Dies ist eine Vorlesungszusammenfassung, gedacht zur Vorlesungsbegleitung und als Gedächtnisstütze, nicht jedoch als etwas, das für sich selbst stehen könnte (wie etwa ein Lehrbuch). Der Besuch der Vorlesung ist durch die Lektüre in keinem Fall zu ersetzen, es gibt dort noch viel mehr an mündlichen Erklärungen, Erläuterungen und veranschaulichenden Skizzen, die für Verständnis und Einordnung des präsentierten Stoffes unabdingbar sind.

1 Fourierreihen 2π-periodischer Funktionen

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion, dh gilt

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f(x + 2\pi) = f(x),$$

so ist f eindeutig bestimmt durch $f|_{[0,2\pi)}$. Man kann f auch auffassen als Funktion $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, wobei

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} = \{x + 2\pi\mathbb{Z} : x \in \mathbb{R}\} = \{x + 2\pi\mathbb{Z} : x \in [0, 2\pi)\}.$$

Bemerkung: $(\mathbb{R}, +)$ ist abelsche Gruppe und $2\pi\mathbb{Z}$ ist Untergruppe. Die Abbildung $t \mapsto e^{it}$ ist ein surjektiver Homomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ nach $(\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \cdot)$ mit Kern $2\pi\mathbb{Z}$, also ist

$$(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \cdot), \quad [t] \mapsto e^{it}$$

ein Isomorphismus. $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ heißt (eindimensionaler) *Torus*, Bez: $\mathbb{T}$. Wir verwenden meist $[0, 2\pi)$ als Modell für $\mathbb{T}$. Wir verwenden das Lebeguemaß auf $\mathbb{T}$ und schreiben $\int_{\mathbb{T}} \ldots = \int_0^{2\pi} \ldots$.

1.1. Definition: Ein *trigonometrisches Polynom* ist ein Ausdruck der Form

$$P(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikt}, \tag{1}$$

wobei $N \in \mathbb{N}$ und $c_k \in \mathbb{C}$. Die auftretenden k heißen *Frequenzen* und die c_k die *Koeffizienten* von P. $\max\{k \in \mathbb{N}_0 : |a_k| + |a_{-k}| > 0\}$ heißt *Grad von* P. Die zugehörigen Funktionen $\mathbb{T} \to \mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ werden ebenfalls mit P bezeichnet.

1.2. Bemerkung: Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikt}\, dt = \begin{cases} 1 & , k = 0 \\ 0 & , k \neq 0 \end{cases} .$$

Somit gilt für ein trigonometrisches Polynom wie in (1):

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(t) e^{-int}\, dt = \sum_{k=-N}^{N} c_k \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t}\, dt = \begin{cases} c_n & , |n| \leq N \\ 0 & , |n| > N \end{cases} .$$

Problem: Für trigonometrische Reihen $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$ stellen sich die Fragen nach Konvergenz, nach der repräsentierten Funktion und nach der Bestimmung der Koeffizienten c_k aus der repräsentierten Funktion.

1.3. Definition: Für $f \in L^1(\mathbb{T})$ und $n \in \mathbb{Z}$ heißt

$$\hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{int} \, dt$$

der *n-te Fourierkoeffizient von f*, und

$$S[f] \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int} \quad \text{(formal!)}$$

heißt *Fourierreihe von f*.

Frage: Wie ist die Beziehung zwischen $S[f]$ und f?

1.4. Lemma: (a) Die Abbildung $f \mapsto (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ ist linear und stetig $L^1(\mathbb{T}) \to l^\infty(\mathbb{Z})$ mit

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| \leq \|f\|_1 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| \, dt.$$

(b) Für $f \in L^1(\mathbb{T})$ und $\tau \in \mathbb{T}$ sei $f_\tau \in L^1(\mathbb{T})$ definiert durch

$$f_\tau(t) := f(t - \tau), \quad t \in \mathbb{T}.$$

Dann gilt

$$\widehat{f_\tau}(n) = e^{-in\tau} \hat{f}(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. (a) Linearität ist klar. Für $n \in \mathbb{Z}$ ist

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| \underbrace{|e^{-int}|}_{=1} \, dt = \|f\|_1.$$

(b) Es gilt mittels der Substitution $t = s + \tau$:

$$\begin{aligned} \widehat{f_\tau}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t-\tau) e^{-int} \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) e^{-ins} e^{-in\tau} \, ds \\ &= e^{-in\tau} \hat{f}(n). \end{aligned}$$

□

Ende 1.Vorl.

1.5. Satz: Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$ mit $\hat{f}(0) = 0$. Dann definiert $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \int_0^t f(s) \, ds$ eine 2π-periodische stetige Funktion, dh $F : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ist stetig, und es gilt

$$\hat{F}(n) = \frac{1}{in} \hat{f}(n), \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Zum Beweis benötigen wir ein Lemma, das im folgenden Einschub bereitgestellt wird.

— Einschub über absolutstetige Funktionen —

Definition (ad hoc): Eine Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt *absolutstetig* auf $[a,b]$, falls es $f \in L^1[a,b]$ gibt mit

$$F(d) - F(c) = \int_c^d f(t)\,dt \quad \text{für alle } [c,d] \subseteq [a,b].$$

Lemma: Seien $F, G : [a,b] \to \mathbb{C}$ absolutstetig auf $[a,b]$ mit zugehörigen $f, g \in L^1[a,b]$, dh für alle $x \in [a,b]$ ist

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt, \quad G(x) = G(a) + \int_a^x g(t)\,dt.$$

Dann gilt

$$\int_a^b Fg\,dt = FG|_a^b - \int_a^b fG\,dt$$

(partielle Integration).

Beweis. Wähle $f_n, g_n \in C[a,b]$ mit $f_n \to f$, $g_n \to g$ bzgl. $\|\cdot\|_1$ und setze

$$F_n(x) := F(a) + \int_a^x f_n(t)\,dt, \quad G_n(x) = G(a) + \int_a^x g_n(t)\,dt.$$

Dann sind $F_n, G_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar mit $F_n' = f_n$, $G_n' = g_n$ und $F_n \to F$, $G_n \to G$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$. Mit partieller Integration gilt

$$\int_a^b F_n g_n\,dt = F_n G_n|_a^b - \int_a^b f_n G_n\,dt.$$

Für $n \to \infty$ folgt daraus die Behauptung, da $F_n G_n \to FG$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ und $F_n g_n \to Fg$, $f_n G_n \to fG$ bzgl. $\|\cdot\|_1$. $\square$

— Ende des Einschubs über absolutstetige Funktionen —

Beweis von Satz 1.5. Stetigkeit von F ist klar. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$F(t+2\pi) - F(t) = \int_t^{t+2\pi} f(s)\,ds = \int_0^{2\pi} f(s)\,ds = 2\pi \hat{f}(0) = 0,$$

also ist F 2π-periodisch. Weiter ist für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$:

$$\hat{F}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)e^{-int}\,dt = F(t)\frac{1}{-in}e^{-int}|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\frac{1}{-in}e^{-int}\,dt = \frac{1}{in}\hat{f}(n).$$

$\square$

1.6. Definition und Satz: Seien $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Für fast jedes $t \in \mathbb{T}$ ist die Funktion $\tau \mapsto f(t-\tau)g(\tau)$ integrierbar über $\mathbb{T}$, und für

$$h(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau, \quad t \in \mathbb{T},$$

gilt $h \in L^1(\mathbb{T})$, $\|h\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$, sowie

$$\hat{h}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Die Funktion h heißt *Faltung von f und g* und wird mit $f * g$ bezeichnet. Es gilt also

$$\begin{array}{rcl} * & : & L^1(\mathbb{T}) \times L^1(\mathbb{T}) \to L^1(\mathbb{T}) \\ & & \|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1 \\ \forall n \in \mathbb{Z} & : & \widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n). \end{array}$$

Beweis. Die Abbildungen $(t,\tau) \mapsto f(t-\tau)$ und $(t,\tau) \mapsto g(\tau)$ sind messbar, also ist auch

$$(t,\tau) \mapsto F(t,\tau) := f(t-\tau)g(\tau)$$

messbar. Für fast jedes τ ist $t \mapsto F(t,\tau)$ Vielfaches von f_τ, also integrierbar. Weiter gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int \Big(\frac{1}{2\pi} \int |F(t,\tau)|\,dt \Big)\,d\tau = \frac{1}{2\pi} \int |g(\tau)| \|f_\tau\|_1 \,d\tau = \|g\|_1 \|f\|_1 < \infty.$$

Nach Fubini-Tonelli ist $(t,\tau) \mapsto F(t,\tau)$ integrierbar und $h \in L^1(\mathbb{T})$, $\|h\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$. Für $n \in \mathbb{Z}$ ist nun

$$\begin{aligned} \hat{h}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{2\pi} \int f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau\, e^{-int}\,dt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int f(t-\tau)e^{-in(t-\tau)}\, g(\tau)e^{-in\tau}\,dt\,d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int f(t-\tau)e^{-in(t-\tau)}\,dt \cdot \frac{1}{2\pi} \int g(\tau)e^{-in\tau}\,d\tau \\ &= \hat{f}(n)\hat{g}(n), \end{aligned}$$

wobei wir beim letzten Gleichheitszeichen die Translationsinvarianz des Integrals benutzt haben. □

1.7. Satz: Die Faltung $* : L^1(\mathbb{T}) \times L^1(\mathbb{T}) \to L^1(\mathbb{T})$ ist bilinear, stetig, kommutativ und assoziativ.

Beweis. Kommutativität folgt mittels einfacher Substitution. Für die Assoziativität muss man außerdem noch Fubini verwenden. □

1.8. Lemma: Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$.

(a) Ist $n \in \mathbb{Z}$ und $\varphi(t) = e^{int}$, $t \in \mathbb{T}$, so gilt

$$\varphi * f(t) = \hat{f}(n)e^{int}, \quad t \in \mathbb{T}.$$

(b) Ist $k(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikt}$, $t \in \mathbb{T}$, ein trigonometrisches Polynom, so gilt

$$k * f(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k \hat{f}(k) e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Beweis. (b) folgt aus (a) mit Linearität. Zu (a):

$$\varphi * f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau = e^{int} \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau) e^{-in\tau}\, d\tau}_{=\hat{f}(n)}.$$

$\square$

Ende 2.Vorl.

2 Summierbarkeit von Fourierreihen

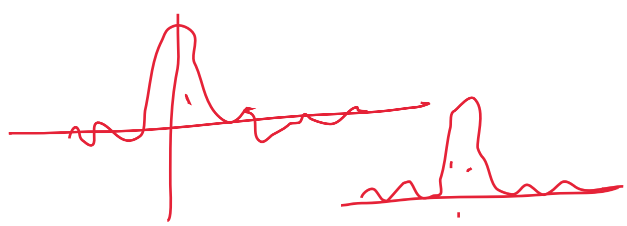
Idee: Verwende den Zusammenhang von Lemma 1.8(b) und die Faltung.

2.1. Definition: Eine *Dirac-Folge* (stetiger Funktionen) auf $\mathbb{T}$ ist eine Folge (k_n) stetiger 2π-periodischer Funktionen mit

(D1) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_n(t)\, dt = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(D2) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |k_n(t)|\, dt < \infty$,

(D3) $\forall \delta \in (0,\pi) : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta} |k_n(t)|\, dt = 0$.



Gilt außerdem $k_n(t) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{T}$, so heißt (k_n) eine *positive Dirac-Folge* auf $\mathbb{T}$ (in diesem Fall folgt (D2) aus (D1)).

Ziel: $k_n * f \to f$ in $\|\cdot\|_1$ für jedes $f \in L^1(\mathbb{T})$.

Beispiel: Sei $k : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ stetig mit $\int k(t)\, dt = 1$ und $k(t) = 0$ für $|t| \geq \pi$. Setze für jedes $n \in \mathbb{N}$: $k_n(t) := nk(nt)$, $t \in \mathbb{T}$. Dann ist (k_n) eine Dirac-Folge. Es ist nämlich $k_n(t) = 0$ für $|t| \geq \pi/n$ und mittels einer einfachen Substitution:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_n(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k(t)\, dt = 1, \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |k_n(t)|\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |k(t)|\, dt.$$

Also gelten (D1) und (D2). Ist $\delta > 0$, so gilt $\int_\delta^{2\pi-\delta} |k_n(t)|\,dt = 0$ für $n > \pi/\delta$. Somit genügt (k_n) auch der Bedingung (D3).

Bezeichnung: Mit $C(\mathbb{T})$ bezeichnen wir den Raum aller stetigen und 2π-periodischen Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

2.2. Lemma: Sei X ein Banachraum, $\varphi : \mathbb{R} \to X$ stetig und 2π-periodisch und (k_n) eine Dirac-Folge auf $\mathbb{T}$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} k_n(t)\varphi(t)\,dt = \varphi(0).$$

— Einschub: Riemann-Integral für $g \in C([a,b], X)$, X Banachraum —

Wir definieren

$$\int_a^b g(t)\,dt := \lim_{\max_j |t_j - t_{j-1}| \to 0} \sum_{j=1}^n g(\xi_j)(t_j - t_{j-1}),$$

wobei $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ und $\xi_j \in [t_{j-1}, t_j]$ für alle j.

Dieser Limes existiert, da g auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ gleichmäßig stetig ist:

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ so, dass $|g(t) - g(s)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ für alle t, s mit $|t - s| < \delta$. Sind Z_1, Z_2 dann Zerlegungen mit Feinheit $< \delta/2$, so wähle man eine gemeinsame Verfeinerung $\widetilde{Z}$. Bezeichne die Zwischenpunkte von Z_1 mit ξ_j und die von Z_2 mit η_j, wobei j die Intervalle von $\widetilde{Z}$ durchnummeriere (ξ_j liegt dann nicht unbedingt im j-ten Intervall von $\widetilde{Z}$, sondern in dem Intervall von Z_1, welches Obermenge des j-ten Intervalls von Z_1 ist etc; wird ein Teilintervall von Z_1 durch $\widetilde{Z}$ in k kleinere Teilintervalle geteilt, kommt der entsprechende Zwischenwert genau k-mal unter den ξ_j vor). Wir bezeichnen $\widetilde{Z}$ versehen mit den ξ_j als $\widetilde{Z}_1$ und versehen mit den η_j als $\widetilde{Z}_2$. Für ein gegebenes Teilintervall $[t_{j-1}, t_j]$ von $\widetilde{Z}$ ist der Abstand von ξ_j und η_j dann kleiner als δ, denn die Abstände von ξ und η zu t_{j-1} und t_j sind jeweils kleiner als $\delta/2$. Somit gilt

$$\|S(g, Z_1) - S(g, Z_2)\| = \|S(g, \widetilde{Z}_1) - S(g, \widetilde{Z}_2)\| \leq \sum_j \underbrace{\|g(\xi_j) - g(\eta_j)\|}_{<\varepsilon/(b-a)}(t_j - t_{j-1}) < \varepsilon.$$

Das so definierte Integral $C([a,b], X) \to X$ ist linear und es gilt:

- $\forall c \in (a,b)$: $\int_a^b g(t)\,dt = \int_a^c g(t)\,dt + \int_c^b g(t)\,dt$,
- $\| \int_a^b g(t)\,dt\| \leq \int_a^b \|g(t)\|\,dt$,
- Ist Y ein weiterer Banachraum und $T : X \to Y$ linear und stetig, so ist

$$T\Big(\int_a^b g(t)\,dt\Big) = \int_a^b T(g(t))\,dt.$$

— Einschubende —

Beweis von Lemma 2.2. Für jedes $\delta > 0$ gilt:

$$
\begin{aligned}
& |\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k_n(t)\varphi(t)\,dt - \varphi(0)| \overset{(D1)}{=} |\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k_n(t)(\varphi(t)-\varphi(0))\,dt| \\
\leq\ & \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leq\delta} |k_n(t)||\varphi(t)-\varphi(0)|\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi} |k_n(t)|\,dt\cdot 2\|\varphi\|_\infty \\
\overset{(D2)}{\leq}\ & C\cdot\sup_{|t|\leq\delta}|\varphi(t)-\varphi(0)| + 2\|\varphi\|_\infty\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}|k_n(t)|\,dt,
\end{aligned}
$$

wobei $C := \sup_n \|k_n\|_1$.
Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir $\delta > 0$ mit $|\varphi(t)-\varphi(0)| \leq \varepsilon/C$ für $|t| \leq \delta$ und dann $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_0 : \frac{2\|\varphi\|_\infty}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}|k_n(t)|\,dt < \varepsilon$$

(nach (D3)!). Dann gilt

$$\Big|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k_n(t)\varphi(t)\,dt - \varphi(0)\Big| \leq 2\varepsilon$$

für jedes $n \geq n_0$. □

2.3. Lemma: Für jedes $f \in L^1(\mathbb{T})$ und jedes $\tau_0 \in \mathbb{T}$ gilt

$$\lim_{\tau\to\tau_0}\|f_\tau - f_{\tau_0}\|_{L^1} = 0.$$

Beweis. Wegen

$$\|f_\tau - f_{\tau_0}\|_{L^1} = \|(f_{\tau-\tau_0} - f)_{\tau_0}\|_{L^1} = \|f_{\tau-\tau_0} - f\|_{L^1}$$

reicht ein Beweis für $\tau_0 = 0$.

Schritt 1: g stetig. Es gilt

$$
\begin{aligned}
\|g_\tau - g\|_{L^1} &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|g(t-\tau)-g(t)|\,dt \leq \sup_{t\in\mathbb{R}}|g(t-\tau)-g(t)| \\
&\leq \sup_{\xi,\eta\in\mathbb{R}:|\xi-\eta|\leq|\tau|}|g(\xi)-g(\eta)| \to 0\ (\tau\to 0),
\end{aligned}
$$

da g als stetige 2π-periodische Funktion auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

Schritt 2: $f \in L^1(\mathbb{T})$ beliebig. Sei $\varepsilon > 0$. Wir finden $g \in C(\mathbb{T})$ mit $\|f-g\|_{L^1} < \varepsilon/3$ und zu g nach Schritt 1 ein $\delta > 0$ mit $\|g_\tau - g\|_{L^1} < \varepsilon/3$ für $|t| < \delta$. Für jedes $|\tau| < \delta$ gilt dann

$$\|f_\tau - f\|_{L^1} \leq \underbrace{\|f_\tau - g_\tau\|_{L^1}}_{=\|f-g\|_{L^1}} + \|g_\tau - g\|_{L^1} + \|g-f\|_{L^1} < \varepsilon.$$

□

2.4. Lemma: Für $k \in C(\mathbb{T})$ und $f \in L^1(\mathbb{T})$ gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k(\tau) f_\tau \, d\tau = k * f.$$

Beweis. Schritt 1: $f = g$ ist stetig. Dann ist $\tau \mapsto g_\tau$ als Abbildung $\mathbb{T} \to C(\mathbb{T})$ stetig. Für festes $t \in \mathbb{T}$ ist die Abbildung $C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$, $h \mapsto h(t)$ linear und stetig, also gilt

$$\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k(\tau) g_\tau \, d\tau\Big)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k(\tau) \underbrace{g_\tau(t)}_{=g(t-\tau)} \, d\tau = k * g(t).$$

Schritt 2: Nach §1 ist $L^1(\mathbb{T}) \to L^1(\mathbb{T})$, $f \mapsto k * f$ linear und stetig. Außerdem gilt

$$\|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k(\tau) f_\tau \, d\tau\|_{L^1} \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |k(\tau)| \underbrace{\|f_\tau\|_{L^1}}_{=\|f\|_{L^1}} \, d\tau \leq \|k\|_\infty \|f\|_{L^1},$$

dh die Abbildung $f \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k(\tau) f_\tau \, d\tau$ ist linear und stetig $L^1(\mathbb{T}) \to L^1(\mathbb{T})$.
Da $C(\mathbb{T})$ dicht in $L^1(\mathbb{T})$ ist, stimmen die Abbildungen auf $L^1(\mathbb{T})$ überein. □

2.5. Satz: Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$ und (k_n) eine Dirac-Folge auf $\mathbb{T}$. Dann gilt bzgl. $\|\cdot\|_{L^1}$:

$$f = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k_n(\tau) f_\tau \, d\tau = \lim_{n\to\infty} k_n * f.$$

Beweis. Lemma 2.3, Lemma 2.2 und Lemma 2.4. □

Bemerkung: Nach Lemma 1.8(b) gilt für $f \in L^1(\mathbb{T})$ und jedes $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e^{ikt} = D_N * f(t), \quad t \in \mathbb{T},$$

wobei

$$D_N(t) := \sum_{k=-N}^{N} e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{T},$$

Dirichlet-Kern heißt.

Frage: Ist (D_N) eine Dirac-Folge?

Die Antwort ist leider negativ. Ende 3.Vorl.

2.6. Lemma: (a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$D_n(t) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)}.$$

(b) Es gilt $\|D_n\|_{L^1} \to \infty (n \to \infty)$, genauer $\|D_n\|_{L^1} \geq c \operatorname{Log} n + d$.

Somit ist (D_n) keine Dirac-Folge, da (D2) wegen (b) nicht gilt!

Beweis. zu (a): Es gilt

$$\begin{aligned}
2i\sin(t/2)\Big(\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}\Big) &= \Big(e^{it/2} - e^{-it/2}\Big)\Big(\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}\Big) \\
&= \sum_{k=-n}^{n} \Big(e^{i(k+1/2)t} - e^{i(k-1/2)t}\Big) \\
&= e^{i(n+1/2)t} - e^{-i(n+1/2)t} = 2i\sin((n+\frac{1}{2})t).
\end{aligned}$$

zu (b): Zunächst stellen wir fest, dass für $s \in [0, \pi/2]$ gilt:

$$\frac{2}{\pi}s \leq \sin s \leq s.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt dann nach (a):

$$\begin{aligned}
\|D_n\|_{L^1} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big|\frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)}\Big|\, dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Big|\frac{\sin(m\tau)}{\sin\tau}\Big|\, d\tau, \text{ wobei } m = 2n+1. \\
&\geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m-1}\int_{k\pi/m}^{(2k+1)\pi/(2m)} \Big|\frac{\sin(m\tau)}{\sin\tau}\Big|\, d\tau \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m-1}\int_0^{\pi/(2m)} \frac{\sin(mt)}{\sin(t+k\pi/m)}\, dt \\
&\geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m-1}\int_0^{\pi/(2m)} \frac{\frac{2mt}{\pi}}{t+\frac{k\pi}{m}}\, dt \\
&\geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\frac{2m}{\pi}}{\frac{\pi}{2m}+\frac{k\pi}{m}} \underbrace{\int_0^{\pi/(2m)} t\, dt}_{=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{4m^2}} \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{2k+1} \longrightarrow \infty \ (n\to\infty),
\end{aligned}$$

da $m = 2n+1$. □

Erinnerung an Analysis I (übliche Übungsaufgabe): Gilt $a_n \to a$ $(n \to \infty)$, so folgt $b_n := \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \to a$ $(n \to \infty)$. Dabei ist (b_n) die Folge der arithmetischen Mittel. Die

Umkehrung ist i.a. falsch, wie das Beispiel $a_n = (-1)^n$ zeigt: Hier gilt $|b_n| \leq 1/n$, also $b_n \to 0$, aber (a_n) konvergiert nicht.

Wir werden diese Beobachtung anwenden auf Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, dh auf die Folge der Partialsummen $(s_n) = (\sum_{k=1}^{n} a_k)$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *Cesaro-summierbar* mit Wert s, falls die Folge der *Cesaro-Mittel* $(\sigma_n) = (\frac{s_1+s_2+\ldots+s_n}{n})$ gegen s konvergiert.

Wir führen die folgenden **Bezeichnungen** ein: Für $f \in L^1(\mathbb{T})$ und $N \in \mathbb{N}_0$ sei

$$\begin{aligned} S_N(f)(t) &:= S_N(f,t) := \sum_{k=-N}^{N} S_k(f,t), \quad t \in \mathbb{T} \\ \sigma_N(f)(t) &:= \sigma_N(f,t) := \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} S_n(f,t), \quad t \in \mathbb{T}. \end{aligned}$$

Es gilt dann (wegen Lemma 1.8(b)):

$$\sigma_N(f,t) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=-N}^{N} (N+1-|k|)\hat{f}(k)e^{ikt} = \sum_{k=-N}^{N} \Big(1 - \frac{|k|}{N+1}\Big)\hat{f}(k)e^{ikt} = F_N * f(t),$$

wobei

$$F_N(t) := \sum_{k=-N}^{N} \Big(1 - \frac{|k|}{N+1}\Big)e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{T}, N \in \mathbb{N}_0,$$

der *Fejér-Kern* ist.

