Übungsblatt 1

Harmonische Analyse

23.04.2020

Aufgabe 1: Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und

$G = \{l \in \mathbb{R} : f \text{ ist } l\text{-periodisch, d.h. } f(x+l) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$.

Zeigen Sie, dass G eine abgeschlossene Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$ ist.

Aufgabe 2: Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$(\cos(x))^n \quad \text{und} \quad (\cos(x/2))^{2n}$$

trigonometrische Polynome vom Grad n sind.

Aufgabe 3: Es seien (a_n) und (b_n) Folgen komplexer Zahlen und $r \leq p \leq q$ natürliche Zahlen. Für $n \geq r$ sei $B_n = \sum_{k=r}^{n} b_k$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = a_q B_q - a_p B_{p-1} + \sum_{n=p}^{q-1} (a_n - a_{n+1}) B_n$$

gilt. (*Hinweis:* Abelsche partielle Summation, siehe Heuser, Analysis I, Seite 91.)

Aufgabe 4: Es seien $a < b$ reelle Zahlen sowie $f_k : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen für $k = 1, 2, \ldots$ Weiter existiere ein $M > 0$ mit

$$\left| \sum_{j=1}^{k} f_j(x) \right| \leq M$$

für alle $x \in [a, b]$ und alle $k = 1, 2, \ldots$.
Sei nun (c_n) eine Nullfolge in $\mathbb{C}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} |c_{n+1} - c_n| < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$$

auf $[a, b]$ gleichmäßig konvergiert. (*Hinweis:* Cauchy-Kriterium und Aufgabe 3.)