Fourieranalysis und Distributionentheorie

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Die Grundidee der Fourieranalysis: Entwicklung periodischer Funktionen in trigonometrische Reihen

Bereits im Schulunterricht lernt man heute für gewöhnlich, daß sich der Klang einer schwingenden Saite, welche an beiden Enden eingespannt ist, in den „Grundton“ sowie „Obertöne“ zerlegen läßt. Genauer meint man damit folgendes:
Stellen wir uns vor, daß die Enden der Saite den Punkten 0 und $L > 0$ auf der reellen Achse entsprechen, so ist die Vorstellung die, daß sich die Auslenkung $u(x,t)$ der Saite zu einem festen Zeitpunkt t als Funktion vom Ort x zerlegen läßt in **stehende Wellen** der Gestalt

$$u_m(x,t) = a_m(t) \sin m\tfrac{\pi}{L}x, \quad m = 1, 2, 3, ...,$$

d.h. daß man $u(x,t)$ als **Superposition**

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(t) \sin \tfrac{\pi}{L}mx \tag{1.1}$$

darstellen kann. Nehmen wir an, daß die Wellengeschwindigkeit auf 1 normiert ist, so zeigt eine genauere Analyse der zugrundeliegenden „Wellengleichung“ zudem, daß dann $a_m(t)$ die Gestalt $A_m \cos m\frac{\pi}{L}t + B_m \sin m\frac{\pi}{L}t$ besitzen muß, mit gewissen Koeffizienten A_m, B_m (eine ausführliche mathematische Diskussion der schwingenden Saite findet man z.B. in [16]). Der Term mit $m = 1$ entspricht dabei dem **Hauptton** bzw. der **ersten harmonischen Schwingung** der schwingenden Saite, der Term mit $m = 2$ dem **ersten Oberton** bzw. der **zweiten harmonischen Schwingung**, usw..

Insbesondere bedeutet dies, daß man für einen festen Zeitpunkt t die Auslenkungsfunktion $f(x) = u(x,t)$ in eine Sinusreihe der Form $f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin \frac{\pi}{L} mx$ entwickeln kann.
Beachte, daß man f eindeutig zu einer ungeraden Funktion auf dem Intervall $[-L, L]$ fortsetzen kann, welche dann ebenfalls durch diese Sinusreihe dargestellt wird.
Für allgemeinere Funktionen f auf dem Intervall $[-L, L]$, welche nicht notwendig an den Endpunkten verschwinden, zeigt eine ähnliche Analyse entsprechender physikalischer Randwertprobleme, daß sich diese in Reihen der Gestalt

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos \tfrac{\pi}{L} mx + b_m \sin \tfrac{\pi}{L} mx) \tag{1.2}$$

entwickeln lassen sollten.
Die Darstellung (1.1) der Auslenkung der schwingenden Saite war i.w. bereits um 1753 von D. Bernoulli vorgeschlagen worden. L. Euler wie auch viele andere Mathematiker seiner Zeit hatten jedoch erhebliche Zweifel an der Allgemeingültigkeit einer solchen Entwicklung, da sie nicht daran glaubten, daß eine Entwicklung der Gestalt (1.2) für genügend allgemeine Funktionen möglich ist. Diese Skepsis wurde erst durch die Untersuchungen J. Fouriers (um 1807) zur Wärmeleitungsgleichung und nachfolgende Arbeiten anderer, welche nachwiesen, daß (1.2) für erstaunlich viele Funktionen zutrifft, ausgeräumt.

Nun kann man (1.2) auch so interpretieren, daß sich eine genügend allgemeine $2L$-periodische Funktion f auf der reellen Achse in eine Reihe (1.2) entwickeln lassen sollte (die Frage, in welchem Konvergenzsinne dies geschehen könnte, soll an dieser Stelle noch völlig offen gelassen werden).
Zur Erinnerung: Eine Funktion f auf $\mathbb{R}$ heißt T-**periodisch** ($T > 0$), falls

$$f(x+T) = f(x) \qquad \text{für alle} \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Indem man mittels einer Dehnung oder Stauchung von f zu der 2π-periodischen Funktion $f \circ \frac{T}{2\pi}(x) := f(\frac{T}{2\pi}x)$ übergeht, kann man o.B.d.A. annehmen, daß die Periode 2π beträgt. Dies wollen wir im folgenden stets tun, falls nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird.
Dann haben wir es in (1.2) mit **trigonometrischen Reihen** der Gestalt

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx) \tag{1.3}$$

zu tun. Die **Koeffizienten** a_m, b_m einer solchen trigonometrischen Reihe dürfen a priori beliebige komplexe Zahlen sein, und die Reihe sollte zunächst als formale Funktionenreihe betrachtet werden, ohne daß Konvergenz auch nur in einem Punkt x verlangt wird (ganz ähnlich wie für Potenzreihen).

Mittels der Eulerschen Identität $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ kann die obige Reihe formal auch als sogenannte **Fourierreihe**

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \tag{1.4}$$

geschrieben werden. Fourierreihen sollten zunächst ebenfalls zunächst nur als formale Reihen betrachtet werden. Die komplexe Zahl c_k heiße dabei der **k-te Fourierkoeffizient** dieser Reihe. Man beachte auch, daß die Reihenfolge, in welcher darin über alle ganzen Zahlen k summiert wird, ebenfalls noch offen ist.
Stellen (1.2) und (1.3) dieselbe formale Reihe dar, so besteht offenbar der folgende Zusammenhang zwischen den jeweiligen Koeffizienten:

$$a_m = c_m + c_{-m}, \qquad \text{falls } m \geq 0, \tag{1.5}$$
$$b_m = i(c_m - c_{-m}), \quad \text{falls } m \geq 1. \tag{1.6}$$

Aus mathematischer Sicht sind die Reihen (1.3) aufgrund der besonderen Eigenschaften der darin auftretenden sogenannten **Charaktere**

$$e_k(x) := e^{ikx}, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

i.a. vorzuziehen. Diese genügen nämlich offenkundig den einfachen Identitäten

$$e_k(x+y) = e_k(x)e_k(y), \quad x, y \in \mathbb{R}, \tag{1.7}$$

sowie

$$\overline{e_k} = e_{-k} \tag{1.8}$$

und

$$e_j e_k = e_{j+k}. \tag{1.9}$$

Definition. Die Fourierreihe (1.4) **konvergiere im Punkte** $x \in \mathbb{R}$ gegen $\lambda \in \mathbb{C}$, falls die Folge der symmetrischen Partialsummen $\sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ für $n \to \infty$ gegen λ strebt. Wir bezeichnen dann λ als den **Wert** der Reihe und schreiben

$$\lambda = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad (\text{oder auch } \lambda = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}).$$

Sie konvergiere **punktweise (bzw. gleichmäßig)** gegen die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, falls die Folge der symmetrischen Partialsummen $\sum_{k=-n}^{n} c_k e_k$ punktweise (bzw. gleichmäßig) gegen f konvergiert. Letzteres bedeutet, daß

$$\|f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k\|_\infty \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Offenbar ist dann f stetig.