Frage: Ist (F_n) eine Dirac-Folge auf $\mathbb{T}$?

Nach Konstruktion gilt $F_n = \frac{1}{n+1}(D_0 + D_1 + \ldots + D_n)$, also genügt die Folge (F_n) der Bedingung (D1).

2.7. Lemma: (a) Für $n \in \mathbb{N}_0$, $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$F_n(t) = \frac{1}{n+1}\Big(\frac{\sin(\frac{n+1}{2}t)}{\sin(t/2)}\Big)^2.$$

(b) (F_n) ist eine positive Dirac-Folge.

Beweis. zu (a): Es gilt

$$\sin^2(t/2) = \frac{1}{2}(1 - \cos t) = -\frac{1}{4}e^{-it} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{it}$$

und weiter

$$\begin{aligned}
&\Big(-\frac{1}{4}e^{-it}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{it}\Big)\sum_{k=-n}^{n}\Big(1-\frac{|k|}{n+1}\Big)e^{ikt}\\
=&\sum_{k=-n}^{n}-\Big(1-\frac{|k|}{n+1}\Big)\frac{e^{i(k-1)t}}{4}+\sum_{k=-n}^{n}\Big(1-\frac{|k|}{n+1}\Big)\frac{e^{ikt}}{2}+\sum_{k=-n}^{n}-\Big(1-\frac{|k|}{n+1}\Big)\frac{e^{i(k+1)t}}{4}\\
=&\sum_{k=-(n+1)}^{n}-\Big(1-\frac{|k+1|}{n+1}\Big)\frac{e^{ikt}}{4}+\sum_{k=-n}^{n}\Big(1-\frac{|k|}{n+1}\Big)\frac{e^{ikt}}{2}+\sum_{k=-n}^{n+1}-\Big(1-\frac{|k-1|}{n+1}\Big)\frac{e^{ikt}}{4}\\
=&\frac{1}{n+1}\Big(-\frac{1}{4}e^{-i(n+1)t}-\frac{1}{4}e^{i(n+1)t}+\frac{1}{2}\Big),
\end{aligned}$$

denn für $|k|\le n$ gilt

$$\frac{|k+1|-2|k|+|k-1|}{4(n+1)}=\begin{cases}\frac{1}{2(n+1)} & ,k=0\\ 0 & ,1\le|k|\le n\end{cases}.$$

zu (b): Wie oben gesehen, genügt (F_n) der Bedingung (D1). Nach (a) ist $F_n(t)\ge 0$ für alle $n\in\mathbb{N}_0$, $t\in\mathbb{T}$, also genügt (F_n) der Bedingung (D2). Zum Beweis von (D3) sei $\delta\in(0,\pi)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}|F_n(t)|\,dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}\frac{1}{n+1}\Big(\frac{\sin(\frac{n+1}{2}t)}{\sin(t/2)}\Big)^2\,dt\\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}dt\cdot\frac{1}{(n+1)\sin(\delta/2)}\longrightarrow 0\ (n\to\infty).
\end{aligned}$$

□

2.8. Satz: Sei $f\in L^1(\mathbb{T})$. Dann gilt

$$\|\sigma_n(f)-f\|_{L^1(\mathbb{T})}\longrightarrow 0\ (n\to\infty).$$

Beweis. Satz 2.5, Lemma 2.7 und die Darstellung $\sigma_n(f)=F_n*f$. □

2.9. Folgerung: Ist $f\in L^1(\mathbb{T})$ mit $\hat f(n)=0$ für alle $n\in\mathbb{Z}$, so ist $f=0$ fast überall.

Beweis. $\sigma_n(f)=0$ und Satz 2.8. □

2.10. Satz (Riemann-Lebesgue-Lemma): Für jedes $f\in L^1(\mathbb{T})$ gilt

$$\hat f(n)\to 0\quad(|n|\to\infty).$$

Beweis. Sei $\varepsilon>0$. Wähle $n_0\in\mathbb{N}$ mit $\|\sigma_{n_0}(f)-f\|_{L^1}<\varepsilon$. Dann gilt für alle $n\ge n_0$:

$$|\hat f(n)|=|(f-\widehat{\sigma_{n_0}(f)})(n)|\le\|f-\sigma_{n_0}(f)\|_{L^1}<\varepsilon.$$

□

Homogene Banachräume

2.11. Definition: Ein *homogener Banachraum auf* $\mathbb{T}$ ist ein Teilraum B von $L^1(\mathbb{T})$ mit Norm $\|\cdot\|_B \geq \|\cdot\|_{L^1}$ so, dass $(B, \|\cdot\|_B)$ ein Banachraum ist und dass gilt:

(H1) Für alle $f \in B$ und $\tau \in \mathbb{T}$ ist $f_\tau \in B$ und $\|f_\tau\|_B = \|f\|_B$.

(H2) Für alle $f \in B$ und $\tau_0 \in \mathbb{T}$ gilt $\lim_{\tau \to \tau_0} \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_B = 0$.

Ende 4.Vorl.

Bemerkung: (a) $L^1(\mathbb{T})$ ist ein homogener Banachraum (nach Lemma 2.3).

(b) Es reicht, dass $\|\cdot\|_{L^1} \leq c_0 \|\cdot\|_B$ für eine Konstante c_0 und dass für jedes $f \in B$ die Abbildung $\tau \to f_\tau$ wohldefiniert und stetig $\mathbb{T} \to B$ ist (Übungsaufgabe).

2.12. Beispiele: (a) $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$. (H2) folgt aus der gleichmäßigen Stetigkeit von $f \in C(\mathbb{T})$.

(b) $C^n(\mathbb{T})$, der Raum aller n-mal stetig differenzierbaren 2π-periodischen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, ist ein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$ bzgl. der Norm $\|f\|_{C^n(\mathbb{T})} = \sum_{k=0}^n \|f^{(k)}\|_\infty$.

(c) Für $1 \leq p < \infty$ ist $L^p(\mathbb{T}) = \{f \in L^1(\mathbb{T}) : \|f\|_{L^p} := \left(\frac{1}{2\pi}\int_\mathbb{T} |f(t)|^p \, dt\right)^{1/p} < \infty\}$ ein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$. Die Eigenschaft (H2) gilt für $f \in C(\mathbb{T})$ und $C(\mathbb{T})$ ist dicht in $L^p(\mathbb{T})$.

(d) Der Raum $(L^\infty(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ ist kein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$, da für $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ gilt:

$$\tau \mapsto f_\tau \text{ ist stetig bzgl. } \|\cdot\|_\infty \iff f \text{ ist gleichmäßig stetig.}$$

2.13. Lemma: Sei $B \subseteq L^1(\mathbb{T})$ ein homogener Banachraum, der (H1) genügt. Sei

$$B_c := \{f \in B : \ \tau \mapsto f_\tau \text{ ist stetig } \mathbb{T} \to B \ \}.$$

Dann ist B_c ein abgeschlossener Teilraum von $(B, \|\cdot\|_B)$ und ein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$.

Das folgende Theorem verallgemeinert Satz 2.5.

2.14. Theorem: Sei B ein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$. Ist $f \in B$ und (k_n) eine Dirac-Folge auf $\mathbb{T}$, so gilt

$$\|k_n * f - f\|_B \longrightarrow 0 \ (n \to \infty).$$

2.15. Folgerung: (a) Ist B homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$, so ist

$$\mathbb{P}_B := \{p \in B : \ p \text{ ist trigonometrisches Polynom } \}$$

dicht in B.

(b) Jede stetige 2π-periodische Funktion kann gleichmäßig durch trigonometrische Polynome approximiert werden (Weierstraß).

Beweis. (a) Bzgl. $\|\cdot\|_B$ gilt nach Theorem 2.14:
$$\sigma_n(f) = F_n * f \longrightarrow f.$$
(b) Beispiel 2.12(a) und Theorem 2.14. □

Beweis von Theorem 2.14. Wie wir im Beweis zeigen, gilt:

Ist $f \in B$ und $k \in C(\mathbb{T})$, so gilt $k * f \in B$ und
$$\|k * f\|_B \leq \|k\|_{L^1}\|f\|_B.$$

Sei $f \in B$. Dann ist $\tau \mapsto f_\tau$ stetig als Abbildung $\mathbb{T} \to B$ und nach Lemma 2.2 gilt:
$$\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k_n(\tau) f_\tau \, d\tau}_{\in B} \longrightarrow f \ (n \to \infty) \text{ bzgl. } \|\cdot\|_B.$$
Wegen $B \subseteq L^1(\mathbb{T})$ ist $f \in L^1(\mathbb{T})$ und $\tau \mapsto f_\tau$ ist stetig als Abbildung $\mathbb{T} \to L^1(\mathbb{T})$. Somit existiert
$$\frac{1}{2\pi}\|\cdot\|_{L^1}\text{-}\int_{\mathbb{T}} k_n(\tau) f_\tau \, d\tau \overset{2.4}{=} k_n * f.$$
Wegen $\|\cdot\|_B \geq \|\cdot\|_{L^1}$ gilt $\|\cdot\|_{L^1}\text{-}\int \ldots = \|\cdot\|_B\text{-}\int \ldots$ (betrachte die Konvergenz entsprechender Riemann-Summen). Also gilt $k_n * f \in B$ und $k_n * f \longrightarrow f$ bzgl. $\|\cdot\|_B$. Die Abschätzung ergibt sich folgendermaßen:
$$\|k * f\|_B = \|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k(\tau) f_\tau \, d\tau\|_B \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |k(t)| \|f_\tau\|_B \, d\tau = \|k\|_{L^1}\|f\|_B.$$
□

2.16. Weitere Dirac-Folgen: (a) Der *de la Vallée-Poussin-Kern* (→ Übungsaufgabe)
$$V_n(t) := 2F_{2n+1}(t) - F_n(t).$$
(b) Der *Poisson-Kern*: Definiere für $r \in [0, 1)$:
$$P(r, t) := 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos(kt), \quad t \in \mathbb{T}.$$
Hier betrachtet man $r \to 1-$ statt $n \to \infty$. Die Reihe konvergiert absolut in $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{T}$. Es ist $\cos(kt) = \operatorname{Re}(e^{ikt})$. Somit gilt
$$\begin{aligned}
P(r,t) &= 1 + 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty}(re^{it})^k \\
&= 1 + 2\operatorname{Re}\frac{re^{it}}{1 - re^{it}} \\
&= \operatorname{Re}\Big(\frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}}\Big) = \operatorname{Re}\Big(\frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}}\frac{1 - re^{it}}{1 - re^{it}}\Big) \\
&= \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2},
\end{aligned}$$

wie man durch Rechnung bestätigt. Insbesondere ist $P(r,\cdot)$ monoton fallend auf $[0,\pi]$.

zu (D1): Es gilt (wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} P(r,t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} dt + \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 1.$$

zu (D2): Nach obiger Darstellung ist $P(r,t) \geq 0$, da $1-r^2 > 0$ und $1-2r\cos t + r^2 \geq 1-2r+r^2 > 0$. Somit folgt (D2) aus (D1).

zu (D3): Für $\delta \in (0,\pi)$ gilt:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta} P(r,t)\,dt \leq \frac{2(\pi-\delta)}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta+r^2} \longrightarrow \frac{2(\pi-\delta)}{2\pi}\frac{0}{2(1-\cos\delta)}\ (r\to 1-).$$

Nach Theorem 2.14 gilt somit

$$P(r,\cdot)*f \longrightarrow f\ (r\to 1-) \text{ bzgl. } \|\cdot\|_B,$$

falls $f \in B$ und B homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$ ist. Dabei ist

$$P(r,t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} r^k \underbrace{\cos(kt)}_{(e^{ikt}+e^{-ikt})/2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ikt}$$

und wegen der gleichmäßigen Konvergenz folglich

$$(P(r,\cdot)*f)(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}\hat{f}(n)e^{int},\ t\in\mathbb{T}.$$

Die rechte Seite bezeichnet man als *Abel-Mittel* der Reihe $\sum_n \hat{f}(n)e^{int}$. Die Konvergenzaussage bedeutet dann, dass die Fourierreihe $\sum_n \hat{f}(n)e^{in(\cdot)}$ in B *Abel-summierbar* ist mit Wert f.

Ende 5.Vorl.

— Bonus —

Definition: Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt *Abel-summierbar* mit Wert $s \in \mathbb{R}$, falls für jedes $r \in [0,1)$ das *Abel-Mittel* $A(r) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ konvergiert und $\lim_{r\to 1-} A(r) = s$ gilt.

Dabei gilt: Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ Cesáro-summierbar mit Wert s, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ Abel-summierbar mit Wert s.

Beweis. Setze $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ und $\sigma_n := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k$. Es gelte $\sigma_n \to s$. Für $r\in[0,1)$ ist

$$A(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(s_k - s_{k-1})r^k = (1-r)\sum_{k=0}^{\infty} s_k r^k = (1-r)^2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\sigma_k r^k$$

und $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)r^k = (1-r)^{-2}$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Wir finden $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|\sigma_k - s| < \varepsilon$ für $k \geq n_0$. Dann gilt für $r \in [0,1)$:

$$\begin{aligned} |A(r) - s| &= |(1-r)^2 \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(\sigma_k - s)r^k| \\ &\leq \underbrace{(1-r)^2 \sum_{k=0}^{n_0}(k+1)|\sigma_k - s|r^k}_{\to 0\ (r\to 1-)} + \underbrace{(1-r)^2 \sum_{k>n_0}(k+1)\varepsilon r^k}_{\leq \varepsilon}. \end{aligned}$$

□

— Ende des Bonus —

3 Fourierreihen in $L^2(\mathbb{T})$ und in Dualräumen

3.1. Erinnerung: (a) Der Raum $L^2(\mathbb{T})$ ist gegeben durch

$$L^2(\mathbb{T}) = \{f \in L^1(\mathbb{T}) : \|f\|_{L^2} := \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2\,dt\Big)^{1/2} < \infty\}.$$

Der Raum $L^2(\mathbb{T})$ ist ein Hilbertraum bzgl. des Skalarproduktes

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

Es ist $\|f\|_{L^2} = \sqrt{\langle f, f\rangle}$.
Zwei Funktionen $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ heißen *orthogonal*, geschrieben $f \perp g$, wenn $\langle f, g\rangle = 0$ ist.
(b) Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und $\Lambda \neq 0$. Eine Familie $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ heißt *Orthonormalsystem* (ONS), falls gilt

$$\forall \lambda, \mu \in \Lambda : \langle f_\lambda, f_\mu\rangle = \delta_{\lambda\mu}.$$

Ein ONS $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ heißt *vollständig*, falls für alle $f \in H$ gilt:

$$\Big(\forall \lambda \in \Lambda : \langle f, f_\lambda\rangle = 0\Big) \Longrightarrow f = 0.$$

Ein vollständiges ONS kann also nicht echt vergrößert werden.
(c) Ist $(\varphi_j)_{j=1}^N$ ein ONS und sind $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{C}$, so gilt

$$\|\sum_{j=1}^N a_j\varphi_j\|^2 = \sum_{j=1}^N |a_j|^2$$

(vgl. Lineare Algebra).

(d) Ist $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ein ONS, $f \in H$ und $(a_j) := (\langle f, \varphi_j\rangle)$, so gilt für jedes $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|f - \sum_{j=1}^N a_j\varphi_j\|^2 = \langle f - \sum a_j\varphi_j, f - \sum a_j\varphi_j\rangle \\ &= \|f\|^2 - \sum_j a_j\langle\varphi_j, f\rangle - \sum_j \overline{a_j}\langle f, \varphi_j\rangle + \sum_j |a_j|^2 \\ &= \|f\|^2 - \sum_{j=1}^N |a_j|^2. \end{aligned}$$

Also ist

$$\sum_{j=1}^\infty |a_j|^2 \leq \|f\|^2 \quad \text{(Besselsche Ungleichung).}$$

(e) **Satz:** Sei $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ein ONS im Hilbertraum H. Dann sind äquivalent:

(i) $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ist vollständig.

(ii) $\forall f \in H$: $f = \sum_{j=1}^\infty \langle f, \varphi_j\rangle\varphi_j$.

(iii) $\forall f \in H$: $\|f\|^2 = \sum_{j=1}^\infty |\langle f, \varphi_j\rangle|^2$.

(iv) $\forall f, g \in H$: $\langle f, g\rangle = \sum_{j=1}^\infty \langle f, \varphi_j\rangle\overline{\langle g, \varphi_j\rangle}$.

Die Eigenschaften (iii) und (iv) heißen *Parsevalsche* Gleichungen.

(f) **Satz:** Ist $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein vollständiges ONS, so ist die Abbildung

$$H \to l^2(\mathbb{N}),\ f \mapsto (\langle f, \varphi_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$$

eine lineare und isometrische Bijektion.

3.2. Satz: Im Hilbertraum $(L^2(\mathbb{T}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ bilden die Funktionen $(e^{in(\cdot)})_{n\in\mathbb{Z}}$ ein vollständiges ONS.

Beweis. Wegen

$$\langle e^{in(\cdot)}, e^{im(\cdot)}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{int}\overline{e^{imt}}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{i(n-m)t}\,dt = \delta_{nm}$$

ist die Folge ein ONS. Ist $f \in L^2(\mathbb{T})$ mit

$$0 = \langle f, e^{in(\cdot)}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-int}\,dt = \hat{f}(n)$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$, so folgt $f = 0$ fast überall nach Folgerung 2.9 (beachte $f \in L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$). □

3.3. Folgerung: Für alle $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ gilt:

(a) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 \, dt$,

(b) $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)\overline{g(t)} \, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}$,

(c) $f = \| \cdot \|_{L^2} - \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{in(\cdot)}}_{=S_N(f)}$.

(d) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$, so gibt es genau ein $h \in L^2(\mathbb{T})$ mit $\hat{h}(n) = a_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, nämlich

$$f = \| \cdot \|_{L^2} - \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{in(\cdot)}.$$

Bemerkung: Folgerung 3.3(c) besagt, dass Fourierreihen sich in $L^2(\mathbb{T})$ besser verhalten, als wir dies nach Satz 2.8 wissen.

Frage: Wie ist das für homogene Banachräume $B \neq L^2(\mathbb{T})$?

3.4. Satz: Sei B ein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$. Dann sind äquivalent:

(i) Für alle $f \in B$ gilt $\|S_n(f) - f\|_B \to 0$ $(n \to \infty)$.

(ii) Es gibt ein $C > 0$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $f \in B$ gilt: $\|S_n(f)\|_B \leq C\|f\|_B$.

Eigenschaft (ii) ist gleichbedeutend mit $\sup_n \|S_n\|_{B\to B} < \infty$.

Beweis. Nach Folgerung 2.15(a) ist $\mathbb{P}_B$ dicht in B. Für $p \in \mathbb{P}_B$ gilt $S_n(p) = p$, wenn $n \geq \operatorname{Grad} p$. Die Aussage gilt somit nach Banach-Steinhaus (→ Funktionalanalysis). □

Bemerkung: In der Situation von Satz 3.4 ist nach Theorem 2.14:

$$\|S_n(f)\|_B = \|D_n * f\|_B \leq \|D_n\|_{L^1} \|f\|_B,$$

also $\|S_n\|_{B\to B} \leq \|D_n\|_{L^1}$.

3.5. Beispiele: (a) Es ist $\|S_n\|_{L^2\to L^2} = 1$ (nach 3.3(a) und 3.1(d)).

(b) $B = L^1(\mathbb{T})$: Für den Fejér-Kern gilt $\|F_N\|_{L^1} = 1$ für jedes $N \in \mathbb{N}$. Für festes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\|S_n(F_N)\|_{L^1} = \|D_n * F_N\|_{L^1} = \|F_N * D_n\|_{L^1} \to \|D_n\|_{L^1} \ (N \to \infty).$$

Somit ist $\|S_n\|_{L^1\to L^1} = \|D_n\|_{L^1} \to \infty$ $(n \to \infty)$ nach Lemma 2.6.

(c) $B = C(\mathbb{T})$: Sei $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Sei $\psi_n \in C(\mathbb{T})$ mit $\|\psi_n\|_\infty = 1$ und $\psi_n(-t) = \operatorname{sgn}(D_n(t))$ für $t \in \mathbb{T} \setminus M$, wobei $\frac{1}{2\pi}\int_M |D_n(t)|\,dt < \varepsilon/2$ (M ist eine "kleine" Obermenge der Sprungstellen von $\operatorname{sgn} D_n$). Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|S_n(\psi_n)\|_\infty &\geq |S_n(\psi_n, 0)| = \frac{1}{2\pi}\Big|\int_{\mathbb{T}} D_n(t)\psi_n(-t)\,dt\Big| \\
&\geq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}\setminus M} |D_n(t)|\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_M |D_n(t)|\,dt \\
&\geq \|D_n\|_{L^1} - 2\cdot\frac{1}{2\pi}\int_M |D_n(t)|\,dt \geq \|D_n\|_{L^1} - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Somit ist auch hier $\|S_n\|_{C(\mathbb{T})\to C(\mathbb{T})} = \|D_n\|_{L^1} \to \infty$ $(n \to \infty)$.

Fazit: Es gibt $f \in L^1(\mathbb{T})$ und $g \in C(\mathbb{T})$ mit

$$S_n(f) \not\to f \text{ bzgl. } \|\cdot\|_{L^1}, \quad S_n(g) \not\to g \text{ bzgl. } \|\cdot\|_\infty.$$

Fourierreihen linearer Funktionale

3.6. Definition: Sei B ein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$ mit $e^{in(\cdot)} \in B$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Sei

$$B' := \{\mu : B \to \mathbb{C} : \ \mu \text{ ist stetig}\}$$

der *Dualraum von B* mit Norm

$$\|\mu\|_{B'} := \sup_{\|f\|_B \leq 1} |\mu(f)|.$$

Für $\mu \in B'$ und $n \in \mathbb{Z}$ heißt

$$\hat{\mu}(n) := \mu(e^{-in(\cdot)})$$

der *n-te Fourierkoeffizient von μ* und

$$S[\mu] \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\mu}(n) e^{in(\cdot)} \quad \text{(formal!)}$$

die *Fourierreihe von μ*.

3.7. Bemerkung: Sei B ein homogener Banachraum mit $\overline{f} \in B$ und $\|\overline{f}\|_B = \|f\|_B$ für alle $f \in B$. Setze $B^* := B'$. Für $f \in B$, $\mu \in B^*$ schreiben wir

$$\langle f, \mu\rangle := \overline{\mu(\overline{f})}, \quad \langle \mu, f\rangle := \overline{\langle f, \mu\rangle} = \mu(\overline{f})$$

in Analogie zum L^2-Skalarprodukt: Für $B = L^2(\mathbb{T})$ ist

$$L^2(\mathbb{T}) \to B^*, \quad g \mapsto \langle \cdot, g\rangle_{L^2}$$

eine bijektive Isometrie, die aber nicht linear, sondern antilinear ist.

Beachte: Mit obiger Definition ist für $f \in B$, $\mu, \nu \in B^*$ und $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$\langle f, \alpha\mu + \nu\rangle = \overline{\alpha}\langle f, \mu\rangle + \langle f, \nu\rangle$$

wie bei $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$.

Beachte weiter, dass nach Voraussetzung an B gilt

$$\|\mu\|_{B'} = \sup_{\|f\|_B \le 1} |\mu(f)| = \sup_{\|f\|_B \le 1} |\overline{\mu(\overline{f})}| = \sup_{\|f\|_B \le 1} |\langle \mu, f\rangle| =: \|\mu\|_{B^*}.$$

Somit ist auch

$$\hat{\mu}(n) = \mu(\overline{e^{-in(\cdot)}}) = \langle \mu, e^{in(\cdot)}\rangle$$

und

$$|\hat{\mu}(n)| \le \|\mu\|_{B^*} \|e^{in(\cdot)}\|_B$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $\mu \in B^*$.

Ende 6.Vorl.

3.8. Satz: Sei B ein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$ mit $e^{in(\cdot)} \in B$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ so, dass für alle $f \in B$ gilt $\overline{f} \in B$ und $\|\overline{f}\|_B = \|f\|_B$. Für $f \in B$, $\mu \in B^*$ gilt

$$\langle f, \mu\rangle = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} \Big(1 - \frac{k}{N+1}\Big) \hat{f}(n)\overline{\hat{\mu}(n)},$$

dh die Cesáro-Mittel von $\sum_n \hat{f}(n)\overline{\hat{\mu}(n)}$ konvergieren gegen $\langle f, \mu\rangle$, vgl. Parseval. Im Sinne der Funktionalanalysis bedeutet die Aussage, dass die Cesáro-Mittel der Fourierreihe schwach*-konvergent gegen μ sind. Beachte dazu, dass

$$\langle f, \sum_{n=-N}^{N} \hat{\mu}(n) e^{in(\cdot)}\rangle = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)\overline{\hat{\mu}(n)}$$

gilt.

