Aufgabe 1

Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen für beliebige topologische Räume X:

(i) X ist ein T_1-Raum, d.h. von je zwei Punkten besitzt jeder eine Umgebung, die den anderen nicht enhält.

(ii) Einpunktige Mengen $\{x\} \subset X$ sind abgeschlossen.

(iii) Jede Teilmenge $A \subset X$ ist der Durchschnitt ihrer Umgebungen.

(iv) Jeder endliche Unterraum von X ist diskret.

(v) Die Topologie von X ist feiner als die kofinite Topologie.

Aufgabe 2

Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen für beliebige topologische Räume X:

(i) X ist hausdorffsch, d.h. je zwei Punkte $x \neq y$ in X besitzen disjunkte Umgebungen.

(ii) Jede einelementige Teilmenge $\{x\} \subset X$ ist der Durchschnitt ihrer abgeschlossenen Umgebungen.

(iii) Die Diagonale $\Delta = \{\{x, y\} | x \in X\}$ ist abgeschlossen im Produktraum $X \times X$.

(iv) Jeder Filter auf X konvergiert gegen höchstens einen Punkt in X.

(v) Jedes Netz auf X konvergiert gegen höchstens einen Punkt in X.

Aufgabe 3

(1) Kann eine Folge in einem T_1-Raum mehrere Grenzwerte haben?

(2) Falls jede Folge in einem topologischen Raum X höchstens einen Grenzwert hat, ist X notwendigerweise ein Hausdorff-Raum?