Wählen Sie mindestens zwei der folgenden Aufgaben:

Aufgabe 1

Sei X ein topologischer Raum und $A, B \subset X$. Zeigen Sie:

(a) Ist $X = A \cup B$ und $M \subset A \cap B$ offen (abgeschlossen) in A und B, so ist M offen (abgeschlossen) in X.

(b) A ist genau dann Durchschnitt einer in X offenen Menge mit einer in X abgeschlossenen Menge, wenn jedes $x \in A$ eine Umgebung $U(x)$ in X besitzt, so dass $A \cap U(x)$ in $U(x)$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 2

Zeigen Sie: Die Projektion $p_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x$ ist nicht abgeschlossen.

Aufgabe 3

Seien $(X_i)_{i\in I}$ topologische Räume und $A_i \subset X_i$ Teilmengen. Dann ist $\prod_{i\in I} A_i$ eine Teilmenge von $\prod_{i\in I} X_i$. Zeigen Sie:

(a) $\prod_{i\in I} \mathring{A}_i \supset (\prod_{i\in I} A_i)^\circ$.

(b) $\prod_{i\in I} \overline{A_i} = \overline{\prod_{i\in I} A_i}$.

(c) Geben Sie ein Beispiel an, für welches in (a) kein Gleichheitszeichen gilt.

Aufgabe 4

X und Y seinen topologische Räume und $f : X \to Y$ sei eine Abbildung. Ferner gebe es ein System $(A_i)_{i\in I}$ abgeschlossener Teilmengen von X mit

(i). $\cup_{i\in I} A_i = X$ (dann heißt $(A_i)_{i\in I}$ *abgeschlossene Überdeckung*)

(ii). (ii) Zu jedem $x \in X$ gibt es eine Umgebung $U(x)$, so dass $\{i \in I | A_i \cap U(x) \neq \emptyset\}$ endlich ist (dann heißt die Überdeckung *lokalendlich*).

Zeigen Sie: Sind alle Abbildungen $f|A_i : A_i \to Y$ stetig, so ist auch $f : X \to Y$ stetig.

Aufgabe 5

Sei Y ein Unterraum eines topologischen Raums X und A eine Teilmenge von Y. Zeigen Sie:

(a) Ist A nirgends dicht in Y, dann ist A nirgends dicht in X.

(b) Ist Y offen in X, dann gilt: Ist A nirgends dicht in X, dann ist A nirgends dicht in Y. Diese Aussage ist nicht richtig, wenn Y nicht offen in X ist.