Beweis. Ist $p(t) = \sum_{|k| \le l} \hat{p}(k) e^{ik(\cdot)}$ ein trigonometrisches Polynom, so folgt

$$\langle p, \mu\rangle = \sum_{|k| \le l} \hat{p}(k) \langle e^{ik(\cdot)}, \mu\rangle = \sum_{|k| \le l} \hat{p}(k)\overline{\hat{\mu}(k)}.$$

Ist $f \in B$, so gilt nach Theorem 2.14 $\sigma_N(f) \to f$ bzgl. $\|\cdot\|_B$. Da μ stetig ist, folgt

$$\langle f, \mu\rangle = \lim_{N \to \infty} \langle \sigma_N(f), \mu\rangle = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} \widehat{\sigma_N(f)}(n)\overline{\hat{\mu}(n)} = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} \Big(1 - \frac{|n|}{N+1}\Big) \hat{f}(n)\overline{\hat{\mu}(n)}.$$

□

3.9. Folgerung: In der Situation von Satz 3.8 gilt: Ist $\mu \in B^*$ mit $\hat{\mu}(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, so ist $\mu = 0$.

Beweis. Nach Satz 3.8 ist nämlich $\langle f, \mu \rangle = 0$ für alle $f \in B$. □

3.10. Bemerkung: Für $T : B \to B$ ist $T' : B' \to B'$ definiert durch $(T'\phi)(f) = \phi(Tf)$ für alle $\phi \in B'$, $f \in B$, also durch $T'\phi = \phi \circ T$. Wir definieren $T^* : B^* \to B^*$ durch $\langle f, T^*\phi \rangle = \langle Tf, \phi \rangle$ für alle $\phi \in B^*$, $f \in B$.

Es ist somit $T^*\phi(\overline{f}) = \phi(\overline{Tf})$, dh $T^*\phi = \phi \circ q \circ T \circ q$, wobei $q : B \to B$, $f \mapsto \overline{f}$.

Beispiel: Für $T = i \operatorname{Id}_B$ ist $T' = i \operatorname{Id}_{B'}$ und $T^* = -i \operatorname{Id}_{B'}$.

Beispiel: Wie oben gesehen, gilt

$$\langle S_n(f), \mu \rangle = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\overline{\hat{\mu}(k)} = \langle f, \sum_{k=-n}^{n} \hat{\mu}(k) e^{ik(\cdot)} \rangle,$$

also ist

$$S_n^*(\mu) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{\mu}(k) e^{ik(\cdot)} =: S_n(\mu).$$

Dabei gilt

$$\|S_n\|_{B* \to B^*} = \|S_n^*\|_{B^* \to B^*} = \|S_n\|_{B \to B}.$$

3.11. Beispiel: $B = (C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$. Wir setzen $B^* =: M(\mathbb{T})$.

$M(\mathbb{T})$ ist der Raum der endlichen Borel-Maße auf $\mathbb{T}$, dann

$$\langle f, \mu \rangle = \int_{\mathbb{T}} f \, d\overline{\mu}.$$

Alternativ kann man die Elemente von $M(\mathbb{T})$ durch Stieltjes-Integrale beschreiben

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{T}} f \, d\overline{g},$$

wobei $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ von endlicher Variation auf $\mathbb{T}$ ist und

$$\int_{\mathbb{T}} f \, d\overline{g} = \lim \sum_j f(\xi_j)(\overline{g}(t_j) - \overline{g}(t_{j-1})),$$

ähnlich wie beim Riemann-Integral.

Die Abbildung

$$I : L^1(\mathbb{T}) \to M(\mathbb{T}), \quad h \mapsto I_h : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}, \ f \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)h(t) \, dt$$

ist linear und stetig, und es gilt $\|I_h\|_{M(\mathbb{T})} = \|h\|_{L^1(\mathbb{T})}$ [$\leq$ ist klar, $=$ zeige man zunächst für stetige h, die dicht in $L^1(\mathbb{T})$ liegen]. I ist aber nicht surjektiv:

$$\delta_0 : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto f(0),$$

gehört zu $M(\mathbb{T})$, aber nicht zu $I(L^1(\mathbb{T}))$. Es ist nämlich

$$\langle f, \delta_0 \rangle = \overline{\delta_0(\overline{f})} = f(0),$$

und $\hat{\delta_0}(n) = \delta_0(e^{-in(\cdot)}) = 1$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Für alle $h \in L^1(\mathbb{T})$ gilt aber $\hat{h}(n) \to 0$ ($|n| \to \infty$) und

$$\widehat{I_h}(n) = I_h(e^{-in(\cdot)}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{-int} h(t)\, dt = \hat{h}(n).$$

Definition: Wir nennen $\mu \in M(\mathbb{T})$ *positiv*, falls $\mu(f) \geq 0$ für alle $f \in C(\mathbb{T})$ mit $f \geq 0$ gilt.

Bemerkung: Falls $\mu = I_h$ mit $h \in L^1(\mathbb{T})$ ist, so gilt $\mu \geq 0$ genau dann, wenn $h \geq 0$ fast überall.

3.12. Lemma: Sei $a := (a_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ eine komplexe Folge. Dann sind äquivalent:

(i) Es gibt $\mu \in M(\mathbb{T})$ mit $\mu \geq 0$ und $\hat{\mu}(n) = a_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sigma_n(a) := \sum_{k=-n}^{n} \Big(1 - \frac{|k|}{n+1}\Big) a_k e^{ikt} \geq 0, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $\mu \in M(\mathbb{T})$ mit $\mu \geq 0$ und $\hat{\mu}(n) = a_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Sei $f \in C(\mathbb{T})$ mit $f \geq 0$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \overline{\sum_{k=-n}^{n} \Big(1 - \frac{|k|}{n+1}\Big) a_k e^{ikt}}\, dt = \sum_{k=-n}^{n} \Big(1 - \frac{|k|}{n+1}\Big) \hat{f}(k) \overline{\hat{\mu}(k)} = \langle \sigma_n(f), \mu \rangle = \langle F_n * f, \mu \rangle \geq 0,$$

da $F_n \geq 0$, $f \geq 0$, $\mu \geq 0$. Da f beliebig war, folgt $\sigma_n(a) \geq 0$.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Es gelte $\sigma_n(a) \geq 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$\|\sigma_n(a)\|_{M(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \sigma_n(a)(t)\, dt = a_0$$

für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Für ein trigonometrisches Polynom $p = \sum_{|k|\leq l} \hat{p}(k) e^{ik(\cdot)}$ und $n \geq l$ gilt:

$$\langle p, \sigma_n(a) \rangle = \sum_{|k|\leq l} \Big(1 - \frac{|k|}{n+1}\Big) \hat{p}(k) \overline{a_k} \to \sum_{|k|\leq l} \hat{p}(k) \overline{a_k} \ (n \to \infty).$$

Nach Banach-Steinhaus existiert ein $\mu \in M(\mathbb{T})$ mit $\langle f, \sigma_n(a)\rangle \to \langle f, \mu\rangle$ für alle $f \in C(\mathbb{T})$. Insbesondere folgt $\mu \geq 0$ wegen $\sigma_n(a) \geq 0$ und

$$\hat{\mu}(k) = \langle \mu, e^{ik(\cdot)}\rangle = \lim_{n\to\infty} \widehat{\sigma_n(a)}(k) = a_k$$

für jedes $k \in \mathbb{Z}$. □

Das folgende Theorem erlaubt, die Eigenschaft $\mu \geq 0$ an den Fourierkoeffizienten von $\mu \in M(\mathbb{T})$ abzulesen.

3.13. Theorem (Herglotz): Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine komplexe Folge. Dann sind äquivalent:

(i) Es gibt $\mu \in M(\mathbb{T})$ mit $\mu \geq 0$ und $\hat{\mu}(n) = a_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) Die Folge (a_n) ist *positiv definit*, dh für alle $N \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}^{2N+1}$ gilt

$$\sum_{|n|,|m|\leq N} a_{n-m} z_n \overline{z_m} \geq 0.$$

Ende 7.Vorl.

Beweis. (i) ⇒ (ii): Es gelte (i). Dann ist

$$\begin{aligned}\sum_{|n|,|m|\leq N} a_{n-m} z_n \overline{z_m} &= \sum_{n,m} \mu(e^{-in(\cdot)} e^{im(\cdot)} z_n \overline{z_m}) \\ &= \mu\Big(\underbrace{\Big|\sum_{|n|\leq N} e^{-in(\cdot)} z_n\Big|^2}_{\geq 0}\Big) \geq 0.\end{aligned}$$

(ii) ⇒ (i): Sei (a_n) positiv definit und $N \in \mathbb{N}_0$, $t \in \mathbb{T}$. Wähle $z_n = \begin{cases} e^{int} & , |n| \leq N \\ 0 & , |n| > N \end{cases}$. Dann gilt:

$$0 \leq \sum_{|n|,|m|\leq N} a_{n-m} z_n \overline{z_m} = \sum_{|j|\leq 2N} c_{j,N} e^{ijt},$$

wobei

$$c_{j,N} = |\{(n,m) : |n|, |m| \leq N, n-m = j\}| = 2N+1-|j|.$$

Somit ist

$$(\sigma_{2N}(a))(t) = \frac{1}{2N+1} \sum_{|j|\leq 2N} c_{j,N} a_j e^{ijt} \geq 0$$

für alle $t \in \mathbb{T}$ und $N \in \mathbb{N}_0$. Die Behauptung folgt aus Lemma 3.12. □

Im folgenden erklären wir die Faltung von $\mu \in M(\mathbb{T})$ und $g \in C(\mathbb{T})$.

3.14. Definition und Bemerkung: Für $g \in C(\mathbb{T})$ sei durch $\sigma g(t) := g(-t)$ die *Spiegelung* σg von g erklärt. Für $\mu \in M(\mathbb{T})$ und $g \in C(\mathbb{T})$ sei $\mu * g$ definiert durch

$$\mu * g(\tau) := \mu((\sigma g)_\tau) = \mu(t \mapsto g(\tau - t)).$$

Es gilt $\mu * g \in C(\mathbb{T})$, da $\tau \mapsto (\sigma g)_\tau$ als Abbildung $\mathbb{T} \to C(\mathbb{T})$ stetig ist. Außerdem ist $(\mu, g) \mapsto \mu * g$ bilinear und

$$\|\mu * g\|_\infty \le \|\mu\|_{M(\mathbb{T})} \sup_{\tau \in \mathbb{T}} \|(\sigma g)_\tau\|_\infty = \|\mu\|_{M(\mathbb{T})} \|g\|_\infty.$$

Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\begin{aligned} \widehat{g * \mu}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \mu((\sigma g)_\tau) e^{-in\tau} \, d\tau \\ &= \mu(t \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{-in\tau} g(\tau - t) \, d\tau) \\ &= \mu(t \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{-int} e^{-in\rho} g(\rho) \, d\rho) \\ &= \mu(e^{-in(\cdot)}) \hat{g}(n) = \hat{\mu}(n) \hat{g}(n). \end{aligned}$$

Wir haben so eine Fortsetzung der Faltung

$$L^1(\mathbb{T}) \times C(\mathbb{T}) \to C(\mathbb{T}), \quad (f, g) \mapsto f * g(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f g(\tau - \cdot) \, d\tau$$

zu einer Abbildung $* : M(\mathbb{T}) \times C(\mathbb{T}) \to C(\mathbb{T})$ erklärt (vergleiche die Einbettung $I : L^1(\mathbb{T}) \to M(\mathbb{T})$ aus Beispiel 3.11).

Mit etwas Maßtheorie kann man die Faltung $* : M(\mathbb{T}) \times B \to B$ für jeden homogenen Banachraum B erklären: Wir verweisen auf die Bemerkung am Ende von Abschnitt 4.

4 Translationsinvariante Operatoren auf $\mathbb{T}$

4.1. Definition: Sei B ein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$. Ein stetiger linearer Operator $T : B \to B$ heißt *translationsinvariant*, wenn für alle $\tau \in \mathbb{T}$ und $f \in B$ gilt

$$T(f_\tau) = (Tf)_\tau \; [= (Tf)(\cdot - \tau)].$$

4.2. Lemma: Sei B ein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$ mit $e^{in(\cdot)} \in B$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $T : B \to B$ translationsinvariant. Dann gibt es genau eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ mit

$$\forall n \in \mathbb{Z} \, \forall f \in B : \widehat{Tf}(n) = a_n \hat{f}(n).$$

Beweis. Zunächst gilt für jedes $n \in \mathbb{Z}$ und $\tau \in \mathbb{T}$:

$$e^{-in\tau} T(e^{in(\cdot)}) = T(e^{in(\cdot - \tau)}) = T(e^{in(\cdot)})(\cdot - \tau).$$

Wir werden diese Funktion an der Stelle τ betrachten und setzen $a_n := T(e^{in(\cdot)})(0)$, $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt für alle $k, n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \widehat{T(e^{ik(\cdot)})}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} T(e^{ik(\cdot)})(t) e^{-int}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \underbrace{T(e^{ik(\cdot)})(t) e^{-ikt}}_{=T(e^{ik(\cdot)})=a_k} e^{-i(n-k)t}\, dt \\ &= a_k \delta_{kn}. \end{aligned}$$

Für jedes trigonometrische Polynom ist somit

$$\widehat{T(p)}(n) = \sum_k \hat{p}(k) \widehat{T(e^{ik(\cdot)})}(n) = a_n \hat{p}(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Beliebige $f \in B$ approximiere man durch trigonometrische Polynome. $\square$

In der Situation von Lemma 4.2 haben wir

$$T(e^{in(\cdot)}) = a_n e^{in(\cdot)}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Man kann auch umgekehrt vorgehen und zu einer gegebenen Folge $m := (m(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ einen Operator T so zu finden versuchen, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{T} & Tf \\ \mathscr{F} \downarrow & & \downarrow \mathscr{F} \\ (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} & \xrightarrow{m} & (m(n)\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \end{array}$$

kommutiert. Ein solcher Operator heißt *Fouriermultiplikationsoperator*. Wir schreiben dann $T = T_m$.

4.3. Definition: Sei B ein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$. Eine Folge $m = (m(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ heißt *Fouriermultiplikator* für B, falls es einen stetigen linearen Operator $T : B \to B$ gibt mit $T = T_m$.

Bemerkung: Ist m ein Fouriermultiplikator, so ist $T(e^{in(\cdot)}) = m(n) e^{in(\cdot)}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, und T ist dadurch eindeutig bestimmt.

Ist m beliebig, so gilt für jedes trigonometrische Polynom p:

$$T_m(p) = \sum_n m(n) \hat{p}(n) e^{in(\cdot)}.$$

Für die Stetigkeit reicht es, ein $C > 0$ zu finden mit

$$\|T_m(p)\|_B \le C\|p\|_B, \quad p \in \mathbb{P}_B.$$

Wir zeigen kurz noch, dass T_m auf den trigonometrischen Polynomen translationsinvariant ist:

$$T_m(p_\tau) = \sum_n m(n)\widehat{p_\tau}(n)e^{in(\cdot)} = \sum_n m(n)\hat{p}(n)\underbrace{e^{-in\tau}e^{in(\cdot)}}_{=e^{in(\cdot-\tau)}} = (T_m(p))(\cdot - \tau).$$

4.4. Beispiel: Eine Folge m ist genau dann ein Fouriermultiplikator für $L^2(\mathbb{T})$, falls $m \in L^\infty(\mathbb{Z})$ gilt. Das liegt daran, dass $f \mapsto (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ eine bijektive Isometrie $L^2(\mathbb{T}) \to l^2(\mathbb{Z})$ ist und beschränkte Multiplikationsoperatoren $l^2(\mathbb{Z}) \to l^2(\mathbb{Z})$ genau durch beschränkte Folgen induziert werden. Wir haben also das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{T}) & \to & L^2(\mathbb{T}) \\ \mathscr{F}\downarrow & & \downarrow\mathscr{F} \\ l^2(\mathbb{Z}) & \stackrel{m}{\to} & l^2(\mathbb{Z}). \end{array}$$

4.5. Theorem: Sei B ein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$. Für jedes $\mu \in M(\mathbb{T})$ ist $m := \hat{\mu} := (\hat{\mu}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ ein Fouriermultiplikator für B und $\|T_m\|_{B\to B} \le \|\mu\|_{M(\mathbb{T})}$.

Wir erinnern daran, dass für $\mu \in M(\mathbb{T})$ die Folge $\hat{\mu}$ wegen

$$|\hat{\mu}(n)| = |\mu(e^{-in(\cdot)})| \le \|\mu\|_{M(\mathbb{T})}\|e^{-in(\cdot)}\|_\infty = \|\mu\|_{M(\mathbb{T})}$$

zu $l^\infty(\mathbb{Z})$ gehört.

Beweis. (i) Ist $\mu = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \cdot g(t)\,dt$ mit $g \in C(\mathbb{T})$, so gilt nach Lemma 1.8(b) und nach der Bemerkung hinter 4.3, dass

$$T_m p = g * p, \quad p \in \mathbb{P}_B.$$

(ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$g_n := \sigma_n(\mu) = \sum_{|k|\le n} \Big(1 - \frac{|k|}{n+1}\Big)\hat{\mu}(k)e^{ik(\cdot)}.$$

Dann gilt für $p \in \mathbb{P}_B$: Ende 8.Vorl.

$$g_n * p = \sum_{|k|\le n} \Big(1 - \frac{|k|}{n+1}\Big)\hat{\mu}(k)\hat{p}(k)e^{ik(\cdot)} \to T_m p \ (n \to \infty).$$

Dabei ist

$$\|g_n * p\|_B \le \|g_n\|_{L^1}\|p\|_B = \|\sigma_n(\mu)\|_{M(\mathbb{T})}\|p\|_B \le \|\mu\|_{M(\mathbb{T})}\|p\|_B,$$

denn für $h \in C(\mathbb{T})$ gilt nach Bemerkung 3.10:

$$|\langle\sigma_n(\mu), h\rangle| = |\langle\frac{1}{n+1}(S_0 + \ldots + S_n)(\mu), h\rangle| = |\langle\mu, \sigma_n(h)\rangle| \le \|\mu\|_{M(\mathbb{T})}\|\sigma_n(h)\|_\infty$$

und

$$\|\sigma_n(h)\|_\infty = \|F_n * h\|_\infty \le \underbrace{\|F_n\|_{L^1}}_{=1}\|h\|_\infty,$$

und folglich $\|\sigma_n(\mu)\|_{M(\mathbb{T})} \le \|\mu\|_{M(\mathbb{T})}$.

(iii) Für $p \in \mathbb{P}_B$ gilt nach (ii):

$$\|T_m p\|_B = \lim_{n\to\infty} \|g_n * p\|_B \le \|\mu\|_{M(\mathbb{T})}\|p\|_B,$$

und die Behauptung folgt aus der Bemerkung nach 4.3. □

4.6. Beispiele: (a) Eine Folge m ist Fouriermultiplikator für $B = C(\mathbb{T})$ genau dann, wenn es $\mu \in M(\mathbb{T})$ gibt mit $m = \hat{\mu}$.

Beweis. Eine Richtung ist Theorem 4.5. Die Idee zum Beweis der anderen Richtung ist

$$(T_m g)(t) = \mu * g(t) = \mu(g(t-\cdot)), \quad t \in \mathbb{T},$$

wir erinnern an 3.14. Setze also $\mu(g) := (T_m(\sigma g))(0)$. Dann gilt $\mu \in C(\mathbb{T})' = M(\mathbb{T})$, da $T_m, \sigma : C(\mathbb{T}) \to C(\mathbb{T})$ und $\delta_0 : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ linear und stetig sind.

(i) $T_m g = \mu * g$: Für $g \in C(\mathbb{T})$ und $t \in \mathbb{T}$ gilt nach Definition von μ und wegen der Translationsinvarianz von T:

$$\mu * g(t) = \mu(g(t-\cdot)) = T_m(g(t+\cdot))(0) = T_m(g_{-t})(0) = (T_m g)_{-t}(0) = (T_m g)(t).$$

(ii) Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ und jedes $g \in C(\mathbb{T})$ gilt wegen (i):

$$m(n)\hat{g}(n) = \widehat{T_m(g)}(n) = \widehat{\mu * g}(n) = \hat{\mu}(n)\hat{g}(n),$$

also $m = \hat{\mu}$. □

(b) Eine Folge m ist Fouriermultiplikator für $B = L^1(\mathbb{T})$ genau dann, wenn es $\mu \in M(\mathbb{T})$ gibt mit $m = \hat{\mu}$.

Beweis. Eine Richtung ist Theorem 4.5. Die Idee für die andere Richtung ist ebenfalls $T_m = \mu * f$, aber wir approximieren μ durch $\mu_n = \sigma_n(\mu) = \mu * F_n = T_m(F_n)$ und setzen also

$$\mu_n := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \cdot\, T_m(F_n)(t)\,dt.$$

Dann gilt

$$\|\mu_n\|_{M(\mathbb{T})} = \|T_m(F_n)\|_{L^1} \le \|T_m\|\|F_n\|_{L^1} = \|T_m\|,$$

und für jedes trigonometrische Polynom p gilt

$$\langle p, \mu_n\rangle = \sum_{|k|\le n} \hat{p}(k)\overline{\widehat{\mu_n}(k)} = \sum_{|k|\le n} \hat{p}(k)\Big(1 - \frac{|k|}{n+1}\Big)\overline{m(k)} \to \sum_k \hat{p}(k)\overline{m(k)}\ (n\to\infty),$$

denn

$$\widehat{\mu_n}(k) = \widehat{T_m(F_n)}(k) = \sum_{|l|\le n} \Big(1 - \frac{|l|}{n+1}\Big) \underbrace{\widehat{T(e^{il(\cdot)})}(k)}_{=m(l)\delta_{lk}} = \Big(1 - \frac{|k|}{n+1}\Big) m(k).$$

Nach Banach-Steinhaus konvergiert (μ_n) gegen ein $\mu \in M(\mathbb{T}) = C(\mathbb{T})'$ mit $\|\mu\| \le \|T_m\|$. Es gilt für jedes $k \in \mathbb{Z}$:

$$\hat{\mu}(k) = \mu(e^{-ik(\cdot)}) = \lim_n \mu_n(e^{-ik(\cdot)}) = \lim_n \widehat{\mu_n}(k) = m(k).$$

□

Bemerkung: Mit etwas Maßtheorie kann man die Faltung $* : M(\mathbb{T}) \times B \to B$ für jeden homogenen Banachraum B erklären: Für jedes $f \in B$ ist nämlich $\tau \mapsto f_\tau$ von $\mathbb{T}$ nach B stetig, und für $\mu \in M(\mathbb{T})$ existiert

$$\mu * f := \int_{\mathbb{T}} f_\tau \, d\mu(\tau) \in B.$$

Die so definierte Abbildung $* : m(\mathbb{T}) \times B \to B$ ist bilinear und es gilt die Abschätzung

$$\|\mu * f\|_B = \| \int_{\mathbb{T}} f_\tau \, d\mu\|_B \le \int_{\mathbb{T}} \|f_\tau\|_B d|\mu| = \|f\|_B \|\mu\|_{M(\mathbb{T})},$$

wobei $|\mu|$ die Variation von μ ist. Da $g \mapsto \hat{g}(n)$ von B nach $\mathbb{C}$ linear und stetig ist, gilt außerdem

$$\widehat{\mu * f}(n) = \int_{\mathbb{T}} \widehat{f_\tau}(n) \, d\mu = \int_{\mathbb{T}} e^{-in\tau} \, d\mu \cdot \hat{f}(n) = \hat{\mu}(n)\hat{f}(n)$$

für jedes $n \in \mathbb{Z}$. Beachte, dass auch diese Faltung mittels der Einbettung $I : L^1(\mathbb{T}) \to M(\mathbb{T})$ eine Fortsetzung der Faltung $* : L^1(\mathbb{T}) \times B \to B$ ist.

Im Beweis von Theorem 4.5 und in Beispiel 4.6(b) ist $\mu * f$ als $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(\mu) * f$ zu verstehen. Man könnte dies auch als Definition verwenden.

Schlussbemerkung zur Konvergenz von Fourierreihen: In $L^p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$, gilt

$$S_n(f) \overset{\|\cdot\|_p}{\to} f \ (n \to \infty) \quad \text{für jedes } f \in L^p(\mathbb{T}).$$

Der Beweis gliedert sich im zwei Teile, deren erster eine Übungsaufgabe ist. Der zweite Teil folgt später.

