und $\sigma_n := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k$. Es gelte $\sigma_n \to s$. Für $r \in [0,1)$ ist

$$A(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(s_k - s_{k-1})r^k = (1-r)\sum_{k=0}^{\infty} s_k r^k = (1-r)^2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\sigma_k r^k$$

und $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)r^k = (1-r)^{-2}$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Wir finden $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|\sigma_k - s| < \varepsilon$ für $k \geq n_0$. Dann gilt für $r \in [0,1)$:

$$\begin{aligned} |A(r) - s| &= |(1-r)^2 \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(\sigma_k - s)r^k| \\ &\leq \underbrace{(1-r)^2 \sum_{k=0}^{n_0}(k+1)|\sigma_k - s|r^k}_{\to 0\ (r\to 1-)} + \underbrace{(1-r)^2 \sum_{k>n_0}(k+1)\varepsilon r^k}_{\leq \varepsilon}. \end{aligned}$$

$\square$

— Ende des Bonus —

3 Fourierreihen in $L^2(\mathbb{T})$ und in Dualräumen

3.1. Erinnerung: (a) Der Raum $L^2(\mathbb{T})$ ist gegeben durch

$$L^2(\mathbb{T}) = \{f \in L^1(\mathbb{T}) : \|f\|_{L^2} := \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2\, dt\Big)^{1/2} < \infty\}.$$

Der Raum $L^2(\mathbb{T})$ ist ein Hilbertraum bzgl. des Skalarproduktes

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\overline{g(t)}\, dt.$$

Es ist $\|f\|_{L^2} = \sqrt{\langle f, f\rangle}$.
Zwei Funktionen $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ heißen *orthogonal*, geschrieben $f \perp g$, wenn $\langle f, g\rangle = 0$ ist.

(b) Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und $\Lambda \neq 0$. Eine Familie $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ heißt *Orthonormalsystem* (ONS), falls gilt

$$\forall \lambda, \mu \in \Lambda : \langle f_\lambda, f_\mu\rangle = \delta_{\lambda\mu}.$$

Ein ONS $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ heißt *vollständig*, falls für alle $f \in H$ gilt:

$$\Big(\forall \lambda \in \Lambda : \langle f, f_\lambda\rangle = 0\Big) \Longrightarrow f = 0.$$

Ein vollständiges ONS kann also nicht echt vergrößert werden.

(c) Ist $(\varphi_j)_{j=1}^N$ ein ONS und sind $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{C}$, so gilt

$$\|\sum_{j=1}^N a_j\varphi_j\|^2 = \sum_{j=1}^N |a_j|^2$$

(vgl. Lineare Algebra).