Angenommen, wir wüßten bereits, daß sich eine gegebene $2\pi-$periodische Funktion f in eine Fourierreihe entwickeln läßt. Wie sind dann ihre Fourierkoeffizienten c_k zu bestimmen? Der Schlüssel zur Beantwortung dieser Frage liegt in der folgenden Identität für die Charaktere e_k, welche für die gesamte Fourieranalysis von fundamentaler Bedeutung ist:
Falls eine Funktion f auf $\mathbb{R}$ 2π-periodisch ist, so ist sie bereits eindeutig bestimmt durch ihre Einschränkung auf ein beliebiges Intervall der Länge 2π, z.B. das Intervall $[0, 2\pi[$. Vorausgesetzt, sie ist über dieses Intervall Riemann-, oder allgemeiner Lebesgue-integrierbar, so definieren wir ihr Integral durch

$$\oint f(x)\,dx := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx.$$

Beachte, daß der Vorfaktor das Integral so normiert, daß für die konstante Funktion 1 gilt: $\oint 1\,dx = 1$. Man überlegt sich leicht, daß dann für jedes beliebige Intervall I der Länge 2π gilt:

$$\oint f(x)\,dx := \frac{1}{2\pi}\int_I f(x)\,dx. \tag{1.10}$$

Mit diesem Integralbegriff gilt

Satz 1.1 *Für alle $j, k \in \mathbb{Z}$ gilt*

$$\oint e_j(x)\overline{e_k(x)}\,dx = \delta_{jk}, \tag{1.11}$$

wobei δ_{jk} das Kroneckersymbol bezeichne, d.h. $\delta_{jk} = 1$, falls $j = k$, und $\delta_{jk} = 0$, falls $j \neq k$.

Beweis. Für $\ell \neq 0$ ist

$$\int_0^{2\pi} e^{i\ell x} dx = \frac{1}{i\ell} e^{i\ell x}\Big|_0^{2\pi} = 0,$$

und für $\ell = 0$ ist $\int\limits_0^{2\pi} dx = 2\pi$. Daraus ergibt sich die Behauptung sofort mit (1.8) und (1.9).

Q.E.D.

Bemerkung 1.2 Die Formel (1.11) besitzt folgende geometrische Interpretation: Durch $(f, g) := \oint f(x)\overline{g(x)}\,dx$ wird ein Skalarprodukt auf dem Raum der 2π-periodischen, über $[0, 2\pi[$ quadratintegrierbaren Funktionen erklärt. (1.11) besagt dann, daß die Charaktere $\{e_k\}_k$ ein Orthonormalsystem bzgl. dieses Skalarproduktes bilden.

Satz 1.3 *Die Fourierreihe* $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e_k$ *konvergiere gleichmäßig auf* $\mathbb{R}$ *gegen die (dann stetige) Funktion* f. *Dann ist* f 2π*-periodisch, und es gilt:*

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx.$$

Beweis. Sei $f_n := \sum_{j=-n}^{n} c_j e_j$. Dann ist f_n 2π-periodisch, und es gilt insbesondere $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Folglich ist $f(x+2\pi) = \lim_{n\to\infty} f_n(x+2\pi) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, d.h. f ist 2π-periodisch. Sei nun $k \in \mathbb{Z}$ fest gewählt. Wegen $|\overline{e_k(x)}| = |e^{-ikx}| = 1,\ x \in \mathbb{R}$, gilt dann

$$\|f\overline{e_k} - \sum_{j=-n}^{n} c_j e_j \overline{e_k}\|_\infty = \|f - \sum_{j=-n}^{n} c_j e_j\|_\infty.$$

Folglich konvergiert die Funktionenfolge $(\sum\limits_{j=-n}^{n} c_j e_j \overline{e_k})_n$ gleichmäßig gegen $f\overline{e_k}$, so daß

$$\oint f(x)e_{-k}(x)dx = \lim_{n\to\infty} \oint \sum_{j=-n}^{n} c_j e_j(x)\overline{e_k(x)}\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=-n}^{n} c_j \oint e_j(x)\overline{e_k(x)}\,dx.$$

Die Behautung folgt daher sofort aus (1.11).

Q.E.D.

Definition. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion, welche über das Intervall $[0, 2\pi[$ Riemann- bzw. allgemeiner Lebesgue-integrierbar ist, d.h. kurz eine **2π-periodische lokal integrierbare Funktion.** Für $k \in \mathbb{Z}$ heißt dann

$$\widehat{f}(k) := \oint f(x)\overline{e_k(x)}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx$$

der k-te **Fourierkoeffizient** von f. Die (formale) trigonometrische Reihe

$$Sf(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx}$$

heißt die **Fourierreihe** von f. Man benutzt dafür oft auch die folgende symbolische Schreibweise

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx}. \tag{1.12}$$

Die n-te symmetrische Partialsumme bezeichnen wir mit $S_n f(x)$, d.h.

$$S_n f(x) := \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

Schreibt man die Fourierreihe von f gemäß (1.3) als (formale) trigonometrische Reihe der folgenden Form

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx), \tag{1.13}$$

so ergeben sich aus (1.5), (1.6) und (1.10) rasch die folgenden Formeln für die **Fourier-Cosinuskoeffizienten** a_m bzw. **Fourier-Sinuskoeffizienten** b_m :

$$\begin{aligned} a_m &= 2 \oint f(x) \cos mx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx, \quad m = 0, 1, 2, \ldots; \quad (1.14) \\ b_m &= 2 \oint f(x) \sin mx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx, \quad m = 1, 2, \ldots. \quad (1.15) \end{aligned}$$

Wir haben hier als Integrationsintervall das Intervall $]-\pi, \pi[$ gewählt, da die Entwicklung in trigonometrische Reihen besonders für Funktionen mit Symmetrieeigenschaften bzgl. des Ursprungs vorteilhaft sein kann, d.h. für gerade bzw. ungerade Funktionen.
Ist nämlich f eine *gerade Funktion*, so ist der Integrand in der Formel für b_m ungerade, d.h. $b_m = 0$, so daß die Reihe (1.13) eine reine **Cosinusreihe**

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx$$

ist. Analog ist für ungerades f die Reihe (1.13) eine reine **Sinusreihe**

$$f(x) \sim \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin mx.$$

Endliche Linearkombinationen $\sum c_k e_k$ der Charaktere e_k, wie beispielsweise $S_n f$, bezeichnet man übrigens auch als **trigonometrische Polynome**.

Beispiel 1.4 Seien $-\pi \leq a \leq b \leq \pi$, und sei f diejenige 2π-periodische Funktion, welche auf dem Intervall $[-\pi, \pi[$ mit der Indikatorfunktion $\mathbf{1}_{[a,b[}$ des Intervalls $[a, b[$ übereinstimmt. Oft schreibt man dafür etwas salopp wieder $\mathbf{1}_{[a,b[}$. Dann gilt für den $k-$ten Fourierkoeffizienten

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b 1 e^{-ikx} \, dx,$$

also

$$\hat{f}(k) = \begin{cases} \frac{b-a}{2\pi}, & \text{falls } \quad k = 0, \\ \frac{i}{2\pi k}(e^{-ibk} - e^{-iak}), & \text{falls } k \neq 0. \end{cases} \tag{1.16}$$

Insbesondere gilt für $0 < a < \pi$

$$\widehat{\mathbf{1}_{[-a,a]}}(k) = \begin{cases} a/\pi, & \text{falls } k = 0, \\ \frac{\sin ak}{\pi k}, & \text{falls } k \neq 0. \end{cases} \tag{1.17}$$

Im letzten Falle ist $\hat{f}(k) = \hat{f}(-k)$, so daß die Fourierreihe hier eine reine Cosinusreihe

$$\mathbf{1}_{[-a,a]}(x) \sim \frac{a}{\pi} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\sin am}{m} \cos mx, \quad -\pi \leq x < \pi.$$

ist.
Da hier die Funktion f gerade ist, folgt dies auch sofort aus den obigen Bemerkungen und (1.15).