5 Fouriertransformation auf dem $\mathbb{R}^n$

Wie auch $(\mathbb{T}, +)$ ist $(\mathbb{R}^n, +)$ eine abelsche Gruppe, $\mathbb{R}^n$ ist zwar nicht kompakt, aber lokalkompakt, und das Lebesguemaß ist translationsinvariant. Wir verwenden die Notation

$$L^p(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ messbar} : \|f\|_p := \Big(\int |f(x)|^p \, dx\Big)^{1/p} < \infty\}$$

für $1 \le p < \infty$.

5.1. Definition: Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ sei

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)\,dx,$$

wobei $x\xi = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \ldots + x_n\xi_n$ das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ ist. Die Abbildung $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt *Fouriertransformierte von* f.

5.2. Lemma: (a) Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist $\hat{f}$ beschränkt und gleichmäßig stetig mit

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

Die Abbildung $f \to \hat{f}$ ist linear und stetig $L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(b) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $y \in \mathbb{R}^n$. Für $\tau_y f := f(\cdot - y)$ gilt $\widehat{\tau_y f}(\xi) = e^{-iy\xi}\hat{f}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

(c) Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\lambda > 0$ gilt $\int \hat{f}(\xi) g(\lambda\xi)\,d\xi = \int f(\lambda x)\hat{g}(x)\,dx$.

Beweis. (a) Die Abschätzung ist klar. Für $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi+\eta)| &\leq \int |e^{-ix\xi} - e^{-ix(\xi+\eta)}|\,|f(x)|\,dx \\ &= \int |1 - e^{-ix\eta}|\,|f(x)|\,dx \text{ unabh. von } \xi \end{aligned}$$

Wegen $1 - e^{ix\eta} \to 0$ $(\eta \to 0)$ für festes $x \in \mathbb{R}^n$ und $|1 - e^{-ix\eta}| \leq 2$ konvergiert das Integral gegen Null für $\eta \to 0$ nach dem Satz über majorisierte Konvergenz. Somit ist $\hat{f}$ gleichmäßig stetig.

(b) Es gilt mittels Substitution $x = u + y$

$$\int e^{-ix\xi} f(x-y)\,dx = e^{-iy\xi} \int e^{-iu\xi} f(u)\,du = e^{-iy\xi}\hat{f}(\xi).$$

(c) Mittels der Substitutionen $x = \lambda y$ und $\xi = \lambda\eta$ gilt unter Verwendung von Fubini

$$\int\int e^{-ix\xi} f(x) g(\lambda\xi)\,dx\,d\xi = \int f(\lambda y) \underbrace{\int e^{-iy\eta} g(\eta)\,d\eta}_{=\hat{g}(y)}\,dy.$$

$\square$

5.3. Beispiel: Sei $n = 1$ und $h = 1_{[a,b]}$. Dann gilt $\hat{h}(0) = b - a$ und für $\xi \neq 0$:

$$\hat{h}(\xi) = \int_a^b e^{-ix\xi}\,dx = \frac{e^{-ib\xi} - e^{-ia\xi}}{-i\xi}.$$

Somit ist $\hat{h}(\xi) \to 0$ $(|\xi| \to \infty)$, aber $\hat{h} \notin L^1(\mathbb{R})$!

Für $n > 1$ und $h(x) = 1_{\prod_{j=1}^n [a_j,b_j]}(x) = \prod_{j=1}^n 1_{[a_j,b_j]}(x_j)$ ist

$$\hat{h}(\xi) = \prod_{j=1}^{n} \widehat{1_{[a_j,b_j]}}(\xi_j), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Somit gilt auch hier $\hat{h}(\xi) \to 0$ für $|\xi| \to \infty$.

5.4. Riemann-Lebesgue-Lemma: Für jedes $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt $\hat{f}(\xi) \to 0$ für $|\xi| \to \infty$.

Beweis. Der Raum

$$C_0(\mathbb{R}^n) := \{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ stetig} : f(x) \to 0 \ (|x| \to \infty) \}$$

ist bzgl. $\| \cdot \|_\infty$ ein abgeschlossener Teilraum des Banachraumes

$$BUC(\mathbb{R}^n) := \{ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : \ g \text{ ist beschränkt und gleichmäßig stetig} \}.$$

Nach Beispiel 5.3 gilt $\hat{h} \in C_0(\mathbb{R}^n)$ für Funktionen h der Form $h = \sum_k c_k 1_{Q_k}$, wobei die Q_k achsenparallele Quader sind. Die Menge dieser Treppenfunktionen liegt dicht in $L^1(\mathbb{R}^n)$. □ Ende 9.Vorl.

5.5. Rechenregeln: Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

(a) Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist $\mathscr{F}(F(a\cdot))(\xi) = \frac{1}{|a|^n} \hat{f}(\frac{\xi}{a})$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

(b) Für $b \in \mathbb{R}^n$ gilt $\mathscr{F}(e^{ib(\cdot)} f)(\xi) = \hat{f}(\xi - b)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

(c) Ist zusätzlich $x \mapsto x_j f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so ist $\hat{f}$ stetig partiell nach ξ_j differenzierbar und

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \hat{f}(\xi) = \mathscr{F}(x \mapsto (-ix_j) f(x))(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis. (a) zeigt man ähnlich wie 5.2(c). Zum Beweis von (b) schreibt man

$$\int \underbrace{e^{-i\xi x} e^{ibx}}_{= e^{-i(\xi - b)x}} f(x)\, dx = \hat{f}(\xi - b).$$

zu (c): Für $\xi \in \mathbb{R}^n$, $j \in \{1, \dots, n\}$ und $h \neq 0$ gilt

$$\frac{\hat{f}(\xi + he_j) - \hat{f}(\xi)}{h} - \mathscr{F}(x \mapsto (-ix_j) f(x))(\xi) = \int \Big(\frac{e^{-i(\xi + he_j)x} - e^{-i\xi x}}{h} + ix_j e^{-i\xi x} \Big) f(x)\, dx.$$

Der Term in Klammern geht gegen 0 ($h \to 0$) für festes $x \in \mathbb{R}^n$ und ist gleich

$$e^{-i\xi x} \Big(\frac{e^{-ihx_j} - 1}{h} + ix_j \Big) = e^{-i\xi x} \Big(\frac{1}{h} \int_0^h (-ix_j) e^{-itx_j}\, dt + ix_j \Big) = e^{-i\xi x} ix_j \Big(1 - \frac{1}{h} \int_0^h e^{-itx_j}\, dt \Big).$$

Der letzte Term in Klammern ist betragsmäßig ≤ 2. Aus dem Satz über majorisierte Konvergenz folgt die Behauptung. □

5.6. Satz: (Schwache Ableitungen und Fouriertransformation) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und sei $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ derart, dass

$$\int f(x)\partial_j\varphi(x)\,dx = -\int g(x)\varphi(x)\,dx$$

für alle $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ gilt (dh für alle $\varphi \in C^1$ mit $\varphi = 0$ außerhalb einer beschränkten Menge). Dann ist

$$\hat{g}(\xi) = i\xi_j\hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Bemerkung: Die Voraussetzung gilt insbesondere, wenn f stetig partiell differenzierbar ist und $g := \partial_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist.

Beweis. Sei $\xi \in \mathbb{R}^n$. Die Idee ist $\varphi(x) = e^{-ix\xi}$ zu nehmen, aber dann ist $\varphi \notin C_c^1$. Also approximieren wir diese Funktion. Wähle $\psi \in C_c^1$ mit $0 \leq \psi \leq 1$, sowie $\psi(x) = 1$ für $|x| \leq 1$, und setze $\psi_k(x) := \psi(x/k)$ und $\varphi_k(x) := e^{-ix\xi}\psi_k(x)$. Dann ist

$$\int g\varphi_k\,dx = \int g(x)e^{-ix\xi}\psi_k(x)\,dx \to \hat{g}(\xi)$$

wegen $\psi_k(x) \uparrow 1$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ (majorisierte Konvergenz). Außerdem ist wegen $\varphi_k \in C_c^1$:

$$\int g\varphi_k\,dx = -\int f\partial_j\varphi_k\,dx = \underbrace{-\int f(-i\xi_j)\varphi_k\,dx}_{\to i\xi_j\hat{f}(\xi)} - \underbrace{\int f(x)e^{-ix\xi}\partial_j\psi_k(x)\,dx}_{=:A(k)}.$$

Nun ist $\partial_j\psi_k(x) = \frac{1}{k}(\partial_j\psi)(x/k)$ und

$$|A(k)| \leq \int_{|x|\geq k} |f(x)|\,dx \cdot \frac{1}{k} \cdot \|\partial_j\psi\|_\infty \to 0 \ (k \to \infty),$$

da $\partial_j\psi$ beschränkt ist. □

5.7. Beispiel: Für $\phi(x) = e^{-|x|^2/2}$, $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\hat{\phi}(\xi) = (2\pi)^{n/2}e^{-|\xi|^2/2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Es reicht, den Fall $n = 1$ zu betrachten, da $\phi(x) = \prod_{j=1}^n e^{-|x_j|^2/2}$ ist. Im Fall $n = 1$ gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$:

$$\phi'(x) = -x\phi(x).$$

Nach 5.5(c) und 5.6 folgt für jedes $\xi \in \mathbb{R}$:

$$i\xi\hat{\phi}(\xi) = \widehat{\phi'}(\xi) = \widehat{-x\phi(x)}(\xi) = -i(\hat{\phi})'(\xi),$$

dh

$$(\hat{\phi})'(\xi) = -\xi\hat{\phi}(\xi).$$

Somit lösen ϕ und $\hat{\phi}$ dieselbe gewöhnliche, lineare homogene Differentialgleichung, und es ist

$$\hat{\phi}(\xi) = \hat{\phi}(0)\phi(\xi) = \sqrt{2\pi}e^{-|\xi|^2/2}, \xi \in \mathbb{R},$$

wegen $\hat{\phi}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}$.

5.8. Fourierinversion: Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C_b(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für jedes $x \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\,d\xi.$$

Beweis. Wegen 5.5(b) reicht es, den Fall $x = 0$ zu betrachten. Setze $h(x) := e^{-|x|^2/2}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt nach 5.2(c) für jedes $a > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)h(a\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(ax)\hat{h}(x)\,dx.$$

Für $a \to 0+$ konvergiert die linke Seite gegen $\int \hat{f}(\xi)\,d\xi$ (majorisierte Konvergenz und die Voraussetzung $\hat{f} \in L^1$). Da f in 0 stetig ist, finden wir zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|f(y) - f(0)| < \varepsilon$ für $|y| < \delta$. Es gilt dann

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\mathbb{R}^n} f(ax)\hat{h}(x)\,dx - (2\pi)^n f(0)\Big| &\overset{5.7}{=} \Big|\int_{\mathbb{R}^n} (f(ax) - f(0))\hat{h}(x)\,dx\Big| \\ &\le \varepsilon \int_{|x|\le\delta/a} |\hat{h}(x)|\,dx + 2\|f\|_\infty \int_{|x|\ge\delta/a} |\hat{h}(x)|\,dx.\end{aligned}$$

Das erste Integral im letzen Term bleibt für $a \to 0+$ beschränkt, das zweite Integral geht gegen 0. Da f beschränkt ist, folgt die Behauptung für $x = 0$. $\square$

5.9. Beispiel: $f(x) = e^{-a|x|}$ für $x \in \mathbb{R}$, wobei $a > 0$. Es gilt

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} e^{-a|x|}\,dx$$

und

$$\int_0^\infty e^{-ix\xi}e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a + i\xi}, \quad \int_{-\infty}^0 e^{-ix\xi}e^{ax}\,dx = \int_0^\infty e^{iy\xi}e^{-ay}\,dy = \frac{1}{a - i\xi}.$$

Also ist

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{a + i\xi} + \frac{1}{a - i\xi} = \frac{2a}{a^2 + \xi^2}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Die Funktion f ist stetig und beschränkt mit $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Somit ist nach 5.8:

$$\mathscr{F}\Big(x \mapsto \frac{2a}{a^2 + x^2}\Big)(\xi) = 2\pi e^{-a|\xi|}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

5.10. Definition und Satz (Faltung): Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Für fast jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ist $y \mapsto f(y)g(x-y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, und für h, gegeben durch

$$h(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,dy \text{ für fast alle } x \in \mathbb{R}^n,$$

gilt $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Die Funktion h heiß *Faltung von* f *mit* g und wird mit $f * g$ bezeichnet.

Beweis. Die Funktion $F : (x, y) \mapsto f(y)g(x-y)$ ist messbar und

$$\int\int |f(y)g(x-y)|\,dx\,dy = \int |f(y)| \underbrace{\int |g(x-y)|\,dx}_{=\|g\|_1} dy = \|f\|_1\|g\|_1.$$

Nach dem Satz von Fubini-Tonelli gilt $F \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $F(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für fast jedes $x \in \mathbb{R}^n$ und $x \mapsto \int F(x, y)\,dy \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Daraus folgt die Behauptung. □

5.11. Lemma: Die Faltung $* : L^1(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$ ist bilinear und stetig, kommutativ und assoziativ. Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

Beweis. Wir zeigen nur die Formel. Es ist nach Fubini

$$\begin{aligned}\int e^{-ix\xi} f * g(x)\,dx = \int\int e^{-ix\xi} f(y)g(x-y)\,dx\,dy &= \int e^{-iy\xi} f(y) \underbrace{\int e^{-i(x-y)\xi} g(x-y)\,dx}_{=\hat{g}(\xi)}\,dy \\ &= \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).\end{aligned}$$

□

Ende 10.Vorl.

5.12. Definition: Eine *Dirac-Familie auf* $\mathbb{R}^n$ ist eine Folge $(k_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ (stetiger) Funktionen in $L^1(\mathbb{R}^n)$ (hierbei ist $\Lambda = \mathbb{N}$ oder $\Lambda = (a, \infty)$ mit $a \geq 0$), die folgenden Bedingungen genügt:

(D1) $\forall \lambda \in \Lambda$: $\int_{\mathbb{R}} k_\lambda(x)\,dx = 1$,

(D2) $\limsup_{\lambda \to \infty} \|k_\lambda\|_1 < \infty$,

(D3) $\forall \delta > 0$: $\lim_{\lambda \to \infty} \int_{|x| > \delta} |k_\lambda(x)|\,dx = 0$.

Bemerkung: Die Beschränkung auf stetige Funktionen ist nicht wesentlich. Sie dient nur dazu, die Faltung von k_λ mit Funktionen aus homogenen Banachräumen auf $\mathbb{R}^n$ technisch zu vereinfachen (siehe unten).

5.13. Beispiele: Sei $\rho \in L^1(\mathbb{R}^n)$ stetig mit $\int \rho(x)\,dx = 1$. Dann definiert $\rho_\lambda(x) := \lambda^n \rho(\lambda x)$ eine Dirac-Familie $(\rho_\lambda)_{\lambda>0}$ auf $\mathbb{R}^n$. Wir verwenden die Substitution $x = y/\lambda$, $dx = \lambda^{-n}\,dy$ und erhalten

$$\int \rho_\lambda(x)\,dx = \lambda^n \int \rho(\lambda x)\,dx = \int \rho(y)\,dy = 1,$$

dh (D1) gilt. Genauso folgt

$$\|k_\lambda\|_1 = \int |\rho(y)|\,dy = \|\rho\|_1$$

für jedes $\lambda > 0$, und (D2) gilt. Für jedes $\delta > 0$ ist hingegen

$$\int_{|x|>\delta} |\rho_\lambda(x)|\,dx = \int_{|y|>\lambda\delta} |\rho(y)|\,dy \to 0 \quad (\lambda \to \infty),$$

so dass (D3) gilt. Konkrete Beispiele sind

(a) der *Gauß-Kern*: $G(x) = (2\pi)^{-n/2} e^{-|x|^2/2}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Die Funktion $G \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist stetig mit $G \geq 0$ und $\int G(x)\,dx = \hat{G}(0) = 1$ (siehe 5.7).

(b) der *Poisson-Kern*: $P(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Die Funktion $P \in L^1(\mathbb{R})$ stetig mit $P \geq 0$ und $\int P(x)\,dx = 1$ (Stammfunktion ist $\pi^{-1}\arctan x$).

Häufig hat ρ noch beschränkten Träger, etwa $\rho = 0$ außerhalb von $B(0,1)$. Setzt man $\rho_k := k^n \rho(k\cdot)$, so gilt $\rho_k = 0$ außerhalb von $B(0,1/k)$.

5.14. Definition: Ein homogener Banachraum auf $\mathbb{R}^n$ ist ein Banachraum $B \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ mit

(H1) Für alle $y \in \mathbb{R}^n$ und $f \in B$ gilt $\tau_y f := f(\cdot - y) \in B$ und $\|\tau_y f\|_B = \|f\|_B$,

(H2) Für alle $f \in B$ ist die Abbildung $\mathbb{R}^n \to B$, $y \mapsto \tau_y f$ stetig.

Beispiele Für $1 \leq p < \infty$ ist $L^p(\mathbb{R}^n)$ ein homogener Banachraum auf $\mathbb{R}^n$. Ebenso sind $C_0(\mathbb{R}^n)$ und $BUC(\mathbb{R}^n)$ homogene Banachräume auf $\mathbb{R}^n$. Hingegen sind $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und

$$C_b(\mathbb{R}^n) := \{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : \ f \text{ ist stetig und beschränkt} \}$$

bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ keine homogenen Banachräume auf $\mathbb{R}^n$.

5.15. Definition und Satz: (a) Ist $k \in L^1(\mathbb{R}^n)$ stetig, so ist

$$k * f := \int k(y)\tau_y f\,dy \in B$$

für jedes $f \in B$, wobei das Integral ein absolut konvergentes uneigentliches Riemann-Integral mit Werten in B ist. Außerdem gilt

$$\|k * f\|_B \leq \|k\|_1 \|f\|_B, \quad f \in B.$$

(b) Ist (k_λ) eine Dirac-Familie auf $\mathbb{R}^n$ und B ein homogener Banachraum auf $\mathbb{R}^n$, so gilt für jedes $f \in B$, dass

$$\|k_\lambda * f - f\|_B \to 0 \quad (\lambda \to \infty).$$

Beweis. zu (a): Wegen

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|k(y)\tau_y f\|_B \, dy = \int |k(y)| \underbrace{\|\tau_y f\|_B}_{=\|f\|_B} = \|k\|_1 \|f\|_B$$

ist das Integral absolut konvergent und die Abschätzung folgt.

zu (b): Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir $\delta > 0$ mit $\|\tau_y f - f\|_B < \varepsilon$ für $|y| \leq \delta$ und schreiben wieder

$$\begin{aligned} \|k_\lambda * f - f\|_B &\overset{(D1)}{=} \|\int k_\lambda(y)(\tau_y f - f)\, dy\|_B \leq \int |k_\lambda(y)| \|\tau_y f - f\|_B \, dy \\ &\leq \varepsilon \int_{|y| \leq \delta} |k_\lambda(y)| \, dy + 2\|f\|_B \int_{|y| > \delta} |k_\lambda(y)| \, dy. \end{aligned}$$

Wir erhalten wegen (D3):

$$\limsup_{\lambda \to \infty} \|k_\lambda * f - f\|_B \leq \varepsilon \limsup_{\lambda \to \infty} \|k_\lambda\|_1,$$

woraus wegen (D2) die Behauptung folgt. □

Beispiele: (a) Wie oben sei G der Gauß-Kern. Setzen wir für $t > 0$:

$$G(t, x) := t^{-n/2} G(x/\sqrt{t}) = G_{t^{-1/2}}(x) = (2\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/(2t)},$$

so gilt für jedes $p \in [1, \infty)$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$:

$$\|G(t, \cdot) * f - f\|_p \to 0 \quad (t \to 0+),$$

was im Zusammenhang mit der Wärmeleitungsgleichung interessant ist. Entsprechend hat man

$$\|G(t, \cdot) * f - f\|_\infty \to 0 \quad (t \to 0+),$$

für jedes $f \in BUC(\mathbb{R}^n)$.

(b) Setzt man entsprechend $P(t, x) := t^{-n} P(x/t)$, wobei P den Poisson-Kern bezeichnet, so gilt genauso

$$\|P(t, \cdot) * f - f\|_p \to 0 \quad (t \to 0+)$$

für $f \in L^p(\mathbb{R})$ und $1 \leq p < \infty$ und

$$\|P(t, \cdot) * f - f\|_\infty \to 0 \quad (t \to 0+)$$

für jedes $f \in BUC(\mathbb{R})$.

6 Der Schwartzraum $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

6.1. Definition: Der *Schwartzraum* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist gegeben durch

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) := \{\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : \ \psi \text{ ist } C^\infty \text{ und } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n : x \mapsto x^\beta \partial^\alpha \psi(x) \text{ beschränkt}\},$$

wobei wir die übliche Multiindexnotation verwenden: Für $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ist

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha &:= \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}, \\
|\alpha| &:= \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n, \\
\alpha! &:= \alpha_1! \alpha_2! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!, \\
\beta \leq \alpha &:\Leftrightarrow \beta_1 \leq \alpha_1, \beta_2 \leq \alpha_2, \ldots, \beta_n \leq \alpha_n, \\
\binom{\alpha}{\beta} &:= \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} = \binom{\alpha_1}{\beta_1}\binom{\alpha_2}{\beta_2} \cdot \ldots \cdot \binom{\alpha_n}{\beta_n}, \beta \leq \alpha, \\
x^\alpha &:= x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n.
\end{aligned}$$

Bemerkung: Die Multiindexnotation ist sehr praktisch zum Umgang mit beliebigen partiellen Ableitungen. So gilt zum Beispiel die *Leibnizregel* für Produkte

$$\partial^\alpha(\varphi \cdot \psi) = \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \partial^\gamma \varphi \partial^{\alpha - \gamma} \psi,$$

die man durch Induktion nach $|\alpha|$ beweisen kann.

Bemerkung: Es ist klar, dass für $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und beliebiges $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ auch $\partial^\alpha \psi$ und $x \mapsto x^\alpha \psi(x)$ zu $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gehören.

6.2. Satz: Für $\varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt $\varphi \cdot \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Nach der Leibnizregel gilt für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$:

$$x^\beta \partial^\alpha(\varphi \cdot \psi) = \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \underbrace{x^\beta \partial^\gamma \varphi}_{\text{beschränkt}} \underbrace{\partial^{\alpha - \gamma} \psi}_{\text{beschränkt}}.$$

□

6.3. Satz: Die Fouriertransformation $\psi \mapsto \hat{\psi}$ ist linear und bijektiv $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Übungsaufgabe ? □

6.4. Satz: Für $\varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt $\varphi * \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Die Aussage folgt aus $\widehat{\varphi * \psi} = \hat{\varphi} \cdot \hat{\psi}$ und den Sätzen 6.3 und 6.2. $\square$

Ende 11.Vorl.

6.5. Mollifier: Für $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt $\psi * f \in C^\infty$ und $\partial^\alpha(\psi * f) = (\partial^\alpha \psi) * f$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Außerdem ist

$$\operatorname{supp} \psi * f \subseteq \overline{\operatorname{supp} \psi + \operatorname{supp} f},$$

wobei für $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ der *Träger* (engl.: *support*) von g definiert ist durch

$$\operatorname{supp} g := \mathbb{R}^n \setminus \{x : \text{ es gibt } \varepsilon > 0 \text{ mit } g 1_{B(x,\varepsilon)} = 0 \text{ f.ü.}\}.$$

Beachte, dass $\operatorname{supp} g$ immer abgeschlossen ist.

Beweis. Für $x \in \mathbb{R}^n$, $j \in \{1, \dots, n\}$ und $h \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} & \frac{\psi * f(x + he_j) - \psi * f(x)}{h} - (\partial_j \psi) * f(x) \\ = & \int f(y) \Big(\frac{\psi(x - y + he_j) - \psi(x - y)}{h} - \partial_j \psi(x - y) \Big) \, dy \\ = & \int f(y) \, \frac{1}{h} \int_0^h (\partial_j \psi(x - y + te_j) - \partial_j \psi(x - y)) \, dt \, dy, \end{aligned}$$

also ist der Betrag hiervon

$$\leq \|f\|_1 \sup_{\xi, \eta \in \mathbb{R}^n, |\xi - \eta| \leq |h|} |\partial_j \psi(\xi) - \partial_j \psi(\eta)|,$$

und das Supremum geht gegen 0 für $h \to 0$, da $\partial_j \psi$ gleichmäßig stetig ist. Das zeigt die Formel für $|\alpha| = 1$. Der allgemeine Fall folgt durch Iteration.

Zum Beweis der Aussage über den Träger beachten wir zunächst, dass nach dem bisher Gezeigten $\operatorname{supp} \psi * f = \overline{\{x : \psi * f(x) \neq 0\}}$ ist. Sei also $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\psi * f(x) \neq 0$. Wegen

$$\psi * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) f(x - y) \, dy$$

und $\operatorname{supp} f(x - \cdot) = x - \operatorname{supp} f$ gilt dann $(x - \operatorname{supp} f) \cap \operatorname{supp} \psi \neq \emptyset$. Somit gibt es $y \in \operatorname{supp} \psi$ mit $y \in x - \operatorname{supp} f$, dh mit $x - y \in \operatorname{supp} f$. Es folgt

$$x = y + x - y \in \operatorname{supp} \psi + \operatorname{supp} f.$$

$\square$

Bemerkung: (a) Wegen

$$\partial^\alpha \widehat{(\psi * f)} = (i\xi)^\alpha \widehat{\psi * f} = (i\xi)^\alpha \hat{\psi} \hat{f} = \widehat{\partial^\alpha \psi} \hat{f} = \widehat{(\partial^\alpha \psi)} \hat{f}$$

ist die Formel nicht überraschend (wir haben aber im Beweis die Fouriertransformation nicht benutzt).

(b) Häufig hat ψ noch kompakten Träger z.B. $\operatorname{supp}\psi \subset B(0,1)$. Setzt man dann $\psi_k := k^n\psi(k\cdot)$, so gilt $\operatorname{supp}\psi_k \subset B(0,1/k)$ und $\operatorname{supp}\psi_k * f \subset \operatorname{supp} f + B(0,1/k)$. Gilt außerdem $\int \psi = 1$, so hat man $\psi_k * f \to f$ bzgl. $\|\cdot\|_1$, dh man kann beliebige L^1-Funktionen f durch C^∞-Funktionen approximieren, deren Träger wenig vom Träger von f abweicht.

(c) Sind $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so gilt die Fourierinversionsformel aus 5.8 ($\to$ Übungsaufgabe ?).

(d) Sei B ein homogener Banachraum und $f \in B$. Dann gilt $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Sei nun $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}\psi$ kompakt (dh $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$) und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $\operatorname{supp}\psi(x_0 - \cdot) = x_0 - \operatorname{supp}\psi =: K$ kompakt, und folglich ist auch $K_1 := K + \overline{B}(0,1)$ kompakt. Es gilt $f1_{K_1} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und für $x \in B(x_0, 1)$ ist

$$\psi * f(x) = \int_{K_1} f(y)\psi(x-y)\,dy = \psi * (f1_{K_1})(x).$$

Nach 6.5 ist $\psi * f$ in einer Umgebung von x_0 ein C^∞-Funktion. Da x_0 beliebig war, ist $\psi * f \in C^\infty$. Man kann also f bzgl. $\|\cdot\|_B$ durch Funktionen in $C^\infty \cap B$ approximieren.

Hierbei wird benutzt, dass es Funktionen $\psi \in C^\infty$ mit $\int \psi = 1$ und etwa $\operatorname{supp}\psi \subset \overline{B(0,1)}$ gibt. Bekanntlich ist

$$\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \rho(t) := \begin{cases} e^{-1/t} & , t > 0 \\ 0 & , t \le 0 \end{cases}$$

eine C^∞-Funktion auf $\mathbb{R}$. Also ist durch $\varphi(t) := \rho(t+1)\rho(1-t)$ eine C^∞-Funktion mit $\varphi \ge 0$ und $\operatorname{supp}\varphi = [-1,1]$ definiert. Man kann nun $\psi(x) := c\varphi(|x|^2)$ setzen und erhält das Gewünschte, wenn man $c > 0$ richtig wählt.

6.6. Satz (Plancherel): Für $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\|\psi\|_2^2 = \frac{1}{(2\pi)^n}\|\hat{\psi}\|_2^2.$$

Beweis. Nach 5.2 (dancing hat) gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\psi}(\xi)|^2\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\psi}(\xi)\overline{\hat{\psi}(\xi)}\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)(\overline{\hat{\psi}})^\wedge(x)\,dx$$

und nach 5.8:

$$(\overline{\hat{\psi}})^\wedge(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x}\overline{\hat{\psi}(\xi)}\,d\xi = \overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x}\hat{\psi}(\xi)\,d\xi} = (2\pi)^n\overline{\psi(x)}.$$

□

6.7. Heisenbergsche Unschärferelation: Sei $n = 1$. Für $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ gilt

$$\|x\psi\|_2\|\xi\hat{\psi}\|_2 \ge \sqrt{\frac{\pi}{2}}\|\psi\|_2^2.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} 2Re\,\langle x\psi, \psi'\rangle &= \langle x\psi, \psi'\rangle + \langle \psi', x\psi\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} x\psi(x)\overline{\psi'(x)} + \psi'(x)\overline{x\psi(x)}\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} x(\psi(x)\overline{\psi'(x)} + \psi'(x)\overline{\psi(x)})\,dx \\ &= x|\psi(x)|^2\Big|_{x=-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2\,dx \\ &= -\|\psi\|_2^2, \end{aligned}$$

also

$$\frac{1}{2}\|\psi\|_2^2 = |Re\,\langle x\psi, \psi'\rangle| \leq \|x\psi\|_2\|\psi'\|_2.$$

Außerdem ist

$$\|\psi'\|_2 = (2\pi)^{-1/2}\|\widehat{\psi'}\|_2 = (2\pi)^{-1/2}\|\xi\hat{\psi}\|_2.$$

□

Korollar: Ist $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ und sind $x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\|(x-x_0)\psi\|_2\|(\xi-\xi_0)\hat{\psi}\|_2 \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\|\psi\|_2^2.$$

Interpretation: Ist $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ mit $\|\psi\|_2 = 1$, so sind $x \mapsto |\psi(x)|^2$ und $\xi \mapsto (2\pi)^{-1}|\hat{\psi}(\xi)|^2$ Wahrscheinlichkeitsdichten auf $\mathbb{R}$. Sind X, Y Zufallsvariablen, die entsprechend verteilt sind und $x_0 = E(X) = \int x|\psi(x)|^2\,dx$, $\xi_0 = E(Y) = \int \xi|\hat{\psi}(\xi)|^2\,d\xi$, so sind $\|(x-x_0)\psi\|_2 = \sigma_X$ und $(2\pi)^{-1/2}\|(\xi-\xi_0)\hat{\psi}\|_2 = \sigma_Y$ die Standardabweichungen von X bzw. Y, und das Korollar besagt

$$\sigma_X\sigma_Y \geq \frac{1}{2},$$

dh X und Y können nicht gleichzeitig beliebig gut um x_0 bzw. ξ_0 lokalisiert sein.

6.8. Theorem: Die Fouriertransformation $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $\psi \mapsto \hat{\psi}$, besitzt eine eindeutige stetige Fortsetzung $\mathscr{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$. Diese Fortsetzung $\mathscr{F}$ ist linear und bijektiv mit

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{(2\pi)^n}\|f\|_2^2$$

und

$$\mathscr{F}^{-1}f = \frac{1}{(2\pi)^n}\sigma\mathscr{F}f, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^n), \qquad \frac{1}{(2\pi)^{2n}}\mathscr{F}^4 = \mathrm{Id}_{L^2}.$$

Beweis. Wir müssen nur einsehen, dass $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist. Dazu reicht es, eine Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger durch Funktionen aus $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ zu approximieren. $\square$

Ende 12.Vorl.

6.9. Lemma: Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ definiert

$$p_k(\psi) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n, |\alpha|\le k} (1+|x|^2)^{k/2} |\partial^\alpha \psi(x)|$$

eine Norm auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Es gilt $p_k \le p_l$ für $k \le l$ und

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) = \{\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : \ \psi \in C^\infty, \forall k : p_k(\psi) < \infty\}.$$

Bemerkung: Der Raum $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist bzgl. der Folge $(p_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, *(folgen)vollständig*, dh ist $(\psi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, die bzgl. jedem p_k eine Cauchy-Folge ist, so gibt es $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\lim_{m\to\infty} p_k(\psi_m - \psi) = 0$ für jedes k. Somit ist $(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n), (p_k)_{k\in\mathbb{N}_0})$ ein *Fréchetraum* im Sinne der folgenden Definition:

> $(X, (q_k)_{k\in\mathbb{N}_0})$ ist ein *Fréchetraum*, falls X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist und $q_k : X \to \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ mit folgenden Eigenschaften
>
> $\forall k \in \mathbb{N}_0, x \in X, \lambda \in \mathbb{K} : q_k(\lambda x) = |\lambda| q_k(x)$ (Homogenität),
> $\forall k \in \mathbb{N}_0, x, y \in X : q_k(x+y) \le q_k(x) + q_k(y)$ (Dreiecksungleichung),
> $\forall x \in X : (\forall k \in \mathbb{N}_0 : q_k(x) = 0) \Longrightarrow x = 0$ (Definitheit),
>
> derart, dass Vollständigkeit in obigem Sinne vorliegt. Wir fordern außerdem, dass $q_k \le q_{k+1}$ ist für jedes k.

Es ist nicht gefordert, dass jedes q_k eine *Norm* ist, hingegen ist jedes q_k eine sogenannte *Halbnorm*.

Beispiel: Der Raum $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ist ein Fréchetraum bzgl.

$$q_k(f) := \int_{B(0,k)} |f(x)|\, dx, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Die obigen Eigenschaften der Folge (q_k) sind leicht zu verifizieren. Ist (f_m) eine Cauchy-Folge für jedes q_k, so findet man wegen der Vollständigkeit von L^1 zu jedem k ein $f^{(k)} \in L^1(B(0,k))$ mit $\lim_m q_k(f_m - f^{(k)}) = 0$. Wegen $f^{(l)}|_{B(0,k)} = f^{(k)}$ f.ü. für $l \ge k$, definiert $f(x) := f^{(k)}(x)$ für $x \in B(0,k)$ eine Grenzfunktion $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Beachte, dass *kein* q_k eine Norm auf $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ist.

Bemerkung: Ist $(X, (q_k))$ ein Fréchetraum, so bedeutet Konvergenz von Folgen gerade Konvergenz bzgl. jedes der q_k. Man kann so Stetigkeit von Abbildungen über Folgen definieren und für *lineare* Abbildungen zeigen:

Ist $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein normierter Raum, so ist eine lineare Abbildung $T : X \to Y$ genau dann stetig, falls es $k \in \mathbb{N}_0$ und $C \geq 0$ gibt mit $\|Tx\|_Y \leq Cq_k(x)$ für alle $x \in X$, und eine lineare Abbildung $S : Y \to X$ ist stetig genau dann, wenn es zu jedem k ein $C_k \geq 0$ gibt mit $q_k(Sy) \leq C_k\|y\|_Y$ für alle $y \in Y$. Ist $(Y, (r_l)_{l\in\mathbb{N}_0})$ ein weiterer Fréchetraum, so ist eine lineare Abbildung $T : X \to Y$ genau dann stetig, wenn es zu jedem l ein $k = k(l)$ und $C = C(l) \geq 0$ gibt mit $r_l(Tx) \leq Cq_k(x)$ für alle $x \in X$.

Beachte, dass der letzte Fall die beiden anderen als Spezialfälle enthält (Vollständigkeit ist hier unwesentlich).

Beispiele: (a) Sei $B \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ein Banachraum. Dann ist $\text{Id} : B \to L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ stetig genau dann, wenn es zu jedem k ein $C_k \geq 0$ gibt mit $\|1_{B(0,k)}f\|_1 \leq C_k\|f\|_B$ für alle $f \in B$.

(b) Folgende Abbildungen sind stetig $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$:

$\psi \mapsto \partial^\alpha\psi$ für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$,

$\psi \mapsto x^\beta\psi$ für jedes $\beta \in \mathbb{N}_0^n$,

$\psi \mapsto \hat{\psi}$.

6.10. Definition: Der Raum $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ der *temperierten Distributionen* ist definiert als Dualraum von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, dh als Raum aller linearen Abbildungen $T : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$, die stetig sind, dh für die es $k \in \mathbb{N}_0$ und $c \geq 0$ gibt mit

$$|T(\psi)| \leq Cp_k(\psi), \quad \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Beispiele: (a) Sei $p \in [1, \infty]$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann definiert $T_f(\psi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\psi(x)\,dx$ ein $T_f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Es gilt nämlich nach Hölder

$$|T_f(\psi)| \leq \|f\|_p\|\psi\|_q, \quad \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n),$$

wobei $q \in [1, \infty]$ durch $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gegeben ist. Wir brauchen also nur noch einzusehen, dass die Identität stetig $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ ist. Wegen $\|\psi\|_\infty = p_0(\psi)$ ist dies für $q = \infty$ klar. Für $q \in [1, \infty)$ schreiben wir

$$\|\psi\|_q = \Big(\int (1 + |x|^2)^{-kq/2}((1 + |x|^2)^{k/2}|\psi(x)|)^q\,dx\Big)^{1/q} \leq p_k(\psi)\Big(\int (1 + |x|^2)^{-kq/2}\,dx\Big)^{1/q},$$

wobei das letzte Integral für $kq > n$ endlich ist.

(b) Es gilt $\delta_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, wobei $\delta_0(\psi) = \psi(0)$. Allgemeier induziert jedes Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf dem $\mathbb{R}^n$ via

$$T_\mu(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\,d\mu(x), \quad \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n),$$

ein $T_\mu \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

(c) Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ist

$$\psi \mapsto \partial^\alpha \psi(x_0) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n).$$

(d) Für jedes $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ ist

$$\psi \mapsto \int x^\beta \psi \, dx \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n),$$

so dass die Polynome in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ enthalten sind. Ende 13.Vorl.

Wir wollen kurz einsehen, dass z.B. die Inklusionsabbildung in Beispiel(a) injektiv ist. Der Linearität wegen muss man nur Injektivität bei Null untersuchen. Durch Lokalisieren kann man das Problem auf den Fall $p = 1$ reduzieren.

6.11. Lemma: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ mit

$$\int f \varphi \, dx = 0$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, dh für alle $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset \Omega$. Dann gilt $f = 0$ f.ü. in Ω.

Beweis. Sei $V \subset \Omega$ offen mit $\overline{V} \subset \Omega$ und $g \in L^\infty(\Omega)$ mit $\operatorname{supp} g \subset \overline{V}$. Wähle $k \in C^\infty$ mit $\operatorname{supp} k \subset B(0,1)$ und $\int k \, dx = 1$ und setze $k_\lambda = \lambda^n k(\lambda \cdot)$ für $\lambda \geq 1$. Dann ist (k_λ) eine Dirac-Familie mit $k_\lambda * g \in C_c^\infty(\Omega)$ für $\lambda \geq \lambda_0$ (da $\overline{V}$ einen positiven Abstand zu $\partial\Omega$ hat). Es gilt dann mittels Fubini

$$\begin{aligned}
0 &= \int f(k_\lambda * g) \, dx \\
&= \int \int f(x) k_\lambda(x-y) g(y) \, dy \, dx \\
&= \int g(y) \int f(x)(\sigma k_\lambda)(y-x) \, dx \, dy \\
&= \int g((\sigma k)_\lambda * f) \, dy.
\end{aligned}$$

Hierbei stellen wir uns f durch 0 zu einer Funktion auf $\mathbb{R}^n$ fortgesetzt. Da auch $((\sigma k)_\lambda)$ eine Dirac-Familie ist, haben wir $(\sigma k)_\lambda * f \to f$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$, und es folgt $\int fg \, dx = 0$. Da g und V beliebig waren, ist somit $f = 0$ f.ü. in Ω. $\square$

6.12. Operationen in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$: Sei $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

(a) **Ableitung**: Für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0$ definiert

$$\partial^\alpha T(\psi) := (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha \psi), \quad \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n),$$

eine temperierte Distribution $\partial^\alpha T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

(b) **Multiplikation**: Ist $g \in C^\infty$ so, dass $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $\psi \mapsto g \cdot \psi$ stetig ist, so definiert

$$(gT)(\psi) := T(g\psi), \quad \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n),$$

eine temperierte Distribution $gT \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

(c) **Translation**: Für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ definiert

$$(\tau_y T)(\psi) := T(\tau_{-y}\psi), \quad \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n),$$

eine temperierte Distribution $\partial^\alpha T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

(d) **Spiegelung**: Durch

$$(\sigma T)(\psi) := T(\sigma\psi), \quad \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n),$$

wird eine temperierte Distribution $\sigma T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ definiert.

Bemerkung: Man beachte, dass die Definitionen so gemacht sind, dass (unter geeigneten Voraussetzungen an f) gilt:

$$T_{\partial^\alpha f} = \partial^\alpha T_f, \quad T_{gf} = gT_f, \quad T_{\tau_y f} = \tau_y T_f, \quad T_{\sigma f} = \sigma T_f.$$

6.13. Fouriertransformation in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$: Für $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ definiert

$$\hat{T}(\psi) := T(\hat{\psi}), \quad \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n),$$

eine temperierte Distribution $\hat{T} = \mathscr{F}T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Die so definierte Fouriertransformation $\mathscr{F} : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist linear und bijektiv mit

$$\frac{1}{(2\pi)^{2n}}\mathscr{F}^4 = \mathrm{Id}_{\mathscr{S}'}, \quad \frac{1}{(2\pi)^n}\mathscr{F}^2\sigma = \mathrm{Id}_{\mathscr{S}'}.$$

Beweis. Linearität ist klar. Zum Beweis der Bijektivität muss man nur die Formeln einsehen. Für $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\frac{1}{(2\pi)^{2n}}\mathscr{F}^4 T(\psi) = T\Big(\frac{1}{(2\pi)^{2n}}\mathscr{F}^4\psi\Big) = T(\psi), \quad \frac{1}{(2\pi)^n}\mathscr{F}^2\sigma T(\psi) = T\Big(\frac{1}{(2\pi)^n}\sigma\mathscr{F}^2\psi\Big) = T(\psi).$$

□

6.14. Bemerkung: Die bekannten Rechenregeln für die Fouriertransformation gelten auch in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, z.B. ist für $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}
\widehat{\partial^\alpha T}(\psi) &= \partial^\alpha T(\hat{\psi}) = (-1)^{|\alpha|}T(\partial^\alpha\hat{\psi}) = (-1)^{|\alpha|}T(\mathscr{F}((-ix)^\alpha\psi)) = ((i\xi)^\alpha)\hat{T}(\psi)\\
\widehat{(-ix)^\beta T}(\psi) &= (-ix)^\beta T(\hat{\psi}) = T((-i\xi)^\beta\hat{\psi}) = (-1)^{|\beta|}T((i\xi)^\beta\hat{\psi}) = (-1)^{|\beta|}\hat{T}(\partial^\beta\psi) = \partial^\beta\hat{T}(\psi)\\
\widehat{\tau_y T}(\psi) &= \tau_y T(\hat{\psi}) = T(\tau_{-y}\hat{\psi}) = T(\mathscr{F}(e^{-iy(\cdot)}\psi)) = \hat{T}(e^{-iy(\cdot)}\psi) = e^{-iy(\cdot)}\hat{T}(\psi),
\end{aligned}$$

also

$$\widehat{\partial^\alpha T} = (i\xi)^\alpha\hat{T}, \quad \widehat{(-ix)^\beta T} = \partial^\beta\hat{T}, \quad \widehat{\tau_y T} = e^{-iy(\cdot)}\hat{T}.$$

6.15. Definition: Wir nennen einen Banachraum $B \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ einen *homogenen Banachraum*, falls $\mathrm{Id} : B \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ stetig ist im Sinne von

$$\forall \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \exists C_\psi \forall \phi \in B : |\phi(\psi)| \leq C_\psi \|\phi\|_B$$

und weiterhin gilt:

(H1) Für alle $y \in \mathbb{R}^n$ und $f \in B$ gilt $\tau_y f \in B$ und $\|\tau_y f\|_B = \|f\|_B$.
(H2) Für alle $f \in B$ ist die Abbildung $\mathbb{R}^n \to B$, $y \mapsto \tau_y f$ stetig.

Bemerkung: Ist $B \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ein homogener Banachraum im Sinne von Definition 5.14 derart, dass $\mathrm{Id} : B \to L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ stetig ist, so ist B auch ein homogener Banachraum im Sinne dieser Definition.

Beispiel: Sei $s > 0$ und

$$H^{-s}(\mathbb{R}^n) := \{f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) : \xi \mapsto (1 + |\xi|^2)^{-s/2} \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

mit $\|f\|_{H^{-s}} := \|\xi \mapsto (1 + |\xi|^2)^{-s/2} \hat{f}(\xi)\|_2$. Dann ist $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ ein homogener Banachraum im Sinne von 6.15: Stetigkeit der Identität $H^{-s}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ folgt aus

$$|f(\hat{\psi})| = |\hat{f}(\psi)| = \left|(1 + |\xi|^2)^{-s/2} \hat{f}\Big((1 + |\xi|^2)^{s/2} \psi\Big)\right| \leq \|(1 + |\xi|^2)^{-s/2} \hat{f}\|_2 \underbrace{\|(1 + |\xi|^2)^{s/2} \psi\|_2}_{=: C_{\hat{\psi}}}.$$

Die Eigenschaft (H1) folgt aus $\widehat{\tau_y f} = e^{-iy(\cdot)} \hat{f}$, und die Eigenschaft (H2) folgt mit majorisierter Konvergenz, da

$$\|\tau_y f - f\|_{H^{-s}} = \|(1 + |\xi|^2)^{-s/2} (e^{-iy\xi} - 1) \hat{f}\|_2$$

und $e^{-iy\xi} \to 1$ $(y \to 0)$ für jedes ξ.

Für $s > n/2$ ist aber $\delta_0 \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ und somit $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ nicht in $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ enthalten.

7 Translationsinvariante Operatoren

7.1. Definition: Sei $B \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ ein Banachraum, der der Eigenschaft (H1) aus 6.15 genügt. Ein stetiger linearer Operator $T : B \to B$ heißt *translationsinvariant*, falls für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\tau_y(Tf) = T(\tau_y f), \quad f \in B.$$

7.2. Lemma: Sei B ein homogener Banachraum auf $\mathbb{R}^n$ und $T : B \to B$ translationsinvariant. Dann gilt für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap B$:

$$f * (Tg) = (Tf) * g = T(f * g).$$

Beweis. Wir schreiben die Faltung als Integral:

$$f * Tg = \int f(y)\tau_y(Tg)\,dy = \int f(y)T(\tau_y g)\,dy = T\Big(\int f(y)\tau_y g\,dy\Big) = T(f * g).$$

Vertausche nun die Rollen von f und g. □

7.3. Theorem: Sei $T : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ linear und stetig. Dann sind äquivalent:

(i) T ist translationsinvariant.

(ii) Es gibt ein $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathscr{F}(Tf) = m \cdot \mathscr{F}f$ für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. (ii) ⇒ (i): Ist $m \in L^\infty$ und $Tf = \mathscr{F}^{-1}(m \cdot \hat{f})$, so ist T linear und stetig und es gilt

$$\widehat{T(\tau_y f)} = m\widehat{\tau_y f} = me^{-iy(\cdot)}\hat{f} = e^{-iy(\cdot)}\widehat{Tf} = \widehat{\tau_y(Tf)}.$$

Also ist T translationsinvariant. Ende 14.Vorl.

(i) ⇒ (ii): Wir beginnen mit einer

Vorbemerkung: Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt $f * g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und

$$\mathscr{F}(f * g) = \hat{f} \cdot \mathscr{F}g,$$

wobei hier $\mathscr{F}$ nach 6.8 und $\hat{\cdot}$ nach 5.1 definiert sei.

Die Aussage ist klar für $g \in L^1 \cap L^2$. Ein allgemeines $g \in L^2$ approximieren wir bzgl. $\|\cdot\|_2$ durch eine Folge $(g_k)_k$ in $L^1 \cap L^2$. Dann gilt $f * g_k \to f * g$ bzgl. $\|\cdot\|_2$, da $* : L^1 \times L^2 \to L^2$ stetig ist (vgl. Aufgabe 32). Da $\mathscr{F} : L^2 \to L^2$ stetig ist, folgt $\mathscr{F}(f * g_k) \to \mathscr{F}(f * g)$ bzgl. $\|\cdot\|_2$. Andererseits ist

$$\mathscr{F}(f * g_k) = \widehat{f * g_k} = \hat{f}\hat{g}_k \to \hat{f}\mathscr{F}g \quad \text{bzgl. } \|\cdot\|_2$$

wegen $\hat{f} \in L^\infty$ und $\hat{g}_k \to \mathscr{F}g$ bzgl. $\|\cdot\|_2$.