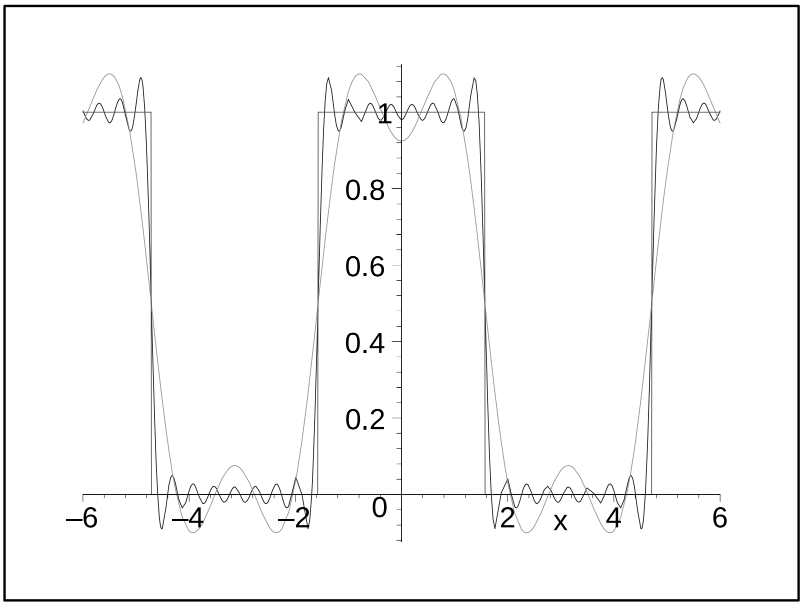

Abbildung 1.1: Graphen von f, $S_3 f$ und $S_{16} f$ für $a = \pi/2$

Bereits im 18. Jahrhundert hatten u.a. Bernoulli, Euler und Lagrange „experimentell“ beobachtet, daß für gewisse einfache Funktionen die (damals natürlich noch nicht so benannte) Fourierreihe von f tatsächlich gegen f konvergiert. Fourier behauptete später, daß dies i.w. immer so sei, was, wie bereits gesagt, eine zeitlang ernsthaft angezweifelt wurde.
Nachdem mehrere Mathematiker (u.a. auch Cauchy) mehr oder weniger falsche „Konvergenzbeweise“ für die Fourierreihenentwicklung geliefert hatten, gelang es

Dirichlet als erstem, einen rigorosen Konvergenzbeweis unter recht allgemeinen Bedingungen an f zu geben. Seitdem hat sich die Frage der Konvergenz Fourierscher Reihen als Quelle für unzählige bedeutende Entwicklungen in der Analysis erwiesen. Ich möchte in diesem einleitenden Kapitel noch nicht auf die Konvergenzfrage eingehen, zumal sich diese technisch leichter im Rahmen der Theorie der Fourierintegrale auf dem $\mathbb{R}^n$ verstehen läßt, welche wir im nachfolgenden Kapitel behandeln werden. Zumindest für lokal quadratintegrierbare 2π-periodische Funktionen f läßt sich jedoch relativ leicht plausibel machen, daß die Fourierreihe in gewissem Sinne gegen f konvergieren sollte:
Wir hatten bereits gesehen, daß die Charaktere $\{e_k\}_k$ ein Orthonormalsystem im Raum L^2 der über $[0, 2\pi[$ quadratintegrierbaren 2π-periodischen Funktionen bilden. Angenommen wir könnten zeigen, daß dieses System vollständig ist, d.h. eine Hilbertraumbasis von L^2 (versehen mit dem Skalarprodukt aus Bemerkung 1.2) bildet. Dies ist nicht sehr schwer nachzuweisen, z.B. mit Hilfe des Approximationssatzes von Stone und Weierstraß. Für einen elementaren Beweis siehe z.B. auch [1]. Dann zeigt die Theorie der Hilberträume, daß die Fourierreihe von f, zumindest im Sinne der Norm auf L^2, d.h. der L^2-Norm $\|f\|_2 := (f, f)^{1/2} = (\oint |f(x)|^2\, dx)^{1/2}$, gegen f konvergiert, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n f - f\|_2 = 0. \tag{1.18}$$

Ferner gilt die "Plancherel-Identität"

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2. \tag{1.19}$$

Wir werden später auf diese Eigenschaften zurückkommen und alternative Beweise geben.

Kapitel 2

Fouriertransformation und Faltung auf dem $\mathbb{R}^n$

2.1 Elementare Eigenschaften der Fouriertransformation

Ähnlich wie für 2π-periodische Funktionen auf $\mathbb{R}$ läßt sich auch für Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ eine Fouriertransformation definieren.
Es bezeichne D_j den Differentialoperator

$$D_j := \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

und

$$D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n.$$

Für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ bildet der **Charakter** e_ξ, gegeben durch

$$e_\xi(x) := e^{i\xi\cdot x} = \exp[i(\xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n)], \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

eine simultane Eigenfunktion für alle Differentialoperatoren D^α, denn

$$D^\alpha e_\xi = \xi^\alpha e_\xi. \tag{2.1}$$

Ferner gilt

$$e_\xi(x+y) = e_\xi(x)e_\xi(y), \tag{2.2}$$

d.h. jedes e_ξ ist ein stetiger Homomorphismus der additiven Gruppe $\mathbb{R}^n$ in die multiplikative Gruppe $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ aller komplexen Zahlen vom Betrag 1.

Für $1 \leq p \leq \infty$ bezeichne $L^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ wie üblich den Lebesgueschen L^p-Raum.

Zur Erinnerung: Eine Lebesgue-meßbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ liegt in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, falls ihre L^p-Halbnorm $\|f\|_p$ endlich ist. Letztere ist gegeben durch

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p},$$

falls $1 \leq p < \infty$, und $\|f\|_\infty$ ist das wesentliche Supremum von $|f|$. $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, versehen mit der L^p-Norm, bildet einen halbnormierten Vektorraum über $\mathbb{C}$. Bezeichnen wir mit $\mathcal{N}$ den Unterraum aller Funktionen f, welche im Lebesgueschen Sinne fast überall (kurz: f.ü.) verschwinden, so wird der Quotientenraum $L^p(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)/\mathcal{N}$, versehen mit der induzierten L^p-Norm $\|\cdot\|_p$, zu einem Banachraum. Wie üblich werden wir stets Funktionen $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ mit ihren Äquivalenzklassen $[f] := f + \mathcal{N} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ identifizieren, falls nicht ausdrücklich anderes erwähnt wird. Es sei dem Leser überlassen zu prüfen, daß die jeweiligen Definitionen bzw. Aussagen über $\mathcal{L}^p$-Funktionen nicht von der Wahl des Repräsentanten aus $[f]$ abhängen!
Mit $GL(n, \mathbb{R})$ bezeichnen wir die Gruppe aller invertierbaren linearen Endomorphismen des $\mathbb{R}^n$.