Für alle $f, g \in L^1 \cap L^2$ gilt wegen Lemma 7.2 und der Vorbemerkung (die Unterscheidung zwischen $\hat{\cdot}$ und $\mathscr{F}$ sei wieder aufgehoben):

$$\hat{f} \cdot \widehat{Tg} = \widehat{Tf} \cdot \hat{g}.$$

Setze also $m := \widehat{TG}/\hat{G}$, wobei $G(x) = (2\pi)e^{-|x|^2/2}$ der Gauß-Kern ist (beachte $\hat{G}(\xi) \neq 0$ für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$). Nach obiger Gleichung gilt dann

$$\widehat{Tf} = m\hat{f}, \quad f \in L^1 \cap L^2.$$

Da T stetig ist, folgt $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $Tf = \mathscr{F}^{-1}(m\hat{f})$ für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. □

7.4. Satz: Sei $T : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$ translationsinvariant. Dann gibt es $\phi \in BUC'(\mathbb{R}^n)$ derart, dass für $m(\xi) := \phi(e^{-i\xi(\cdot)})$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, gilt:

$$\widehat{Tf} = m \cdot \hat{f}, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Außerdem ist $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|m\|_\infty \leq \|\phi\|_{BUC'} \leq \|T\|_{L^1 \to L^1}.$$

Vor dem Beweis machen wir die folgenden Beobachtungen.

7.5. Bemerkung: (a) Ist $T : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$ translationsinvariant, so ist auch $T' : L^\infty(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ translationsinvariant.

(b) Ist $S : L^\infty(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ translationsinvariant, so gilt $S : BUC(\mathbb{R}^n) \to BUC(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Zu (a): Für $f \in L^1$, $g \in L^\infty$ und $y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\int f\, \tau_y(T'g)\, dx = \int \tau_{-y} f\, T'g\, dx = \int T(\tau_{-y} f)\, g\, dx = \int \tau_{-y}(Tf)\, g\, dx = \int f\, T'(\tau_y g)\, dx.$$

Zu (b): Für $g \in BUC$ gilt $\tau_y g \to g$ $(y \to 0)$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$. Da S stetig ist, folgt

$$\tau_y(Sg) - Sg = S(\tau_y g) - Sg = S(\tau_y g - g) \to 0 \ (y \to 0)$$

bzgl. $\|\cdot\|_\infty$. Das ist äquivalent zu $Sg \in BUC$. $\square$

Beweis von 7.4. Für jedes $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\widehat{Tf}(\xi) = \int (Tf)(x)\, e^{-i\xi x}\, dx = \int f(x)\, T'(e^{-i\xi(\cdot)})(x)\, dx.$$

Man beachte $T'(e^{-i\xi(\cdot)}) \in BUC$ nach 7.5. Da für festes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$T'(e^{-i\xi(\cdot)})(x) = \tau_{-x}(T'(e^{-i\xi(\cdot)}))(0) = (T'(e^{-i\xi(\cdot+x)}))(0) = e^{-i\xi x}\, (T'(e^{-i\xi(\cdot)})(0),$$

ist also

$$\widehat{Tf}(\xi) = (T'(e^{-i\xi(\cdot)}))(0) \int f(x) e^{-i\xi x}\, dx = (T'(e^{-i\xi(\cdot)}))(0) \cdot \hat{f}(\xi).$$

Setze also $\phi(g) := (T'(g))(0)$, $g \in BUC$. Dann ist

$$m(\xi) := \phi(e^{-i\xi(\cdot)}) = (T'(e^{-i\xi(\cdot)}))(0)$$

und

$$\widehat{Tf}(\xi) = m(\xi)\hat{f}(\xi), \quad f \in L^1, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Klar ist dabei
$$|m(\xi)| = |\phi(e^{-i\xi(\cdot)})| \leq \|\phi\|_{BUC'} \underbrace{\|e^{-i\xi(\cdot)}\|_\infty}_{=1}.$$

Weiter ist
$$\begin{aligned}\|\phi\|_{BUC'} &= \sup_{g\in BUC, \|g\|_\infty \leq 1} |\phi(g)| \leq \sup_{g\in BUC, \|g\|_\infty\leq 1} \|T'(g)\|_\infty \\ &\leq \sup_{g\in L^\infty, \|g\|_\infty \leq 1} \|T'(g)\|_\infty = \|T'\|_{L^\infty\to L^\infty} = \|T\|_{L^1\to L^1}.\end{aligned}$$

□

Bemerkung: Man kann zeigen, dass es
$$\mu \in (C_0(\mathbb{R}^n))' = \text{Raum der endlichen Borelmaße auf } \mathbb{R}^n$$
gibt mit $m = \hat{\mu}$ (wie beim Torus). Insbesondere ist $m \in BUC(\mathbb{R}^n)$ (aber das führt hier zu weit).

7.6. Definition: Für $p \in [1,\infty)$ sei $\mathscr{M}_p := \mathscr{M}_p(\mathbb{R}^n)$ der Raum aller $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft

> Für alle $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt
> $$T_m\psi := \mathscr{F}^{-1}(\xi \mapsto m(\xi)\hat{\psi}(\xi)) \in L^p(\mathbb{R}^n),$$
> und der Operator $T_m : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ besitzt eine stetige Fortsetzung $L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$.

Beachte dabei: Für $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt $\hat{\psi} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und $m\hat{\psi}$ ist schnell fallend, insbesondere ist $pm\hat{\psi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für jedes Polynom p. Somit ist $\mathscr{F}^{-1}(m\hat{\psi}) \in C^\infty$ und $\partial^\alpha\mathscr{F}^{-1}(m\hat{\psi}) \in C_0(\mathbb{R}^n)$ für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Außerdem ist $m\hat{\psi} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und somit auch $\mathscr{F}^{-1}(m\hat{\psi}) \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Im Falle der Existenz ist wegen der Dichtheit von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ für $1 \leq p < \infty$ die stetige Fortsetzung von T_m eindeutig bestimmt. Weiter gilt:
$$m \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R}^n) \iff \exists C \forall \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) : \|T_m\psi\|_p \leq C\|\psi\|_p.$$

7.7. Bemerkung: (a) Nach 7.3 ist $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}^n) = L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(b) Nach 7.4 (inkl. Bemerkung) ist $\mathscr{M}_1(\mathbb{R}^n) = \{\hat{\mu} : \mu \in (C_0(\mathbb{R}^n))'\}$.

(c) Für $p \in (1,\infty)$ und p' mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ gilt $\mathscr{M}_p(\mathbb{R}^n) = \mathscr{M}_{p'}(\mathbb{R}^n)$ (siehe Aufgabe 31).

7.8. Theorem (Fouriermultiplikatorsatz von Mikhlin): Sei $L > n/2$ und $m \in C^L(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ mit
$$M := \sup\{|\xi|^{|\alpha|}|\partial^\alpha m(\xi)| : |\alpha| \leq L, \xi \neq 0\} < \infty.$$

Dann gilt $m \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R}^n)$ für $1 < p < \infty$ und

$$\|T_m\|_{L^p \to L^p} \leq C_p M$$

für eine nur von p und n abhängige Konstante C_p.

7.9. Anwendungsbeispiel: Sei $m \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ derart, dass für alle $\lambda > 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ gilt $m(\lambda\xi) = m(\xi)$. Dann ist $m \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R}^n)$ für alle $p \in (1, \infty)$.

Die Bedingung bedeutet, dass m *positiv homogen vom Grad* 0 ist. Allgemeiner heißt eine auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ definierte Funktion ρ *positiv homogen vom Grad* $d \in \mathbb{R}$, falls gilt

$$\rho(\lambda\xi) = \lambda^d \rho(\xi), \quad \lambda > 0, \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Dabei bezieht sich "positiv" auf die Einschränkung $\lambda > 0$.

Behauptung 1: Ist $\rho \in C^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ positiv homogen vom Grad d, so ist für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\lambda| \leq k$ die Funktion $\partial^\alpha \rho$ positiv homogen vom Grad $d - |\alpha|$ und $\xi \mapsto |\xi|^{|\alpha|}\partial^\alpha \rho(\xi)$ ist positiv homogen vom Grad 0.

Man zeigt dies durch Induktion nach $|\alpha|$ und braucht also nur den Fall $\partial^\alpha = \partial_j$ einzusehen. Es ist

$$\partial_j \rho(\lambda\xi) = \lim_{h \to 0} \frac{\rho(\lambda\xi + he_j) - \rho(\lambda\xi)}{h} = \lim_{h \to 0} \lambda^{d-1} \frac{\rho(\xi + \frac{h}{\lambda}e_j) - \rho(\xi)}{h/\lambda} = \lambda^{d-1}\partial_j \rho(\xi).$$

Behauptung 2: Ist $\rho \in C(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ positiv homogen vom Grad 0, so ist ρ auf $\mathbb{R}^n$ beschränkt.

Es ist nämlich

$$\sup_{\xi \neq 0} |\rho(\xi)| = \sup_{|\xi|=1} |\rho(\xi)| < \infty,$$

da ρ auf der kompakten Menge $\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| = 1\}$ stetig ist.

Nach Behauptung 1 kann man Behauptung 2 auf $\rho_\alpha(\xi) := |\xi|^{|\alpha|}\partial^\alpha m(\xi)$ für jedes $|\alpha| \leq L$ anwenden, und 7.8 gibt die Aussage.

Konkretes Beispiel: $m(\xi) = \frac{\xi_j \xi_k}{|\xi|^2}$.

Wir stellen das konkrete Beispiel in einen allgemeineren Rahmen. Ende 15.Vorl.

7.10. Symbole: Sei $\mathscr{G} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ein linearer Teilraum und $T : \mathscr{G} \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ ein linearer Operator. Ist $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit

$$\widehat{T\psi} = m\hat{\psi}, \quad \psi \in \mathscr{G},$$

so heißt m *Symbol des Operators* T. Meist ist hierbei $\mathscr{G} = \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Beispiele: (a) $T = \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, wobei $j \in \{1, \ldots, n\}$. Bekannt ist

$$\widehat{\partial_j \psi}(\xi) = i\xi_j \hat{\psi}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Also ist durch $m(\xi) := i\xi_j$ das Symbol von ∂_j gegeben (hier ist $\mathscr{G} = \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$).
Ist $P(x) = \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha x^\alpha$ ein Polynom, so setzt man

$$P(D) := \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha \partial^\alpha.$$

Es ist dann

$$\widehat{P(D)\psi}(\xi) = \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha \widehat{\partial^\alpha \psi}(\xi) = \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha (i\xi)^\alpha \hat{\psi}(\xi) = P(i\xi)\hat{\psi}(\xi),$$

also ist das Symbol von $P(D)$ gegeben durch $m(\xi) := P(i\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.
(b) Laplaceoperator $\Delta = \sum_{j=1}^n \partial_j^2$. Das Symbol ist nach (a) gegeben durch

$$m(\xi) = \sum_{j=1}^n (i\xi_j)^2 = -|\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Wir betrachten den Operator nun in $L^2(\mathbb{R}^n)$ und setzen

$$\begin{aligned} D(\Delta) &:= \{ f \in L^2(\mathbb{R}^n) : \xi \mapsto -|\xi|^2 \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n) \} \\ \Delta f &:= \mathscr{F}^{-1}(\xi \mapsto -|\xi|^2 \hat{f}(\xi)), \quad f \in D(\Delta). \end{aligned}$$

Dann ist der lineare Operator $\Delta : D(\Delta) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ injektiv: Für $f \in D(\Delta)$ mit $\Delta f = 0$ ist $\widehat{\Delta f} = 0$, also $-|\xi|^2 \hat{f}(\xi) = 0$ f.ü. in $\mathbb{R}^n$ und somit $\hat{f} = 0$ in L^2, woraus $f = 0$ folgt.
Setzt man $R(\Delta) := \{\Delta f : f \in D(\Delta)\}$, so existiert $(-\Delta)^{-1} : R(\Delta) \to D(\Delta)$ als linearer Operator. Für $f \in D(\Delta)$ gilt

$$\hat{f}(\xi) = \mathscr{F}\Big((-\Delta)^{-1}(-\Delta) f\Big)(\xi), \quad \widehat{(-\Delta) f}(\xi) = |\xi|^2 \hat{f}(\xi).$$

Setzt man $g := (-\Delta) f$, so ist also

$$\widehat{(-\Delta)^{-1} g}(\xi) = \hat{f}(\xi) = |\xi|^{-2} \widehat{(-\Delta) f}(\xi) = |\xi|^{-2} \hat{g}(\xi), \quad \xi \neq 0,$$

und $\xi \mapsto |\xi|^{-2}$ ist das Symbol von $(-\Delta)^{-1}$. Hier kann man etwa nehmen

$$\mathscr{G} = \{ \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) : \forall |\alpha| \le 2 : \partial^\alpha \hat{\psi}(0) = 0 \}.$$

Beachte, dass $\mathscr{G}$ dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist: Da $\mathscr{F}$ ein Isomorphismus von L^2 ist, reicht es einzusehen, dass die Menge aller $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\psi = 0$ auf einer Umgebung von 0 dicht in L^2

ist. Approximiere dazu charakteristische Funktionen von abgeschlossenen Quadern Q mit $0 \notin Q$ durch Funktionen in $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ bzgl. $\|\cdot\|_2$ (mithilfe von Mollifiern). Der von diesen charakteristischen Funktionen aufgespannte Teilraum liegt dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Insbesondere ist auch

$$\mathscr{Z}(\mathbb{R}^n) := \{\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) : \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : \partial^\alpha \hat{\psi}(0) = 0\,\}$$

dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

(c) Für $\psi \in \mathscr{Z}(\mathbb{R}^n)$ gilt $\xi \mapsto |\xi|^{-2}\hat{\psi}(\xi) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, also $(-\Delta)^{-1}\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und

$$\mathscr{F}\Big(\partial_j \partial_k (-\Delta)^{-1}\psi\Big)(\xi) = i\xi_j i\xi_k |\xi|^{-2}\hat{\psi}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Also ist durch $m(\xi) := -\xi_j\xi_k|\xi|^{-2}$ das Symbol des Operators $\partial_j\partial_k(-\Delta)^{-1} : \mathscr{Z}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gegeben.

Es ist $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, also hat $\partial_j\partial_k(-\Delta)^{-1}$ eine (eindeutige) stetige lineare Fortsetzung $L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$. Und 7.8 und 7.9 zeigen sogar, dass es eine stetige lineare Fortsetzung $L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ für jedes $p \in (1, \infty)$ gibt. Für $p = 1$ ist dies jedoch falsch!

Beachte außerdem: Die Menge $\{\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) : \hat{\psi}(0) = 0\}$ ist nicht dicht in $L^1(\mathbb{R}^n)$, da $\{f \in L^1 : \hat{f} = 0\} = \{f \in L^1 : \int f\,dx = 0\}$ ein abgeschlossener Teilraum von L^1 der Kodimension 1 ist ($L^1 \to \mathbb{C}$, $f \mapsto \int f\,dx$, ist linear und stetig). Insbesondere ist auch $\mathscr{Z}(\mathbb{R}^n)$ nicht dicht in $L^1(\mathbb{R}^n)$.

7.11. Schwache Ableitungen: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Ein $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ heißt *schwache j-te partielle Ableitung von f*, falls gilt

$$-\int_\Omega f(x)\partial_j\varphi(x)\,dx = \int_\Omega g(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ heißt $h \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *schwache α-te Ableitung von f*, falls gilt

$$(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f(x)\partial^\alpha\varphi(x)\,dx = \int_\Omega g(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Nach 6.11 sind g bzw. h eindeutig bestimmt bis auf Gleichheit fast überall, Bezeichnungen: $g =: \partial_j f$, $h =: \partial^\alpha f$.

Beispiel: Die schwache Ableitung von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ ist etwa gegeben durch $g(x) := \operatorname{sgn} x$, denn für $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$-\int |x|\varphi'(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 x\varphi' - \int_0^\infty x\varphi' = x\varphi|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \varphi - x\varphi|_0^\infty + \int_0^\infty \varphi = -\int_{-\infty}^0 \varphi + \int_0^\infty \varphi.$$

7.12. Soboleväume: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $p \in [1, \infty]$ und $k \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$W_p^k(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) : \text{für } |\alpha| \le k \text{ hat } f \text{ eine schwache } \alpha\text{-te Ableitung in } L^p(\Omega)\,\}.$$

Für $\Omega = \mathbb{R}^n$ gilt

$$W_p^k(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^p(\mathbb{R}^n) : \forall |\alpha| \leq k \, \exists g_\alpha \in L^p(\mathbb{R}^n) : \partial^\alpha(T_f) = T_{g_\alpha}\}.$$

Beispiele: (a) Die Funktion $x \mapsto |x|$ gehört zu $W^1_\infty(-1, 1)$.

(b) Die Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$ gehört zu $W^1_p(0, 1)$ genau für $p \in [1, 2)$.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} W_2^2(\mathbb{R}^n) &= \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) : \forall j, k : \partial_j f, \partial_j\partial_k f \in L^2\} \\ &= \{f \in L^2 : \forall j, k : \xi_j \hat{f}, \xi_j\xi_k\hat{f} \in L^2\} \\ &= \{f \in L^2 : \xi \mapsto (1 + |\xi|^2)\hat{f}(\xi) \in L^2\} \\ &= \{f \in L^2 : \xi \mapsto -|\xi|^2\hat{f}(\xi) \in L^2\} = D(\Delta), \end{aligned}$$

vergleiche Beispiel 7.10(c) oben.

Ein anderer Aspekt ist die Frage, ob sich gemischte zweite Ableitungen durch Δf abschätzen lassen, also eine Konstante C existiert mit

$$\|\partial_j\partial_k f\|_2 \leq C\|\Delta f\|_2, \quad f \in L^2 \text{ mit } \Delta f \in L^2.$$

Schreibt man hier $g = (-\Delta)f$, so ist die Ungleichung äquivalent zu

$$\|\partial_j\partial_k(-\Delta)^{-1}g\|_2 \leq C\|g\|_2, \quad g \in R(\Delta).$$

Vergleiche wieder mit Beispiel 7.10(c) oben, welches zeigt, dass diese Ungleichung für $C = 1$ gilt.

Ende 16.Vorl.

7.13. Besselpotentialräume: Für $p \in (1, \infty)$ und $s \in \mathbb{R}$ sei

$$H_p^s(\mathbb{R}^n) := \{f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) : \mathscr{F}^{-1}((1 + |\cdot|^2)^{s/2}\hat{f}) \in L^p(\mathbb{R}^n)\},$$

versehen mit der durch

$$\|f\|_{H_p^s} := \|\mathscr{F}^{-1}((1 + |\cdot|^2)^{s/2}\hat{f})\|_p$$

gegebenen Norm. Man beachte hierbei, dass $\hat{f} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ gilt und $\xi \to (1 + |\xi|^2)^{s/2}$ eine C^∞-Funktion von moderatem Wachstum ist, so dass $(1 + |\cdot|^2)^{s/2}\hat{f} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ und somit auch $\mathscr{F}^{-1}(1 + |\cdot|^2)^{s/2}\hat{f} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ gilt. Die Bedingung $\mathscr{F}^{-1}((1 + |\cdot|^2)^{s/2}\hat{f}) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ist zu lesen als: es gibt $h \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\mathscr{F}^{-1}((1 + |\cdot|^2)^{s/2}\hat{f}) = T_h.$$

In der Definition oben wird also notationell nicht zwischen Funktionen und den von ihnen induzierten Elementen aus $\mathscr{S}'$ unterschieden.

Der Raum $(H_p^s(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{H_p^s})$ ist ein Banachraum und für $p = 2$ ein Hilbertraum bzgl. des Skalaproduktes

$$\langle f, g\rangle_{H_2^s} := \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f})\overline{\mathscr{F}^{-1}((1 + |\xi|^2)^{s/2}\hat{g})}\, dx = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^s\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\, d\xi.$$

Bemerkung: Für $k \in \mathbb{N}$ und $p \in (1, \infty)$ gilt $H_p^k(\mathbb{R}^n) = W_p^k(\mathbb{R}^n)$.

8 Ein Interpolationssatz

Interpolation ist ein wichtiges Hilfsmittel in der harmonischen Analysis und der Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Uns geht es hier darum, aus Aussagen über das Verhalten eines (sub)linearen Operators auf L^{p_0} und auf L^{p_1} Beschränktheit in L^p für p zwischen p_0 und p_1 zu erhalten. Wir betrachten dabei nur L^p-Räume auf dem $\mathbb{R}^n$, diese Einschränkung ist jedoch völlig unwesentlich. Das Maß einer messbaren Menge A notieren wir $|A|$.

8.1. Definition: Für eine messbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt

$$d_f : [0, \infty) \to [0, \infty], \quad d_f(\alpha) := |\{x : |f(x)| > \alpha\}|$$

Verteilungsfunktion von f.

Bemerkung: Es gilt für messbares f:

$$\|f\|_\infty = \inf\{\alpha > 0 : d_f(\alpha) = 0\},$$

beachte dabei $\inf \emptyset = \infty$.