Definition. Die **Fouriertransformierte** einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist die durch

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx = \int f \overline{e}_\xi dx,$$

$\xi \in \mathbb{R}^n$, definierte Funktion $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$.
Wir definieren für $y \in \mathbb{R}^n$ den **Translationsoperator** λ_y durch

$$(\lambda_y f)(x) := f(x - y), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Ferner setzen wir

$$f^*(x) := \overline{f(-x)}, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Satz 2.1 *(a) Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist die Fouriertransformierte $\hat{f}$ stetig.*
(b) Die Fouriertransformation $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$ ist ein stetiger linearer Operator

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n),$$

und es gilt

$$\|\mathcal{F}f\|_\infty \leq \|f\|_1 \qquad \text{für alle } f \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

(c) Seien $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $y \in \mathbb{R}^n$ und $A \in GL(n, \mathbb{R})$. Dann gilt:

(i) $(\lambda_y f)^\wedge = e_{-y}\hat{f}$*;*

(ii) $(e_y f)^\wedge = \lambda_y \hat{f}$*;*

(iii) $(f \circ A)^\wedge = \frac{1}{|\det A|}\hat{f} \circ {}^t A^{-1}$.

(iv) $\widehat{f^*} = \overline{\hat{f}}$.

Beweis. (a) folgt aus dem Satz über stetige Abhängigkeit parameterabhängiger Integrale, und (b) ist offensichtlich, da

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \int |f(x)e^{-i\xi\cdot x}|\, dx = \|f\|_1.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}
(\lambda_y f)^\wedge(\xi) &= \int f(x-y)e^{-i\xi\cdot x}dx = \int f(x)e^{-i\xi\cdot(x+y)}dx \\
&= e^{-i\xi\cdot y}\int f(x)e^{-i\xi\cdot x}dx = e^{-i\xi\cdot y}\hat{f}(\xi), \\
(e_y f)^\wedge(\xi) &= \int f(x)e^{iy\cdot x}e^{-i\xi\cdot x}dx = \hat{f}(\xi - y),
\end{aligned}$$

womit (c)(i), (ii) folgen. Schließlich gilt nach der Transformationsformel

$$\begin{aligned}
(f \circ A)^\wedge(\xi) &= \int f(Ax)e^{-i\xi\cdot x}dx = \int f(x)e^{-i\xi\cdot(A^{-1}x)}|\det A^{-1}|dx \\
&= \frac{1}{|\det A|}\int f(x)e^{-i({}^tA^{-1}\xi)\cdot x}dx = \frac{1}{|\det A|}\hat{f}({}^tA^{-1}\xi),
\end{aligned}$$

und es ist

$$\begin{aligned}
\widehat{f^*}(\xi) &= \int \overline{f(-x)}e^{-i\xi\cdot x}dx = \int \overline{f}(x)e^{i\xi\cdot x}dx \\
&= \left(\int f(x)e^{-i\xi\cdot x}\,dx\right)^- = \overline{\hat{f}(\xi)}
\end{aligned}$$

Q.E.D.

2.2 Die Faltung

Wir wollen im folgenden unter einer meßbaren (bzw. integrierbaren) Funktion stets eine Lebesgue-meßbare (bzw. integrierbare) Funktion verstehen, falls nicht ausdrücklich anderes gesagt wird.

Definition Seien f, g meßbare Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$. Ist $x \in \mathbb{R}^n$ so, daß

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)|\, dy < \infty,$$

so setzen wir

$$f * g(x) := \int f(y)g(x-y)\, dy,$$

und bezeichnen $f*g(x)$ als die **Faltung von** f **mit** g (im Punkte x). Die Substitution $y = x - t$ liefert

$$f * g(x) = \int f(x-t)g(t)\, dt = g * f(x).$$

Insbesondere ist die Faltung kommutativ.
Nach der Hölderschen Ungleichung gilt

$$\begin{aligned}\int |f(y)g(x-y)|\, dy &\leq \left(\int |f(y)|^p\, dy\right)^{1/p} \left(\int |g(x-y)|^{p'}\, dy\right)^{1/p'}, \\ &= \left(\int |f(y)|^p\, dy\right)^{1/p} \left(\int |g(y)|^{p'}\, dy\right)^{1/p'},\end{aligned}$$

falls p und p' **konjugierte Exponenten** sind, d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ und $1 < p, p' < \infty$. Insbesondere ist $f * g(x)$ definiert für jedes $x \in \mathbb{R}^n$, falls $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, und es gilt dann

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}. \tag{2.3}$$

Dies bleibt offenbar auch gültig, falls $p = 1$, $p' = \infty$ bzw. $p = \infty$, $p' = 1$.

Theorem 2.2 *(i) Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $f*g(x)$ definiert für fast alle (kurz: f.a.) $x \in \mathbb{R}^n$, und $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Ferner gilt*

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\, \|g\|_1. \tag{2.4}$$

(ii) Für $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}(f * g) * h &= f * (g * h), \\ (\alpha f + \beta g) * h &= \alpha(f * h) + \beta(g * h), \\ (f * g)^* &= g^* * f^* = f^* * g^*, \\ (\alpha f + \beta g)^* &= \overline{\alpha} f^* + \overline{\beta} g^*, \\ \|f^*\|_1 &= \|f\|_1,\end{aligned}$$

d.h. durch die Faltung wird auf $L^1(\mathbb{R}^n)$ ein assoziatives, kommutatives Produkt definiert, und durch $f \mapsto f^*$ eine isometrische Involution. Damit besitzt die sogenannte **Gruppenalgebra** $(L^1(\mathbb{R}^n), +, *, {}^*; \|\cdot\|_1)$ *des $\mathbb{R}^n$ also die Struktur einer involutiven, kommutativen Banachalgebra.*

Beweis. (i) Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Dann sind die Funktionen $(x, y) \mapsto f(y)$ und $(x, y) \mapsto g(x-y)$ meßbar auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, und folglich auch ihr Produkt

$$F(x, y) := f(y)g(x-y).$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} \int \Big(\int |F(x,y)|\, dx \Big) dy &= \int |f(y)| \Big(\int |g(x-y)|\, dx \Big) dy \\ &= \int |f(y)| \int |g(x)|\, dx dy = \|f\|_1 \, \|g\|_1, \end{aligned} \tag{2.5}$$

so daß nach dem Satz von Tonelli F integrierbar ist. Nach Fubini ist daher die Abbildung $y \mapsto F(x, y) = f(y)g(x-y)$ für fast alle x integrierbar, d.h. $f * g$ existiert fast überall, und die Abbildung $x \mapsto \int F(x, y)\, dy = f * g(x)$ ist integrierbar über den $\mathbb{R}^n$. Ferner gilt nach (2.5) und Fubini

$$\begin{aligned} \|f * g\|_1 &= \int |f * g(x)|\, dx = \int \left| \int F(x,y)\, dy \right| dx \\ &\leq \int \int |F(x,y)|\, dy dx = \|f\|_1 \, \|g\|_1. \end{aligned}$$

(ii) kann mit ähnlichen Argumenten bewiesen werden und sei als Übung überlassen.
Q.E.D.

Die Bedeutung des Faltungsproduktes im Zusammenhang mit der Fouriertransformation wird durch folgenden Satz klar.

Satz 2.3 *Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\, \hat{g}.$$

Beweis. Es gilt nach Fubini und wegen der Translationsinvarianz des Lebesguemaßes

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\xi) &= \int \Big(\int f(y)g(x-y)\, dy \Big) e^{-i\xi \cdot x} dx \\ &= \int \int f(y) e^{-i\xi \cdot y} g(x-y) e^{-i\xi \cdot (x-y)} dy dx \\ &= \int f(y) e^{-i\xi \cdot y} \Big(\int g(x-y) e^{-i\xi \cdot (x-y)} dx \Big)\, dy \\ &= \int f(y) e^{-i\xi \cdot y} \Big(\int g(x) e^{-i\xi \cdot x} dx \Big)\, dy \\ &= \hat{g}(\xi) \hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Der folgende Satz zeigt, daß sich beim Falten die Glattheitseigenschaft eines der beiden Faktoren auf das gesamte Produkt vererbt. Wir benötigen noch ein wenig Notation.
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Mit $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ bezeichnen wir den Raum aller (Äquivalenzklassen von) meßbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$ mit der folgenden Eigenschaft: Zu jedem $x \in \Omega$ gibt es eine Umgebung U_x von x in Ω, auf der f integrierbar ist. Offenbar ist dies äquivalent dazu, daß f über jede kompakte Teilmenge von Ω integrierbar ist. Beachte, daß nach der Hölderschen Ungleichung

$$L^p(\Omega) \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega), \tag{2.6}$$

für $1 \leq p \leq \infty$.
Ferner bezeichnen wir für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mit $C^k_0(\Omega)$ den Raum aller $k-$mal stetig differenzierbaren Funktionen auf Ω mit kompaktem Täger.

Bemerkung 2.4 Die Räume $C^k_0(\mathbb{R}^n)$ sind nicht-trivial. Z.B. liegt die Funktion

$$\varphi(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

deren Träger die abgeschlossene Einheitskugel $\operatorname{supp} \varphi = \overline{B_1}(0)$ ist, in $C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$.

Sollte dies noch nicht bekannt sein, so sei der Beweis als Übung überlassen.

Satz 2.5 *Seien $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $g \in C^k_0(\mathbb{R}^n)$ $(k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$.*
(i) Dann ist $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$, und es gilt

$$D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g, \quad |\alpha| \leq k. \tag{2.7}$$

(ii) Ist A eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ derart, daß f außerhalb von A f.ü. verschwindet, so gilt

$$\operatorname{supp} f * g \subset A + \operatorname{supp} g.$$

Insbesondere gilt

$$\operatorname{supp} f * g \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g,$$

falls auch f in $C_0(\mathbb{R}^n)$ liegt.

Beweis. (i) Wir dürfen o.B.d.A. $k \in \mathbb{N}$ voraussetzen. Sei $K = \operatorname{supp} g$ der kompakte Träger von g, und sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fest. Sei $\varepsilon > 0$, und sei $x \in B_\varepsilon(x_0) =: B$. Dann ist $g(x - y) = 0$, es sei denn, $x - y \in K$, d.h. $y \in x - K \subset B - K$. Somit gilt

$$f * g(x) = \int\limits_{B-K} f(y) g(x - y)\, dy.$$

Ist nun zunächst $k = 0$, so ist $\|g\|_\infty < \infty$, und

$$|f(y)g(x-y)| \leq \|g\|_\infty(\mathbf{1}_{B-K}|f|)(y)$$

für alle $x \in B$. Die rechte Seite bildet also eine von x unabhängige integrierbare Majorante des Integranden $f(y)g(x-y)$, welcher für jedes feste y stetig in x ist. Nach dem Satz über stetige Abhängigkeit parameterabhängiger Integrale ist somit $f * g$ stetig im Punkt x_0. Damit ist $f * g$ stetig.
Ganz ähnlich erhält man die Aussage des Satzes sowie Formel (2.7) per Induktion nach k, indem man den Satz über die Differenzierbarkeit parameterabhängiger Integrale anwendet.
(ii) Sei $f*g(x) \neq 0$. Dann gibt es mindestens ein $y \in A$ mit $f(y)g(x-y) \neq 0$ (wieso?). Für dieses gilt dann $x - y \in \operatorname{supp} g$, und somit $x \in y + \operatorname{supp} g \subset A + \operatorname{supp} g$. Die Behauptung folgt, da $A + \operatorname{supp} g$ abgeschlossen ist.

Q.E.D.

2.3 Approximierende Einsen und Regularisierung von Funktionen in L^p

Wir wollen nun zeigen, wie man mittels Faltung eine gegebene Funktion „glätten" kann, d.h. beliebig genau durch C^∞-Funktionen approximieren kann. Dies soll insbesondere bzgl. der L^p-Normen untersucht werden. Dazu benötigen wir noch einige Hilfsmittel aus der Theorie der L^p-Räume.

Zur Erinnerung: Unter einer **Treppenfunktion** versteht man eine endliche Linearkombination charakteristischer Funktionen von Quadern, d.h. eine Funktion der Gestalt $\sum a_j \mathbf{1}_{Q_j}$, mit Koeffizienten $a_j \in \mathbb{C}$ und Quadern $Q_j \subset \mathbb{R}^n$. Dabei sei ein Quader Q per definitionem das direkte Produkt $Q = I_1 \times \cdots \times I_n$ beschränkter Intervalle $I_1, \ldots, I_n$.

Lemma 2.6 (Stetigkeit der Translation in L^p) *Sei $1 \leq p < \infty$, und sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$\|\lambda_y f\|_p = \|f\|_p \tag{2.8}$$

für alle $y \in \mathbb{R}^n$, sowie

$$\lim_{y \to 0} \|\lambda_y f - f\|_p = 0. \tag{2.9}$$

Beweis. Die Identität $\|\lambda_y f\|_p = \|f\|_p$ folgt aus der Translationsinvarianz des Lebesguemaßes.
Um die Stetigkeit der Translation zu beweisen, nutzen wir aus, daß für $1 \leq p < \infty$ der Raum $\mathcal{T}$ aller Treppenfunktionen dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ liegt.

Für $p = 1$ ist dies klar aufgrund der üblichen Definition von $L^1(\mathbb{R}^n)$. Für $1 < p < \infty$ sei dies als Übung überlassen.
Für die Indikatorfunktion eines Quaders ist (2.9) aber klar, und damit auch für jede Treppenfunktion. Sei nun $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ beliebig, und sei $\varepsilon > 0$. Wähle dann eine Treppenfunktion φ mit $\|f - \varphi\|_p < \varepsilon/4$. Zu φ wähle ein $\delta > 0$ so, daß $\|\lambda_y\varphi - \varphi\|_p < \varepsilon/2$ für alle y mit $|y| < \delta$. Für solche y gilt dann

$$\begin{aligned} \|\lambda_y f - f\|_p &= \|\lambda_y(f-\varphi) + \lambda_y\varphi - \varphi + \varphi - f\|_p \\ &\leq \|\lambda_y(f-\varphi)\|_p + \|\lambda_y\varphi - \varphi\|_p + \|f-\varphi\|_p \\ &= 2\|f-\varphi\|_p + \|\lambda_y\varphi - \varphi\|_p \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Das folgende Lemma ist ein Spezialfall eines allgemeineren Ergebnisses aus der Funktionalanalysis. Wir geben hier einen direkten Beweis.