8.2. Lemma: Sei f messbar.

(a) d_f ist monoton fallend und für jedes $\alpha \geq 0$ ist

$$d_f(\alpha) = \lim_{\varepsilon \to 0+} d_f(\alpha + \varepsilon).$$

(b) Für $p \in [1, \infty)$ gilt

$$\|f\|_p^p = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} d_f(\alpha)\, d\alpha.$$

Beweis. zu (a): Es gilt

$$A := \{x : |f(x)| > \alpha\} = \bigcup_{\varepsilon > 0} \{x : |f(x)| > \alpha + \varepsilon\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{\{x : |f(x)| > \alpha + 1/k\}}_{=: A_k}.$$

Wegen $A_k \subset A_{k+1}$ gilt dann $|A_k| \to |A|$.

zu (b): Für beschränktes f gilt

$$\begin{aligned}
\|f\|_p^p &= \int |f|^p\, dx = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{k}{m}\right)^p (d_f(k/m) - d_f((k+1)/m)) \\
&= \lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^\infty \frac{k^p - (k-1)^p}{m^p} d_f(k/m) \\
&= p \int_0^\infty \alpha^{p-1} d_f(\alpha)\, d\alpha.
\end{aligned}$$

Für allgemeines f definieren wir

$$f_m(x) := \begin{cases} f(x) & , |f(x)| \leq m \\ m\frac{f(x)}{|f(x)|} & , |f(x)| > m \end{cases} .$$

Dann gilt $\|f_m\|_p^p \to \|f\|_p^p$ (monotone Konvergenz) und

$$d_{f_m}(\alpha) = \begin{cases} d_f(\alpha) & , \alpha < m \\ 0 & , \alpha \geq m \end{cases} ,$$

also (wieder monotone Konvergenz)

$$p\int_0^\infty \alpha^{p-1} d_{f_m}(\alpha)\, d\alpha \to p\int_0^\infty \alpha^{p-1} d_f(\alpha)\, d\alpha.$$

$\square$

Bemerkung: Für $p \in [1,\infty)$ und $f \in L^p$, $\alpha \geq 0$ gilt

$$\|f\|_p^p = \int |f|^p\, dx \geq \alpha^p d_f(\alpha) \quad \text{Čebyšev-Ungleichung.}$$

8.3. Theorem (Interpolationssatz von Marcinkiewicz): Seien $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ und $T : L^{p_0} + L^{p_1} \to \mathcal{M}$ (Raum der messbaren Funktionen) *sublinear*, dh für alle $f, g \in L^{p_0} + L^{p_1}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} |T(f+g)| &\leq |T(f)| + |T(g)| \\ |T(\lambda f)| &= |\lambda||T(f)|. \end{aligned}$$

Es gelte, für $j = 0, 1$, mit Konstanten $C_0, C_1 > 0$:

$$d_{Tf}(\alpha) \leq \Big(\frac{C_j\|f\|_{p_j}}{\alpha}\Big)^{p_j}, \quad f_j \in L^{p_j}.$$

Im Fall $p_1 = \infty$ ist die Bedingung für $j = 1$ zu ersetzen durch

$$\|Tf\|_\infty \leq C_1\|f\|_\infty, \quad f \in L^\infty.$$

Dann gilt für $\theta \in (0,1)$ und $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$:

$$\|Tf\|_p \leq BC_0^{1-\theta}C_1^\theta\|f\|_p, \quad f \in L^p,$$

wobei

$$B = 2\Big(\frac{p}{p-p_0} + \frac{p}{p_1-p}\Big)^{1/p} \text{ bzw. } B = 2\Big(\frac{p}{p-p_0}\Big)^{1/p} \text{ für } p_1 = \infty.$$

Beweis. Wir behandeln zunächst den Fall $p_1 < \infty$ und beginnen mit einer Abschätzung von $d_{Tf}(\alpha)$, da wir 8.2(b) auf Tf anwenden wollen: Sei $f \in L^p$ und $\alpha > 0$. Wir setzen

$$f_0(x) := \begin{cases} f(x) & , |f(x)| > \alpha\delta \\ 0 & , |f(x)| \leq \alpha\delta \end{cases}$$

und $f_1 := f - f_0$, wobei $\delta > 0$ noch zu bestimmen ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \|f_0\|_{p_0}^{p_0} &= \int_{|f|>\alpha\delta} |f|^p |f|^{p_0-p}\, dx \leq (\alpha\delta)^{p_0-p} \|f\|_p^p < \infty \\ \|f_1\|_{p_1}^{p_1} &= \int_{|f|\leq\alpha\delta} |f|^p |f|^{p_1-p}\, dx \leq (\alpha\delta)^{p_1-p} \|f\|_p^p < \infty, \end{aligned}$$

also $f_j \in L^{p_j}$. Es gilt

$$\{x : |Tf(x)| > \alpha\} \subset \{x : |Tf_0(x)| > \alpha/2\} \cup \{x : |Tf_1(x)| > \alpha/2\},$$

argumentiere mit Komplementen und der Dreiecksungleichung. Somit ist nach Voraussetzung

$$d_{Tf}(\alpha) \leq \sum_{j=0}^{1} d_{Tf_j}(\alpha/2) \leq \sum_{j=0}^{1} \Big(\frac{C_j \|f_j\|_{p_j}}{\alpha/2}\Big)^{p_j}.$$

Mithilfe von 8.2(b) schreiben wir nun

$$\|Tf\|_p^p = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} d_{Tf}(\alpha)\, d\alpha \leq p \sum_{j=0}^{1} (2C_j)^{p_j} \int_0^\infty \alpha^{p-1-p_j} \|f_j\|_{p_j}^{p_j}\, d\alpha,$$

beachte, dass f_j auch von α abhängt! Für die beiden verbleibenden Integrale verwenden wir Fubini:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \alpha^{p-1-p_0} \int_{|f|>\alpha\delta} |f(x)|^{p_0}\, dx\, d\alpha &= \int |f(x)|^{p_0} \underbrace{\int_0^{|f(x)|/\delta} \alpha^{p-1-p_0}\, d\alpha}_{=\frac{1}{p-p_0}(|f(x)|/\delta)^{p-p_0}} dx = \frac{\delta^{p_0-p}}{p-p_0} \|f\|_p^p \\ \int_0^\infty \alpha^{p-1-p_1} \int_{|f|\leq\alpha\delta} |f(x)|^{p_1}\, dx\, d\alpha &= \int |f(x)|^{p_1} \underbrace{\int_{|f(x)|/\delta}^\infty \alpha^{p-1-p_1}\, d\alpha}_{=\frac{1}{p_1-p}(|f(x)|/\delta)^{p-p_1}} dx = \frac{\delta^{p_1-p}}{p_1-p} \|f\|_p^p. \end{aligned}$$

Wir haben somit

$$\|Tf\|_p \leq p\Big(\frac{(2C_0)^{p_0}\delta^{p_0-p}}{p-p_0} + \frac{(2C_1)^{p_1}\delta^{p_1-p}}{p_1-p}\Big)\|f\|_p^p.$$

Wähle nun δ so, dass

$$(2C_0)^{p_0}\delta^{p_0-p} = (2C_1)^{p_1}\delta^{p_1-p},$$

also

$$\delta = \Big(\frac{(2C_0)^{p_0}}{(2C_1)^{p_1}}\Big)^{\frac{1}{p_1-p_0}}.$$

Wir berechnen $((2C_0)^{p_0}\delta^{p_0-p})^{1/p}$, indem wir die Exponenten von $(2C_j)$ bestimmen. Für den Exponenten von $(2C_0)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\Big(p_0 + p_0\frac{p_0-p}{p_1-p}\Big)/p &= \frac{p_0p_1 - p_0^2 + p_0^2 - p_0p}{p(p_1-p_0)} = \frac{p_0p_1/p - p_0}{p_1-p_0} \\ &= \frac{p_0p_1(1-\theta)/p_0 + p_0p_1\theta/p_1 - p_0}{p_1-p_0} = \frac{p_1(1-\theta)+p_0\theta-p_0}{p_1-p_0} = 1-\theta,\end{aligned}$$

und für den Exponenten von $(2C_1)$ erhalten wir

$$-p_1\frac{p_0-p}{p_1-p_0}/p = \frac{p_1 - p_1p_0/p}{p_1-p_0} = \frac{p_1 - p_1p_0(1-\theta)/p_0 - p_1p_0\theta/p_1}{p_1-p_0} = \frac{p_1 - p_1(1-\theta) - p_0\theta}{p_1-p_0} = \theta.$$

Die Behauptung ist im Fall $p_1 < \infty$ bewiesen. Ende 17.Vorl.

Falls $p_1 = \infty$ ist, definieren wir zu $f \in L^p$ und $\alpha > 0$ die Funktionen f_0 und f_1 wie oben. Nach Voraussetzung gilt dann

$$\|Tf_1\|_\infty \le C_1\|f_1\|_\infty \le C_1\delta\alpha = \alpha/2,$$

wenn wir $\delta := (2C_1)^{-1}$ setzen. Dann ist aber $d_{Tf_1}(\alpha/2) = 0$ und

$$d_{Tf}(\alpha) \le d_{Tf_0}(\alpha/2) \le \Big(\frac{C_0\|f_0\|_{p_0}}{\alpha/2}\Big)^{p_0}.$$

Somit ist nun

$$\|Tf\|_p^p = p\int_0^\infty \alpha^{p-1}d_{Tf}(\alpha)\,d\alpha \le p(2C_0)^{p_0}\int_0^\infty \alpha^{p-1-p_0}\|f_0\|_{p_0}^{p_0}\,d\alpha = p(2C_0)^{p_0}\frac{\delta^{p_0-p}}{p-p_0}\|f\|_p^p.$$

Für die Konstante erhalten wir nach Wahl von δ:

$$\Big(\frac{p}{p-p_0}\Big)^{1/p}(2C_0)^{p_0/p}(2C_1)^{(p-p_0)/p}.$$

Wegen $p_1 = \infty$ ist $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0}$, also $p_0/p = 1-\theta$. Damit ist die Behauptung gezeigt. □

8.4. Anwendung: Ist $p \in (1,\infty)$ und $T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ ein stetiger linearer und translationsinvarianter Operator, so gibt es $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $T = T_m$, dh mit $\widehat{Tf} = m\hat{f}$ für alle $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Zunächst gilt für alle $f, g \in \mathscr{S}$ nach 7.2:

$$\int (Tf)g\,dy = (Tf)*(\sigma g)(0) = f*(T(\sigma g))(0) = \int f\sigma(T(\sigma g))\,dy.$$

Also ist $T' = \sigma T\sigma$ auf $\mathscr{S}$, dh $T = \sigma T'\sigma$ auf $\mathscr{S}$. Da $T', \sigma : L^{p'} \to L^{p'}$ stetig sind, ist besitzt $T|_{\mathscr{S}}$ eine stetige Fortsetzung $\widetilde{T} : L^{p'} \to L^{p'}$. Da $\mathscr{S}$ dicht in $L^p \cap L^{p'}$ ist, stimmen $\widetilde{T}$ und T auf $L^p \cap L^{p'}$ überein und wir können eine gemeinsame lineare Fortsetzung $S : L^p + L^{p'} \to L^p + L^{p'}$ erklären. Der Operator S ist ebenfalls translationsinvariant. Nach 8.3 ist dann aber auch $S : L^2 \to L^2$ stetig, und die Behauptung folgt aus 7.3 (beachte $S = T$ auf $L^2 \cap L^p \supset \mathscr{S}$). □

9 Maximalfunktionen und singuläre Integrale

9.1. Definition: Definiere für eine messbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ die zugehörige (zentrierte) *Maximalfunktion* Mf durch

$$(Mf)(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

und die *unzentrierte Maximalfunktion* $\widetilde{M}f$ durch

$$(\widetilde{M}f)(x) := \sup_{r>0, B(z,r)\ni x} \frac{1}{|B(z,r)|} \int_{B(z,r)} |f(y)|\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Die Abbildungen $M : f \mapsto Mf$, $\widetilde{M} : f \mapsto \widetilde{M}f$ heißen zentrierter bzw. unzentrierter *Maximaloperator*. Beachte, dass in unserer Situation das Volumen $|B(x,r)|$ der offenen Kugeln $B(x,r)$ nicht von x abhängt.

Es gilt $Mf(x) \le \widetilde{M}f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und wegen $x \in B(z,r) \Rightarrow B(z,r) \subset B(x,2r)$ gilt

$$\widetilde{M}f(x) \le 2^n Mf(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Ebenfalls klar ist

$$\|\widetilde{M}f\|_\infty \le \|f\|_\infty, \quad f \in L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Die Maximaloperatoren sind sublinear.

9.2. Theorem (Beschränktheit des Maximaloperators): (a) Ist $p \in [1,\infty]$, so gilt $Mf < \infty$ f.ü. für jedes $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

(b) Für $f \in L^1(R^n)$ gilt

$$|\{x : (\widetilde{M}f)(x) > \alpha\}| \le \frac{3^n}{\alpha} \|f\|_1.$$

(c) Für $1 < p \le \infty$ gibt es eine Konstante $C = C(n,p)$ mit

$$\|Mf\|_p \le C(p,n) \|f\|_p, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Insbesondere gilt $M, \widetilde{M} : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. zu (b): Seien $f \in L^1$ und $\alpha > 0$ fixiert. Setze

$$E_\alpha := \{x : \widetilde{M}f(x) > \alpha\}.$$

Sei nun E eine kompakte Teilmenge von E_α. Zu jedem $x \in E$ gibt es eine Kugel B_x mit $x \in B_x$ und $|B_x| < \frac{1}{\alpha} \int_{B_x} |f(y)|\, dy$. Da E kompakt ist, gibt es eine endliche Teilmenge $F \subset E$ mit $E \subset \bigcup_{x\in F} B_x$.

Lemma: Es gibt $m \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_m \in F$ derart, dass $B_j := B_{x_j}$ paarweise disjunkt sind und

$$\sum_{j=1} m|B_j| \geq 3^{-n}|E|$$

gilt.

Beweis. Wähle $x_1 \in F$ so, dass $B_1 := B_{x_1}$ maximalen Radius r_1 hat, und dann $x_2 \in F \setminus \{x : B_x \cap B_1 \neq \emptyset\}$ so, dass $B_2 := B_{x_2}$ maximalen Radius r_2 hat. Wähle danach $x_3 \in F \setminus \{x : B_x \cap (B_1 \cup B_2) \neq \emptyset\}$ so, dass $B_3 := B_{x_3}$ maximalen Radius r_3 hat etc.

Es gilt $3B_1 \supset B_x$ für alle $x \in F$ mit $r(B_x) \leq r_1$ und $B_x \cap B_1 \neq \emptyset, \dots, 3B_j \supset B_x$ für alle $x \in F$ mit $r(B_x) \leq r_j$ und $B_x \cap B_j \neq \emptyset$. Hierbei bezeichnet $3B$ die Kugel mit demselben Mittelpunkt wie B, aber dem dreifachen Radius. Somit ist

$$\bigcup_{j=1}^{m} 3B_j \supset \bigcup_{x \in F} B_x \supset E \quad \text{und} \quad |E| \leq 3^n \sum_{j=1}^{m} |B_j|.$$

$\square$

Wir erhalten also

$$|E| \leq 3^n \sum_{j=1}^{m} |B_j| \leq \frac{3^n}{\alpha} \sum_j \int_{B_j} |f|\, dy \leq \frac{3^n}{\alpha} \|f\|_1$$

und durch Supremumsbildung über alle kompakten Teilmengen von E_α:

$$|E_\alpha| \leq \frac{3^n}{\alpha} \|f\|_1.$$

(c) folgt aus (b) und Marcinkiewicz, (a) folgt aus (c). $\square$

9.3. Folgerung (Differentiationssatz von Lebesgue): Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt dann

$$f(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)\, dy.$$

Beweis. O.B.d.A. sei $f \in L^1$ (sonst lokalisieren). Setze $m_r f(x) := \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)\, dy$. Seien $\varepsilon, \delta > 0$. Wir zeigen

$$|\{x : |\omega_f(x)| > \delta\}| \leq \varepsilon,$$

wobei

$$\omega_f(x) = \limsup_{r \to 0} m_r f(x) - \liminf_{r \to 0} m_r f(x),$$

beachte hierbei 9.2(a). Setze $C := 3^n$ – das ist die Konstante aus 9.2(b) – und schreibe $f = g + h$, wobei g stetig ist und $h \in L^1$ mit $\|h\|_1 \le \frac{\varepsilon\delta}{2C}$. Dann gilt $\omega_g = 0$ und

$$|\{x : |\omega_f(x)| > \delta\}| = |\{x : |\omega_h(x)| > \delta\}| \le |\{x : |Mh(x)| > \delta/2\}| \le \frac{C}{\delta/2}\|h\|_1 \le \varepsilon.$$

Da $\varepsilon, \delta > 0$ beliebig waren, ist die Behauptung gezeigt. □

Bemerkung: Das Vorgehen im Beweis ist typisch für Aussagen über Konvergenz fast überall.

Ende 18.Vorl.

Bemerkung: Ist $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$ mit $Mf \in L^1$, so gilt $f = 0$ fast überall (Übungsaufgabe).

9.4. Lemma (Calderón-Zygmund-Zerlegung): Sei $f \in L^1$ und $\alpha > 0$. Dann gibt es eine Folge (Q_k) von achsenparallelen Würfeln mit paarweise disjunktem Inneren und

$$\begin{aligned} \alpha &< \frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} |f(y)|\,dy \le 2^n\alpha, \quad k \in \mathbb{N}, \\ |f(x)| &\le \alpha \quad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k. \end{aligned}$$

Beweis. Wähle $r > 0$ so groß, dass $\|f\|_1 \le \alpha r^n$, und schreibe

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \underbrace{r(\nu + [0,1]^n)}_{=:Q_\nu^{(0)}}.$$

Es gilt dann für jedes ν:

$$\frac{1}{|Q_\nu^{(0)}|}\int_{Q_\nu^{(0)}} |f(y)|\,dy \le \alpha.$$

Zerlege jeden Würfel $Q_\nu^{(0)}$ in 2^n Teilwürfel halber Kantenlänge. Die Menge all dieser bezeichnen wir mit $(Q_\nu^{(1)})_\nu$. Für jedes ν gilt dabei entweder

$$\frac{1}{|Q_\nu^{(1)}|}\int_{Q_\nu^{(1)}} |f(y)|\,dy \le \alpha \tag{i}$$

oder

$$\frac{1}{|Q_\nu^{(1)}|}\int_{Q_\nu^{(1)}} |f(y)|\,dy > \alpha.$$

Im zweiten Fall gilt dabei

$$\alpha < \frac{1}{|Q_\nu^{(1)}|}\int_{Q_\nu^{(1)}} |f(y)|\,dy \le 2^n\alpha, \tag{ii}$$

und wir nehmen solche $Q_\nu^{(1)}$ zur Folge (Q_k) hinzu. Die verbliebenen $Q_\nu^{(1)}$, also diejenigen mit der Eigenschaft (i), werden nun ihrerseits in je 2^n Teilwürfel mit halber Kantenlänge zerlegt. Die Menge aller dieser sei $(Q_\nu^{(2)})_\nu$. Wieder gilt entweder (i) oder (ii) etc.

Wir erhalten so iterativ eine Folge (Q_k) von Würfeln mit der ersten behaupteten Eigenschaft. Ist nun $x \notin \bigcup_k Q_k$, so lag x in keinem Teilungsschritt in einem Würfel mit der Eigenschaft (ii), dh es gibt zu jedem $j \in \mathbb{N}$ einen Würfel $Q_{\nu_j}^{(j)}$ der Kantenlänge $r2^{-j}$ mit (i) und $x \in Q_{\nu_j}^{(j)}$. Mit einer Variante von Folgerung 9.3 (Übungsaufgabe 39) folgt $|f(x)| \leq \alpha$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_k Q_k$. □

9.5. Bemerkung: Setze in der Situation von 9.4:

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & , x \notin \bigcup_j Q_j \\ \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f(y)|\, dy & , x \in Q_j \end{cases} ,$$

und

$$b_j(x) := \begin{cases} f(x) - \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f(y)|\, dy & , x \in Q_j \\ 0 & , x \notin Q_j \end{cases} .$$

Dann gilt $f = g + \sum_j b_j$ und

(i) $g \in L^\infty$ und $\|g\|_\infty \leq 2^n \alpha$,

(ii) $\operatorname{supp} b_j \subset Q_j$,

(iii) $\int b_j(y)\, dy = 0$,

(iv) $\sum_j |Q_j| < \sum_j \frac{1}{\alpha} \int_{Q_j} |f(y)|\, dy \leq \frac{\|f\|_1}{\alpha}$,

(v) $\int |b_j(y)|\, dy \leq 2 \int_{Q_j} |f(y)|\, dy$, also $\| \sum_j b_j\|_1 = \sum_j \|b_j\|_1 \leq 2\|f\|_1$,

(vi) $g \in L^1$ und $\|g\|_1 \leq \|f\|_1$, $\|g\|_2^2 \leq \|g\|_1 \|g\|_\infty \leq 2^n \alpha \|f\|_1$.

Das folgende Theorem ist ein erster Schritt in der Behandlung singulärer Integraloperatoren und deren Approximation.

9.6. Theorem: Sei $k \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $m := \hat{k}$. Seien $A, B > 0$ Konstanten mit $\|m\|_\infty \leq B$ und

$$\forall t > 0\, \forall 0 < |y|_\infty \leq t : \int_{|x|_\infty \geq 2t} |k(x-y) - k(x)|\, dx \leq A. \tag{H}$$

Dann gilt für $1 < p < \infty$: $m \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|T_m\|_{L^p \to L^p} \leq C_p,$$

wobei C_p nur von p, B, A und n abhängt (und nicht von $\|k\|_1$!).

Beweis. 1) Es gilt $\|T_m\|_{L^2\to L^2} \le B$.

2) Zeige: $T := T_m$ hat schwachen Typ $(1,1)$, dh die Voraussetzung in 8.3 gilt für $p_0 = 1$. Nach 1) gilt die Voraussetzung von 8.3 auch für $p_1 = 2$, und man kann 8.3 anwenden.

3) Sei $f \in L^1$ und $\alpha > 0$. Schreibe $f = g + h = g + \sum_j b_j$ gemäß 9.5. Dann gilt

$$d_{Tf}(\alpha) \le d_{Tg}(\alpha/2) + d_{Th}(\alpha/2).$$

4) Es gilt (wegen 9.5(vi)):

$$d_{Tg}(\alpha/2) \le \left(\frac{2}{\alpha}\right)^2 \|Tg\|_2^2 \le \frac{4}{\alpha^2} B^2 \|g\|_2^2 \le \frac{4B^2 2^n}{\alpha}\|f\|_1.$$

5) Nach 9.5(iv) gilt

$$d_{Th}(\alpha/2) \le |\bigcup_j (2Q_j)| + |\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_j (2Q_j) : |Th(x)| > \alpha/2\}| \le \frac{2^n}{\alpha}\|f\|_1 + \frac{2}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_j (2Q_j)} |Th(x)|\, dx.$$

6) Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_j (2Q_j)} |Th(x)|\, dx \le \sum_j \int_{\mathbb{R}^n \setminus (2Q_j)} |Tb_j(x)|\, dx.$$

7) Bezeichne a_j den Mittelpunkt von Q_j und $2t_j$ die Kantenlänge, so ist nach 9.5(iii):

$$Tb_j(x) = \int_{Q_j} k(x-y) b_j(y)\, dy = \int_{Q_j} (k(x-y) - k(x-a_j)) b_j(y)\, dy.$$

8) Wegen 7) haben wir (mittels Fubini und der Substitution $\widetilde{x} = x - a_j$)

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus (2Q_j)} |Tb_j(x)|\, dx \le \int_{Q_j} \int_{|\widetilde{x}|_\infty \ge 2t_j} |k(\widetilde{x} - (y - a_j)) - k(\widetilde{x})|\, d\widetilde{x} |b_j(y)|\, dy,$$

wobei wegen $|y - a_j|_\infty \le t_j$ nach Voraussetzung gilt:

$$\int_{|\widetilde{x}|_\infty \ge 2t_j} |k(\widetilde{x} - (y - a_j)) - k(\widetilde{x})|\, d\widetilde{x} \le A.$$

Somit ist für jedes j:

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus (2Q_j)} |Tb_j(x)|\, dx \le A\|b_j\|_1.$$

9) Zusammen ergeben 6), 8) und 9.5(v): Ende 19.Vorl.

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_j (2Q_j)} |Th(x)|\, dx \le \frac{2A}{\alpha} \sum_j \|b_j\|_1 \le \frac{4A}{\alpha}\|f\|_1.$$

10) Zusammen ergeben 4), 5) und 9):

$$d_{Tf}(\alpha) \le \frac{4B^2 2^n + 2^n + 4A}{\alpha}\|f\|_1.$$

Das ist die in 2) gewünschte Abschätzung. □

Bemerkung: Die Bedingung (H) heißt *Hörmander-Bedingung*. Wie man im Beweis sieht, kann man $\int_{|x|\geq 2t}$ durch $\int_{|x|\geq ct}$ ersetzen, wobei $c \geq 2$ beliebig gewählt werden kann. Es ist auch nicht wesentlich, dass $|\cdot|$ die Maximumsnorm ist. Die Hörmander-Bedingung wird impliziert von der stärkeren Bedingung

$$\exists C\, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : |\nabla k(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n+1}}.$$

Nach dem Hauptsatz gilt nämlich

$$k(x-y) - k(x) = \int_0^1 \nabla k(x - \tau y) \cdot y \, d\tau.$$

Also ist für $t > 0$ und $0 < |y| \leq t$:

$$\begin{aligned}
\int_{|x|_\infty \geq 2t} |k(x-y) - k(x)| \, dx &\leq \int_0^1 \int_{|x|_\infty \geq 2t} |\nabla k(x - \tau y) \cdot y| \, dx \, d\tau \\
&\leq t \int_{|x|_\infty \geq t} \sum_{j=1}^n |\partial_j k(\widetilde{x})| \, d\widetilde{x} \quad \text{hier } \widetilde{x} = x - \tau y \\
&\leq nCt \int_{|\widetilde{x}| \geq t} |\widetilde{x}|^{-n-1} \, d\widetilde{x} \\
&= C' t \int_t^\infty r^{-n-1} r^{n-1} \, dr = C'' < \infty.
\end{aligned}$$

Hierbei wurden im vorletzten Schritt Polarkoordinaten verwendet.

Eine genaue Betrachtung dieser Argumente zeigt, dass auch die Existenz von $C > 0$ und $\delta \in (0,1)$ mit

$$\forall t > 0\, \forall 0 < |y|_\infty \leq t, |x|_\infty \geq 2t : |k(x-y) - k(x)| \leq C \frac{|y|}{|x|^{n+\delta}}$$

hinreichend für (H) ist.

Beweis des Satzes von Mikhlin. Sei $L > n/2$ und $m \in C^L(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ genüge den Voraussetzungen von Theorem 7.8, dh

$$M := \sup\{|\xi|^{|\alpha|} |\partial^\alpha m(\xi)| : |\alpha| \leq L, \xi \neq 0\} < \infty.$$

Wähle $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \leq \psi \leq 1$ und $\psi(\xi) = 1$ für $|\xi| < 1/2$, sowie $\psi(\xi) = 0$ für $|\xi| \geq 1$, und setze $\varphi(\xi) := \psi(\xi/2) - \psi(\xi)$, sowie für $l \in \mathbb{Z}$: $\varphi_l(\xi) := \varphi(2^{-l}\xi)$. Dann gilt

$$\operatorname{supp} \varphi \subset \{1/2 < |\xi| < 2\}, \quad \operatorname{supp} \varphi_l \subset \{2^{l-1} < |\xi| < 2^{l+1}\}$$

und $\sum_{l \in \mathbb{Z}} \varphi_l(\xi) = 1$ für $\xi \neq 0$. Für jedes $l \in \mathbb{Z}$ setzen wir

$$m_l := \varphi_l \cdot m.$$

Behauptung 1: (a) Für jedes $l \in \mathbb{Z}$ gibt es ein $k_l \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $m_l = \widehat{k_l}$.
(b) Es gibt ein $C_1 > 0$ mit

$$\sup\{|\xi|^{|\alpha|}|\partial^\alpha m_l(\xi)| : |\alpha| \leq L, \xi \neq 0, l \in \mathbb{Z}\} \leq C_1 M.$$

Beweis. Zu (a): Wegen $L > n/2$ gilt

$$m_l \in C_c^L \subset H_2^L \subset \mathscr{F} L^1.$$

Da m_l kompakten Träger hat, ist $k_l = \mathscr{F}^{-1} m_l \in C^\infty$.
Zu (b): Für $l \in \mathbb{Z}$, $|\alpha| \leq L$ und $\xi \in \operatorname{supp} m_l$ gilt:

$$\begin{aligned}
|\xi|^{|\alpha|}|\partial^\alpha m_l(\xi)| &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} |\xi|^{|\alpha|} \partial^{\alpha-\beta}\varphi_l(\xi)||\partial^\beta m(\xi)| \\
&\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} |\xi|^{|\alpha-\beta|} 2^{-l|\alpha-\beta|} \|\partial^{\alpha-\beta}\varphi\|_\infty M \\
&\leq M \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} 2^{|\alpha-\beta|} \|\partial^{\alpha-\beta}\varphi\|_\infty \\
&\leq M \sup_{|\beta| \leq L} \|\partial^\beta \varphi\|_\infty \sup_{|\alpha| \leq L} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} 2^{|\beta|}.
\end{aligned}$$

□

Behauptung 2: Es gibt $C_2 > 0$ mit

$$\forall t > 0 \, \forall 0 < |y|_\infty \leq t, l \in \mathbb{Z} : \int_{|x|_\infty \geq 2t} |k_l(x-y) - k_l(x)| \, dx \leq C_2 \min\{(t2^l)^{n/2-L}, t2^l\} \, M.$$

Beweis. 1) Es gilt

$$\begin{aligned}
I &:= \int_{|x|_\infty \geq 2t} |k_l(x-y) - k_l(x)| \, dx \leq 2 \int_{|x|_\infty \geq t} |k_l(x)| \, dx \\
&\leq 2 \Big(\int_{|x|_\infty \geq t} |2^l x|_\infty^{-2L} \, dx \Big)^{1/2} \Big(\int_{|x|_\infty \geq t} |2^l x|_\infty^{2L} |k_l(x)|^2 \, dx \Big)^{1/2} \quad \text{CSU}
\end{aligned}$$

Im ersten Integral substituieren wir $x = t\widetilde{x}$ und im zweiten Integral verwenden wir

$$|x|_\infty^L \leq (\sum_{j=1}^n |x_j|)^L = \sum_{|\alpha|=L} \binom{L}{\alpha} |x^\alpha|.$$

Wir erhalten

$$I \leq 2 \Big(\int_{|\widetilde{x}|_\infty \geq 1} |\widetilde{x}|^{-2L} \, d\widetilde{x} \Big)^{1/2} (t2^l)^{n/2-L} 2^{-ln/2} \sum_{|\alpha|=L} \binom{L}{\alpha} \|2^{l|\alpha|} x^\alpha k_l(x)\|_2.$$

Nach Plancherel ist

$$\|2^{l|\alpha|}x^\alpha k_l(x)\|_2 = \frac{1}{(2\pi)^n}\Big(\int_{2^{l-1}<|\xi|\le 2^{l+1}} 2^{2l|\alpha|}|\partial^\alpha m_l(\xi)|^2\,d\xi\Big)^{1/2}$$

und unter dem Integral gilt

$$2^{2l|\alpha|} \le (2|\xi|)^{2|\alpha|} = 2^{2L}(|\xi|^{|\alpha|})^2.$$

Mithilfe der Voraussetzung ist also

$$I \le C_{n,L}(t2^l)^{n/2-L}2^{-ln/2}\underbrace{(2^{l+1})^{n/2}}_{\text{wg. Vol. Kreis}}M = C'_{n,L}(t2^l)^{n/2-L}M.$$

2) Ähnlich wie in der Bemerkung zur Hörmander-Bedingung schätzen wir ab:

$$I = \int_{|x|_\infty\ge 2t}|k_l(x-y)-k_l(x)|\,dx \le \int_0^1\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla k(x-\tau y)\cdot y|\,dx\,d\tau \le t\sum_{j=1}^n\|\partial_j k_l\|_1.$$

Mithilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhalten wir

$$I \le t\sum_{j=1}^n\Big(\int(1+|2^lx|^2)^{-L}\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int(1+|2^lx|^2)^L|\partial_jk_l(x)|^2\,dx\Big)^{1/2}$$

Substitution $x = 2^{-l}y$ im ersten Integral gibt

$$\Big(\int(1+|2^lx|^2)^{-L}\,dx\Big)^{1/2} = 2^{-ln/2}\underbrace{\Big(\int(1+|y|^2)^{-L}\,dy\Big)^{1/2}}_{\text{endl. Konstante}}.$$

Im zweiten Integral verwenden wir

$$(1+|2^lx|^2)^L \le (1+|2^lx|)^{2L} \le \Big(\sum_{|\alpha|\le L}\binom{L}{\alpha}|(2^lx)^\alpha|\Big)^2.$$

Somit ist

$$I \le Ct2^{-ln/2}\sum_j\sum_{|\alpha|\le L}\|2^{l|\alpha|}x^\alpha\partial_jk_l(x)\|_2,$$

Ende 20.Vorl.

und wir verwenden wieder Plancherel:

$$\le C't2^{-ln/2}\sum_j\sum_{|\alpha|\le L}\Big(\int_{2^{l-1}<|\xi|\le 2^{l+1}}2^{2l|\alpha|}|\partial^\alpha\xi_jm_l(\xi)|^2\,d\xi\Big)^{1/2}.$$

Wieder ist $2^{2l|\alpha|} \le (2|\xi|)^{2|\alpha|}$ im Integral, außerdem gilt

$$\partial^\alpha(\xi_jm_l(\xi)) = \xi_j\partial^\alpha m_l(\xi) + \alpha_j\partial^{\alpha-e_j}m_l(\xi),$$

wie man durch Induktion zeigen kann. Bei Abschätzung gegen M hat man also im Integral immer noch einen Faktor $|\xi|$ übrig. Es folgt:

$$I \leq C'' t 2^{-ln/2} 2^{ln/2} 2^l M = C''(2^l t) M.$$

Behauptung 2 ist bewiesen. $\square$

Wir definieren $m_F := \sum_{l \in F} m_l$ für jede endliche Teilmenge $F \subset \mathbb{Z}$.

Behauptung 3: Sei $p \in (1, \infty)$. Es gibt $C_3(p) > 0$ mit

$$\forall F \subset \mathbb{Z} \text{ endlich} : \|T_{m_F}\|_{L^p \to L^p} \leq C_3(p) M.$$

Beweis. Wegen Behauptung 2 und Theorem 9.6 reicht es zu zeigen:

$$\sup_{t>0} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \min\{(t2^l)^{n/2-L}, t2^l\} < \infty.$$

Sei also $t > 0$. Wähle l_0 so, dass $2^{l_0} < t \leq 2^{l_0+1}$ und setze $\gamma := L - n/2 > 0$. Dann ist

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \min\{(t2^l)^{n/2-L}, t2^l\} \leq \sum_{l \in \mathbb{Z}} \min\{(2^{l_0+l})^{-\gamma}, 2 \cdot 2^{l_0+l}\} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \min\{(2^\gamma)^{-l}, 2 \cdot 2^l\} < \infty.$$

$\square$

Folgerung: Für alle $f \in L^p$, $g \in L^{p'}$ konvergiert $\sum_{l \in \mathbb{Z}} \langle T_{m_l} f, g\rangle$ absolut und durch

$$\langle Sf, g\rangle := \sum_{l \in \mathbb{Z}} \langle T_{m_l} f, g\rangle$$

wird ein stetiger linearer Operator $S : L^p \to L^p$ definiert mit $\|S\|_{L^p \to L^p} \leq C_3(p) M$.

Behauptung 4: Es gilt $S = T_m$, also insbesondere $\|T_m\|_{L^p \to L^p} \leq C_3(p) M$.

Beweis. Für $\varphi, \psi \in \mathscr{S}$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle S\varphi, \psi\rangle &= \lim_{N \to \infty} \langle \sum_{|l| \leq N} T_{m_l} \varphi, \psi\rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \lim_{N \to \infty} \langle \sum_{|l| \leq N} m_l \hat{\varphi}, \hat{\psi}\rangle = \langle T_m \varphi, \psi\rangle. \end{aligned}$$

Da $\mathscr{S}$ dicht in L^p und in $L^{p'}$ ist, folgt die Behauptung. $\square$

Der Satz von Mikhlin ist bewiesen. $\square$

Die Hilberttransformation: Wir wollen erklären

$$Hf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y}\, dy.$$

Problem: Die Abbildung $y \mapsto \frac{1}{x-y}$ gehört für kein $\varepsilon > 0$ zu $L^1(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, so dass Hf so wie oben nur für $f = 0$ als Lebesgue-Integral existiert.

Ausweg wird sein $Hf := \lim_{\varepsilon\to 0+} H_\varepsilon f$ mit

$$H_\varepsilon f(x) := \int_{|x-y|\geq\varepsilon} \frac{f(y)}{x-y}\, dy = \int_{|y|\geq\varepsilon} \frac{f(x-y)}{y}\, dy.$$

Dh es ist $H_\varepsilon f := k_\varepsilon * f$, wobei

$$k_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1/x & , |x| \geq \varepsilon \\ 0 & , |x| < \varepsilon \end{cases}.$$

Man schneidet also die störende Singularität ab. Es gilt zwar $k_\varepsilon \notin L^1$, aber $k_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R})$, so dass $H_\varepsilon f$ für $f \in L^1$ erklärt ist mit $H_\varepsilon f \in L^2$. Es gilt aber auch $H_\varepsilon f \in L^\infty(\mathbb{R})$ für $f \in L^1 \cap L^2$: Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ist

$$|H_\varepsilon f(x)| \leq \left| \int k_\varepsilon(x-y) f(y)\, dy \right| \leq \|k_\varepsilon(x-\cdot)\|_2 \|f\|_2 = \|k_\varepsilon\|_2 \|f\|_2.$$

Es gilt sogar $H_\varepsilon f \in BUC(\mathbb{R})$ für alle $f \in L^2(\mathbb{R})$ (vergleiche Übungsaufgabe).

9.7. Lemma: Für $f \in L^1 \cap C^1$ existiert der punktweise Limes

$$Hf(x) := \lim_{\varepsilon\to 0+} H_\varepsilon f(x).$$

Bemerkung: Man nennt diesen Grenzwert den *Cauchy-Hauptwert* des Integrals $\int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y}\, dy$.

Beweis. Für $\varepsilon \in (0,1)$ gilt

$$H_\varepsilon f(x) = \int_{|y|\geq\varepsilon} \frac{f(x-y)}{y}\, dy = \int_{|y|\geq 1} \frac{f(x-y)}{y}\, dy + \int_{\varepsilon\leq|y|\leq 1} \frac{f(x-y)}{y}\, dy.$$

Wegen $\int_{\varepsilon\leq|y|\leq 1} \frac{dy}{y} = 0$ gilt

$$\int_{\varepsilon\leq|y|\leq 1} \frac{f(x-y)}{y}\, dy = \int_{\varepsilon\leq|y|\leq 1} \frac{f(x-y)-f(x)}{y}\, dy \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} \int_{0\leq|y|\leq 1} \frac{f(x-y)-f(x)}{y}\, dy,$$

da $y \mapsto \begin{cases} \frac{f(x-y)-f(x)}{y} & , y \neq 0 \\ -f'(x) & , y = 0 \end{cases}$ stetig ist. $\square$

Ende
21.Vorl.

9.8. Lemma: Für $\varepsilon > 0$ gilt $\mathscr{F} k_\varepsilon(\xi) = -2i \operatorname{sgn} \xi \cdot \int_{\varepsilon|\xi|}^\infty \frac{\sin\tau}{\tau} \, d\tau$, $\mathscr{F} k_\varepsilon \in L^\infty$ und

$$\sup_{\varepsilon > 0} \|\mathscr{F} k_\varepsilon\|_\infty < \infty.$$

Bemerkung: Wegen $k_\varepsilon \in L^2$ ist zunächst nur $\mathscr{F} k_\varepsilon \in L^2$ klar.

Beweis. Das Problem ist $k_\varepsilon \notin L^1$. Für $R > \varepsilon$ ist aber $k_{\varepsilon,R} \in L^1$, wobei

$$k_{\varepsilon,R}(\xi) := \begin{cases} 1/x & , \varepsilon \leq |x| \leq R \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases},$$

und $k_{\varepsilon,R} \longrightarrow k_\varepsilon$ bzgl. $\|\cdot\|_2$, also $\widehat{k_{\varepsilon,R}} \longrightarrow \widehat{k_\varepsilon}$ bzgl. $\|\cdot\|_2$. Wir berechnen $\widehat{k_{\varepsilon,R}}$:

$$\widehat{xk_{\varepsilon,R}}(\xi) = \int_\varepsilon^R + \int_{-R}^{-\varepsilon} e^{-ix\xi} \, dx = \frac{i}{\xi}(e^{-iR\xi} - e^{-i\varepsilon\xi} + e^{i\varepsilon\xi} - e^{iR\xi}) = -\frac{2}{\xi}(\sin(\varepsilon\xi) - \sin(R\xi)).$$

Nun ist aber $(\widehat{k_{\varepsilon,R}})'(\xi) = (\widehat{-ix)k_{\varepsilon,R}}(\xi)$, also wegen $\widehat{k_{\varepsilon,R}}(0) = \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} \frac{dx}{x} = 0$:

$$\widehat{k_{\varepsilon,R}}(\xi) = 2i \int_0^\xi \frac{\sin(\varepsilon\eta)}{\eta} - \frac{\sin(R\eta)}{\eta} \, d\eta = -2i \int_{\varepsilon\xi}^{R\xi} \frac{\sin\tau}{\tau} \, d\tau.$$

Nun konvergiert $\int_0^\infty \frac{\sin\tau}{\tau} \, d\tau$ und ist gleich $\pi/2$. Da der Integrand gerade ist, gilt auch $\int_{-\infty}^0 \frac{\sin\tau}{\tau} \, d\tau = \frac{\pi}{2}$. Somit ist

$$\|\widehat{k_{\varepsilon,R}}\|_\infty \leq 2 \sup_{0 \leq a \leq b} \left| \int_a^b \frac{\sin\tau}{\tau} \right| =: C < \infty.$$

Für $R \to \infty$ konvergiert $\widehat{k_{\varepsilon,R}}$ punktweise. Wegen $\widehat{k_{\varepsilon,R}} \longrightarrow \mathscr{F} k_\varepsilon$ bzgl. $\|\cdot\|_2$ folgt

$$\mathscr{F} k_\varepsilon(\xi) = \lim_{R \to \infty} \widehat{k_{\varepsilon,R}}(\xi) = 2i \operatorname{sgn} \xi \cdot \int_{|\varepsilon|\xi}^\infty \frac{\sin(\tau)}{\tau} \, d\tau.$$

Damit folgt auch $\|\mathscr{F} k_\varepsilon\|_\infty \leq C$ für jedes $\varepsilon > 0$. □

Bemerkung: Klar ist auch für alle $\xi \neq 0$:

$$\mathscr{F} k_\varepsilon(\xi) \stackrel{\varepsilon \to 0+}{\longrightarrow} -2i \operatorname{sgn} \xi \cdot \frac{\pi}{2} = -\pi i \operatorname{sgn} \xi.$$

9.9. Satz: Für jedes $f \in L^2$ gilt bzgl. $\|\cdot\|_2$:

$$H_\varepsilon f \longrightarrow T_m f \quad (\varepsilon \to 0+),$$

wobei $m(\xi) = -\pi i \operatorname{sgn} \xi$, $\xi \neq 0$.

Beweis. Für $f \in L^1 \cap L^2$ gilt

$$\mathscr{F} H_\varepsilon f = \mathscr{F}(k_\varepsilon * f) = \mathscr{F} k_\varepsilon \cdot \hat{f}.$$

Nun konvergiert $\mathscr{F} k_\varepsilon \cdot \hat{f}$ punktweise fast überall gegen $m\hat{f}$, und es ist

$$|\mathscr{F} k_\varepsilon \cdot \hat{f}| \leq C|\hat{f}| \in L^2, \quad \varepsilon > 0,$$

wobei C dasjenige aus dem Beweis von (9.8) ist. Nach majorisierter Konvergenz gilt $\mathscr{F} k_\varepsilon \cdot \hat{f} \to m\hat{f}$ $(\varepsilon \to 0+)$ bzgl. $\|\cdot\|_2$ und also auch $H_\varepsilon f \to T_m f$ $(\varepsilon \to 0+)$ bzgl. $\|\cdot\|_2$. Da $L^1 \cap L^2$ dicht in L^2 ist, folgt wegen

$$\sup_\varepsilon \|H_\varepsilon\|_{L^2 \to L^2} \leq \sup_\varepsilon \|\mathscr{F} k_\varepsilon\|_\infty \leq C < \infty$$

die Behauptung. □

Bemerkung: (a) Für $1 < p < \infty$ und jedes $f \in L^p$ gilt $H_\varepsilon f \to T_m f$ $(\varepsilon \to 0+)$ bzgl. $\|\cdot\|_p$.
(b) Punktweise Konvergenz fast überall $H_\varepsilon f(x) \to Hf(x)$ zeigt man mithilfe des *Maximaloperators*

$$H_* f(x) := \sup_{\varepsilon > 0} |H_\varepsilon f(x)| = \sup_{\varepsilon > 0} \Big| \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{f(x-y)}{y} \, dy \Big|$$

und *Maximalabschätzungen*

$$\|H_* f\|_p \leq C_p \|f\|_p, \quad f \in L^p.$$

Andere Maximalfunktionen

Definiere für $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$:

$$g_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \; g_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} g(\frac{x}{\varepsilon}).$$

Ist $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\int g \, dx = 1$, so ist $(g_\varepsilon)_\varepsilon$ eine Dirac-Familie (hier für $\varepsilon \to 0+!$).

Im Spezialfall $g := \frac{1}{v_n} 1_{B(0,1)}$, wobei v_n das Volumen der Einheitskugel $B(0,1)$ in $\mathbb{R}^n$ ist, so gilt für die Hardy-Littlewood-Maximalfunktion

$$Mf(x) = \sup_{\varepsilon > 0} \frac{1}{\varepsilon^n v_n} \int_{B(0,\varepsilon)} |f(x-y)| \, dy = \sup_{\varepsilon > 0} (|f| * g_\varepsilon)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

9.10. Theorem: Sei $k \geq 0$ auf $(0, \infty)$ definiert, monoton fallend und habe nur endlich viele Unstetigkeitsstellen. Setze $K(x) := k(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Es gelte $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für jedes $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$:

$$\sup_{\varepsilon > 0} (|f| * K_\varepsilon)(x) \leq \|K\|_1 \, Mf(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Ende 22.Vorl.

Beweis. Wir nehmen an, dass K außerdem stetig mit kompaktem Träger ist, den allgemeinen Fall erhält man dann durch Approximation $K^{(j)} \to K$ und den monotonen Konvergenzsatz).

Es reicht, den Fall $x = 0$ zu betrachten (sonst muss man verschieben). Sei nun $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$. Dann gilt mittels Übergang zu Polarkoordinaten

$$I := (|f| * K_\varepsilon)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| K_\varepsilon(-y)\, dy = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} |f(r\theta)| K_\varepsilon(re_1) r^{n-1}\, d\theta\, dr.$$

Hierbei bezeichne $d\theta$ das Oberflächenmaß auf der Einheitssphäre S^{n-1}. Setze nun

$$F(r) := \int_{S^{n-1}} |f(r\theta)|\, d\theta, \quad G(r) := \int_0^r F(s) s^{n-1}\, ds.$$

Da K kompakten Träger hat, gilt etwa $K(x) = 0$ für $|x| \geq R$. Dann ist mittels partieller Integration

$$\begin{aligned} I = \int_0^R F(r) r^{n-1} K_\varepsilon(re_1)\, dr &= G(R) \underbrace{K_\varepsilon(Re_1)}_{=0} - G(0) K_\varepsilon(0) - \int_0^\infty G(r)\, dK_\varepsilon(re_1) \\ &= \int_0^\infty G(r)\, d(-K_\varepsilon(re_1)), \end{aligned}$$

wobei dieses Integral ein Lebesgue-Stieltjes-Integral ist. Nun gilt

$$G(r) = \int_0^r F(s) s^{n-1}\, ds = \int_{|y| \leq r} |f(y)|\, dy \leq Mf(0)\, v_n r^n.$$

Also ist

$$I \leq Mf(0)\, v_n \int_0^\infty r^n\, d(-K_\varepsilon(re_1)) = Mf(0) \int_0^\infty v_n r^n\, d(-K_\varepsilon(re_1)),$$

wobei

$$\int_0^\infty v_n r^n\, d(-K_\varepsilon(re_1)) = \int_0^\infty n v_n r^{n-1} K_\varepsilon(re_1)\, dr = \|K\|_1.$$

□

Definition: Sei $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Eine Funktion $K_0 \geq 0$ auf $\mathbb{R}^n$ heißt *radial fallende Majorante von* K, falls $K_0(x) = k_0(|x|)$ und k_0 monoton fallend mit nur endlich vielen Unstetigkeitsstellen ist.

9.11. Folgerung: Die Funktion K habe die integrierbare, radial fallende Majorante K_0. Dann gilt für jedes $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$:

$$\sup_{t>0} |(f * K_t)|(x) \leq \|K_0\|_1\, Mf(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

9.12. Beispiel (der Poissonkern): Der *Poissonkern* sei gegeben durch

$$P(x) := c_n(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}},$$

wobei c_n so gewählt ist, dass $\int_{\mathbb{R}^n} P(x)\,dx = 1$ gilt. Man setzt für $t > 0$:

$$P_t(x) = t^{-n}P(x/t), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann gilt

$$\frac{d^2}{dt^2}P_t + \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 P_t = 0,$$

dh $(x_1,\ldots,x_n,t) \mapsto P_t(x_1,\ldots,x_n)$ ist *harmonisch* in $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Wir wissen, dass $(P_t)_{t>0}$ eine Dirac-Familie ist (wieder für $t \to 0+$!), also gilt für $1 \le p < \infty$ und $f \in L^p$:

$$f * P_t \to f,\ (t \to 0+) \text{ bzgl. } \|\cdot\|_p.$$

Andererseits gilt für alle $f \in L^p \cap C_0$:

$$f * P_t \to f\ (t \to 0+) \text{ gleichmäßig},$$

also auch $f * P_t \to f$ punktweise für alle $f \in L^p \cap C_0$.

Behauptung: Sei $1 \le p < \infty$. Dann gilt für alle $f \in L^p$:

$$f * P_t \to f\ (t \to 0+) \text{ punktweise fast überall.}$$

Beweis. Das Vorgehen ist ähnlich wie beim Beweis des Differentiationssatzes von Lebesgue. Für jedes f definieren wir

$$\omega_f(x) := \limsup_{\varepsilon\to 0}\limsup_{\theta\to 0} |P_\varepsilon f(x) - P_\theta f(x)|,\ x \in \mathbb{R},$$

als Maß für die Oszillation. Schreibt man $f \in L^p$ als $f = g + h$ mit $g \in C_0$, so hat man nach der Dreiecksungleichung und nach (9.10):

$$\omega_f(x) \le \underbrace{\omega_g(x)}_{=0} + \omega_h(x) = \omega_h(x) \le 2Mf(x).$$

Folglich gilt für jedes $\delta > 0$:

$$|\{x : \omega_f(x) > \delta\}| \le |\{x : \omega_h(x) > \delta\}| \le |\{x : Mf(x) > \delta/2\}| \le \Big(\frac{2B\|h\|_p}{\delta}\Big)^p.$$

Zu beliebigem $\eta > 0$ können wir wegen der Dichtheit von $L^p \cap C_0$ in L^p ein $g \in L^p \cap C_0$ finden mit $\|h\|_p \le \eta$ für $h := f - g$. Es folgt

$$|\{x : \omega_f(x) > \delta\}| = 0$$

für jedes feste $\delta > 0$, und die Behauptung ist bewiesen. □

Ende 23.Vorl.