Lemma 2.7 („Dualisierungsprinzip“) *Sei $1 \leq p \leq \infty$, und sei p' der zu p konjugierte Exponent, d.h. $1/p + 1/p' = 1$. Dann gilt für jedes $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$*

$$\|f\|_p = \sup_{g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n) : \|g\|_{p'} = 1} \left| \int f(x)g(x)\,dx \right|. \tag{2.10}$$

Beweis. Sei $S^{p'} := \{g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n) : \|g\|_{p'} = 1\}$. Für $g \in S^{p'}$ gilt wegen der Hölderschen Ungleichung

$$\left| \int f(x)g(x)dx \right| \leq \|f\|_p\|g\|_{p'} = \|f\|_p,$$

so daß $\|f\|_p$ die rechte Seite von (2.10) majorisiert.
Um die umgekehrte Ungleichung zu beweisen, sei o.B.d.A. $f \neq 0$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Betrachten wir f als einen Repräsentanten in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, so setzen wir, falls $p < \infty$,

$$g(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } f(x) = 0, \\ \frac{\overline{f(x)}}{|f(x)|}|f(x)|^{p-1}, & \text{falls } f(x) \neq 0. \end{cases}$$

Dann ist g meßbar, und es gilt wegen $p' = p/(p-1)$:

$$\int |g(x)|^{p'}dx = \int |f(x)|^p dx.$$

Nehmen wir o.B.d.A. an, daß $\|f\|_p = 1$ ist, so ist also $g \in S^{p'}$, und es gilt

$$\int f(x)g(x)dx = \int |f(x)|^p dx = \|f\|_p^p = 1,$$

d.h. $\|f\|_p$ ist durch die rechte Seite von (2.10) beschränkt.
Somit gilt (2.10) für $1 \le p < \infty$.
Sei nun $p = \infty$, und sei o.B.d.A. $\|f\|_\infty > 0$. Ist $0 < \varepsilon < \|f\|_\infty$, so gibt es eine meßbare Menge positiven Maßes $A \subset \mathbb{R}^n$ so, daß $|f(x)| \ge \|f\|_\infty - \varepsilon$ für alle $x \in A$.
Setze dann

$$g(x) := \begin{cases} \frac{1}{|A|} \frac{\overline{f(x)}}{|f(x)|} & \text{, falls } x \in A, \\ 0 & \text{, falls } x \in A^c. \end{cases}$$

Dann ist $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\|g\|_1 = 1$, und

$$\int fg\,dx = \frac{1}{|A|} \int_A |f(x)| dx \ge \|f\|_\infty - \varepsilon.$$

Damit folgt (2.10) auch für $p = \infty$.

Q.E.D.

Bemerkungen 2.8 (a) In (2.10) kann man die Bedingung $\|g\|_{p'} = 1$ offenbar auch ersetzen durch $\|g\|_{p'} \le 1$. Dies stellt sich gelegentlich als hilfreich heraus.
(b) Ist f meßbar, und gilt

$$\sup_{\|g\|_{p'} \le 1} \int |f(x)g(x)|\,dx < \infty,$$

wobei hier das Supremum über alle meßbaren beschränkten Funktionen g mit beschränktem Träger und $\|g\|_{p'} \le 1$ gebildet werde, so folgert man ähnlich, daß dann bereits f in $L^p(\mathbb{R}^n)$ liegt.

Man ersetze dazu die Funktion g aus dem vorangehenden Beweis durch $g_N := \frac{\widetilde{g_N}}{\|\widetilde{g_N}\|_{p'}}$, mit

$$\widetilde{g_N}(x) := \begin{cases} g(x), & \text{falls } |x| \le N \text{ und } |g(x)| \le N, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und lasse N gegen Unendlich streben. Die Behauptung folgt dann mit dem Satz von der monotonen Konvergenz.

Satz 2.9 (Minkowskische Integralungleichung) *Seien $X := \mathbb{R}^m, Y := \mathbb{R}^n$, und sei $F : X \times Y \to \mathbb{C}$ meßbar. Ferner sei $1 \le p \le \infty$. Dann ist auch die Abbildung $Y \ni y \mapsto \|F(\cdot, y)\|_p$ meßbar.*
Ist nun $\int_Y \|F(\cdot, y)\|_p\,dy < \infty$, so ist für f.a. $x \in X$ die Funktion $y \mapsto F(x, y)$ integrierbar über Y. Ferner ist die Funktion $X \ni x \mapsto \int_Y F(x, y)\,dy$ meßbar, und es gilt

$$\Big\| \int_Y F(\cdot, y) dy \Big\|_p \le \int_Y \|F(\cdot, y)\|_p\,dy. \tag{2.11}$$

Beweis. Denkt man sich das Integral $\int F(\cdot, y)\, dy$ durch Riemannsummen approximiert, so ist (2.11) aufgrund der Dreiecksungleichung für Summen plausibel.

In der Tat kann man F als eine Funktion f von $L^1(Y)$ mit Werten im Banachraum $L^p(X)$ auffassen, indem man setzt $f(y)(x) := F(x, y)$. Das Integral $\int\limits_Y F(\cdot, y)\, dy$ läßt sich dann als vektorwertiges „Bochner-Integral" $\int\limits_Y f(y) dy$, mit Werten im Banachraum $L^p(X)$, interpretieren, und (2.11) ist nichts anderes als die Dreiecksgleichung für Banachraum-wertige Integrale.

Für einen elementareren Beweis verwenden wir das Dualisierungsprinzip. Wir betrachten erneut nur den Fall $1 \leq p < \infty$ und überlassen den Fall $p = \infty$ als Übung. Zunächst ist nach dem Satz von Tonelli die Abbildung $y \mapsto \int |F(x, y)|^p dx$ und damit auch $y \mapsto \|F(\cdot, y)\|_p$ meßbar, da $(x, y) \mapsto |F(x, y)|^p$ meßbar ist. Ist nun $\int \|F(\cdot, y)\|_p\, dy < \infty$, so sei $g \in S^{p'} := \{\varphi \in L^{p'}(X) : \|\varphi\|_{p'} = 1\}$. Dann gilt nach der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned}\int\limits_Y \int\limits_X |F(x, y)|\; |g(x)|\, dxdy \;&=\; \int\limits_Y \Big(\int\limits_X |g(x)| |F(x, y)| dx \Big) dy \\ &\leq \int\limits_Y \|g\|_{p'} \|F(\cdot, y)\|_p\, dy = \int\limits_Y \|F(\cdot, y)\|_p\, dy < \infty.\end{aligned}$$

Somit ist die Funktion $(x, y) \mapsto g(x)F(x, y)$ integrierbar, und nach Fubini folgt ganz analog

$$\begin{aligned}&\left| \int\limits_X \Big(\int\limits_Y F(x, y)\, dy \Big) g(x)\, dx \right| = \left| \int\limits_Y \Big(\int\limits_X g(x)F(x, y)\, dx \Big)\, dy \right| \\ &\leq \int\limits_Y \int\limits_X |g(x)|\; |F(x, y)| dxdy \leq \int\limits_Y \|F(\cdot, y)\|_p\, dy.\end{aligned}$$

Die Ungleichung (2.11) folgt nun mittels (2.10) und Bemerkung 2.8.

Q.E.D.

Korollar 2.10 (Youngsche Ungleichung) *Seien $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$. Dann ist $g * f$ f.ü. definiert und liegt in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Ferner gilt*

$$\|g * f\|_p \leq \|g\|_1 \|f\|_p. \tag{2.12}$$

Beweis. Wende die Minkowskische Integralungleichung auf die Funktion $F(x, y) := g(y)f(x - y)$ an und benutze (2.8).

Q.E.D.

Bemerkung 2.11 Lemma 2.7 und Satz 2.9 gelten analog auch für beliebige σ-endliche Maßräume $(X, d\mu)$ und $(Y, d\nu)$, bei fast wortgleichen Beweisen.

Definition. Unter einer **approximierenden Eins** verstehen wir eine Familie $\{\varphi_\varepsilon\}_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ integrierbarer Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften: Es gebe ein $C \geq 0$ so, daß gilt

(i)
$$\int \varphi_\varepsilon(x)\, dx = 1 \quad \text{für alle } \ \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[;$$

(ii)
$$\int |\varphi_\varepsilon(x)|\, dx \leq C \quad \text{für alle } \ \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[;$$

(iii)
$$\text{für jedes } \delta > 0 \text{ ist } \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|x|>\delta} |\varphi_\varepsilon(x)|\, dx = 0.$$

.

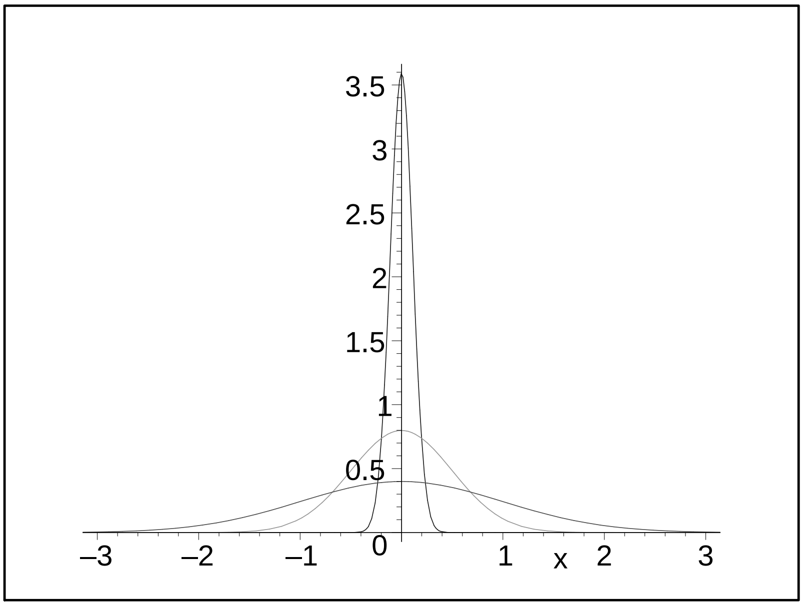

Abbildung 2.1: Dirac-Folge

Beispiel 2.12 *Sei* $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *mit* $\int \varphi(x)\, dx = 1$, *und setze*

$$\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \ \varepsilon > 0.$$

Dann ist $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ *eine approximierende Eins, denn:*

(i) folgt sofort aus der Transformationsformel. Ebenso ist

$$\int |\varphi_\varepsilon(x)|\, dx = \varepsilon^{-n} \int \left|\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right| dx = \int |\varphi(x)| dx$$

für jedes $\varepsilon > 0$, d.h. es gilt auch (ii). Und ist $\delta > 0$, so ist ganz analog

$$\int\limits_{|x|>\delta} |\varphi_\varepsilon(x)|\, dx = \int\limits_{|y|>\delta/\varepsilon} |\varphi(y)|\, dy,$$

so daß (iii) aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt.
Ist $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, so bezeichnet man die so konstruierte approximierende Eins oft auch als **Dirac-Familie** (und für jede fallende Nullfolge $\varepsilon_j \searrow 0$ die Folge $\{\varphi_j\}_j := \{\varphi_{\varepsilon_j}\}_j$ als **Dirac-Folge**).

Theorem 2.13 *Sei $\{\varphi_\varepsilon\}_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ eine approximierende Eins.*

(a) Ist $f \in L^p(\mathbb{R}^n),\ 1 \le p < \infty$, so gilt

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|f * \varphi_\varepsilon - f\|_p = 0.$$

(b) Sei $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ gleichmäßig stetig in den Punkten einer Menge $V \subset \mathbb{R}^n$, d.h. es gebe zu jedem $\kappa > 0$ ein $\delta > 0$ so, daß $|f(x) - f(z)| \le \kappa$ für alle $x \in V$ und $z \in \mathbb{R}^n$ mit $|x - z| \le \delta$. Dann konvergiert $f * \varphi_\varepsilon$ für $\varepsilon \to 0$ auf V gleichmäßig gegen f.

Beweis. (a) Sei $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, und sei $\kappa > 0$. Wähle gemäß (2.9) ein $\delta > 0$ so, daß

$$\|\lambda_y f - f\|_p < \kappa \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^n \text{ mit } |y| < \delta, \tag{2.13}$$

und beobachte, daß wegen der Eigenschaft (i) einer approximierenden Eins

$$(f * \varphi_\varepsilon - f)(x) = \int \varphi_\varepsilon(y)[f(x-y) - f(x)]\, dy.$$

Mit der Minkowskischen Integralungleichung folgt daher

$$\begin{aligned} \|f * \varphi_\varepsilon - f\|_p &\le \int |\varphi_\varepsilon(y)|\, \|\lambda_y f - f\|_p\, dy \\ &= I + II, \end{aligned}$$

mit

$$I := \int\limits_{|y|<\delta} |\varphi_\varepsilon(y)|\, \|\lambda_y f - f\|_p\, dy,$$

$$II := \int\limits_{|y|>\delta} |\varphi_\varepsilon(y)|\, \|\lambda_y f - f\|_p \, dy.$$

Wegen (2.13) und der Eigenschaft (ii) einer approximierenden Eins gilt nun für jedes $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$

$$I \le \int\limits_{|y|<\delta} |\varphi_\varepsilon(y)|\kappa \, dy \le \kappa \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi_\varepsilon(y)| dy \le C\kappa.$$

Ferner ist

$$II \le \int\limits_{|y|>\delta} |\varphi_\varepsilon(y)|\, 2\|f\|_p \, dy.$$

Aufgrund der Eigenschaft (iii) einer approximierenden Eins gibt es daher ein $\varepsilon_1 > 0$ so, daß $II < \kappa$ ist für alle ε mit $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$. Für solche ε folgt also insgesamt $\|f * \varphi_\varepsilon - f\|_p \le (C+1)\kappa$.

(b) Sei $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ gleichmäßig stetig in den Punkten aus V, und sei $\kappa > 0$. Dann gibt es per definitionem ein $\delta > 0$ so, daß folgendes Analogon zu (2.13) gilt:

$$\|\lambda_y f - f\|_{\infty,V} < \kappa \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^n \text{ mit } |y| < \delta.$$

Hier bezeichne $\|g\|_{\infty,V} := \sup\limits_{x\in V} |g(x)|$.

Die Argumente aus Teil (a) übertragen sich nun direkt, wenn man die L^p-Norm $\|\cdot\|_p$ durch $\|\cdot\|_{\infty,V}$ ersetzt.

Q.E.D.

Korollar 2.14 *Der Raum $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ liegt dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$, für $1 \le p < \infty$.*

Beweis. Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, und sei $f_N := \mathbf{1}_{B_N(0)} f$. Nach dem Satz von Lebesgue gilt dann $f = \lim\limits_{N\to\infty} f_N$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es also ein $N \in \mathbb{N}$ so, daß $\|f - f_N\|_p < \varepsilon/2$. Sei ferner $\{\varphi_j\}_j$ eine Dirac-Folge. Nach Theorem 2.13 gibt es ein j so, daß $\|f_N - f_N * \varphi_j\|_p < \varepsilon/2$. Somit ist $\|f - f_N * \varphi_j\|_p < \varepsilon$. Ferner ist nach Satz 2.5 $f_N * \varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Q.E.D.

2.4 Glatte Teilungen der Eins

Wir beweisen hier noch ein Ergebnis, welches später benötigt werden wird.

Lemma 2.15 *Sei K eine kompakte Teilmenge der offenen Teilmenge Ω des $\mathbb{R}^n$. Dann existiert eine Funktion $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ so, daß $0 \le \psi \le 1$ und $\psi \equiv 1$ auf einer Umgebung von K.*

Beweis. Wähle $0 < \varepsilon < \delta < \varepsilon + \delta < \operatorname{dist}(K, \Omega^c)$, und setze $f := \mathbf{1}_{K_\delta}$, wobei K_δ die δ-**Aufdickung** $K_\delta := \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, K) \le \delta\} = K + \overline{B}_\delta(0)$ der Menge K bezeichne. Ferner sei $\{\varphi_{\varepsilon'}\}_{\varepsilon'>0}$ eine Dirac-Familie nicht-negativer Funktionen mit $\operatorname{supp}\varphi_{\varepsilon'} \subset \overline{B}_{\varepsilon'}(0)$. Dann ist nach Satz 2.5 $\tilde{\psi} := f * \varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, und $\operatorname{supp}\tilde{\psi} \subset K_\delta + \overline{B}_\varepsilon(0) = K_{\delta+\varepsilon} \subset \Omega$. Nun ist für $x \in K_{\delta-\varepsilon}$ und $y \in \overline{B}_\varepsilon(0)$ offenbar $x - y \in K_\delta$, also $f(x-y) = 1$, und somit

$$\tilde{\psi}(x) = \int f(x-y)\varphi_\varepsilon(y)\,dy = \int \varphi_\varepsilon(y)dy = 1,$$

d.h. $\tilde{\psi} \equiv 1$ auf der Umgebung $K_{\delta-\varepsilon}$ von K. Die Funktion $\psi := \tilde{\psi}|_\Omega$ besitzt folglich die gewünschten Eigenschaften.

Q.E.D.

Bemerkung 2.16 Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, und ist $\varphi \subset C_0^k(\Omega)$, so liegt die **triviale Fortsetzung**

$$\tilde{\varphi}(x) := \begin{cases} \varphi(x), & \text{falls } x \in \Omega, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \end{cases}$$

offenbar in $C_0^k(\mathbb{R}^n)$. Umgekehrt liegt für jedes $\psi \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}\psi \subset \Omega$ die Einschränkung $\psi|_\Omega$ in $C_0^k(\Omega)$, und es ist $\widetilde{\psi|_\Omega} = \psi$. Wir werden daher im folgenden oft ψ und $\psi|_\Omega$ identifizieren, d.h. den Raum $C_0^k(\Omega)$ mit dem Teilraum $\{\psi \in C_0^k(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp}\psi \subset \Omega\}$ von $C_0^k(\mathbb{R}^n)$ identifizieren.

MitA^0 bezeichnen wir wie üblich das Innere einer Teilmenge A eines topologischen Raumes.

Lemma 2.17 (Existenz glatter Teilungen der Eins) *Seien $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sowie K ein Kompaktum mit $K \subset \bigcup_{j=1}^k \Omega_j$.*

(a) Dann existieren Kompakta $K_j \subset \Omega_j$ so, daß $K \subset \bigcup_{j=1}^k K_j$. Es darf ferner angenommen werden, daß $K_j = \overline{K_j^0}$.

(b) Es existieren Funktionen $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$ so, daß $\varphi_j \ge 0$, $\sum_{j=1}^k \varphi_j \le 1$ und $\sum_{j=1}^k \varphi_j \equiv 1$ auf einer Umgebung von K.

Beweis. (a) Für $\varepsilon > 0$ bezeichne Ω_j^ε die ε-**Verjüngung** $\Omega_j^\varepsilon := \{x \in \Omega_j : \operatorname{dist}(x, \Omega_j^c) > \varepsilon\}$ von Ω. Dann ist Ω_j^ε offen und $\overline{\Omega_j^\varepsilon} \subset \Omega_j$. Wir zeigen, daß für genügend kleines $\varepsilon > 0$ die Inklusion $K \subset \bigcup_{j=1}^k \Omega_j^\varepsilon$ gilt. Wählen wir dann zusätzlich $\varepsilon > 0$ so klein, daß $K_\varepsilon = K + \overline{B}_\varepsilon(0) \subset \bigcup \Omega_j$, so folgt daraus (a), mit $K_j := \overline{(K_\varepsilon)^0 \cap \Omega_j^\varepsilon}$.

Nehmen wir nämlich an, daß die Inklusion für kein $\varepsilon > 0$ gilt, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x_\varepsilon \in K \setminus \bigcup_{j=1}^{k} \Omega_j^\varepsilon$. Da K kompakt ist, besitzen die x_ε, $\varepsilon > 0$, einen Häufungspunkt $x \in K$, für $\varepsilon \to 0$. Aber dann ist $x \in K \setminus \bigcup_{j=1}^{k} \Omega_j$, im Widerspruch zu unserer Voraussetzung.
(b) Zu den Kompakta $K_j \subset \Omega_j$ aus (a) wählen wir gemäß Lemma 2.15 Funktionen $\psi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$ so, daß $0 \leq \psi_j \leq 1$ und $\psi_j \equiv 1$ auf einer Umgebung U_j von K_j.
Dann gilt offenbar $(1-\psi_1)\cdots(1-\psi_k) \equiv 0$ auf der Umgebung $U := \bigcup_{j=1}^{k} U_j$ von K, d.h. $1-(1-\psi_1)\cdots(1-\psi_k) \equiv 1$ auf U. Setzen wir

$$\varphi_1 := 1-(1-\psi_1) = \psi_1, \quad \varphi_2 := (1-\psi_1)-(1-\psi_1)(1-\psi_2) = \psi_2(1-\psi_1),$$

und allgemeiner für $j = 2, \ldots, k$

$$\varphi_j := (1-\psi_1)\cdots(1-\psi_{j-1})-(1-\psi_1)\cdots(1-\psi_j) = \psi_j(1-\psi_1)\cdots(1-\psi_{j-1}),$$

so erhalten wir durch Summation einer teleskopischen Reihe sofort

$$\sum_{j=1}^{k} \varphi_j = 1-(1-\psi_1)\cdots(1-\psi_k).$$

Insbesondere ist $\sum_{j=1}^{k} \varphi_j(x) = 1$ für $x \in U$. Ferner liegt offenbar φ_j in $C_0^\infty(\Omega_j)$, und sicherlich ist $\varphi_j \geq 0$ und $\sum_{j=1}^{k} \varphi_j \leq 1$.

Q.E.D.

2.5 Rasch fallende Funktionen und das Riemann-Lebesgue-Lemma

Satz 2.18 *Sei* $1 \leq j \leq n$.
(a) Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *stetig differenzierbar so, daß* $D_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *und verschwindet* f *im Unendlichen, so gilt*

$$\widehat{D_j f}(\xi) = \xi_j \hat{f}(\xi).$$

(b) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *so, daß die Funktion* $x_j f : x \mapsto x_j f(x)$ *in* $L^1(\mathbb{R}^n)$ *liegt. Dann ist* $\hat{f}$ *partiell nach* ξ_j *differenzierbar, und es gilt*

$$D_j \hat{f}(\xi) = -(x_j f)^\wedge(\xi).$$

Beweis. (a) Mittels partieller Integration folgt

$$\begin{aligned}\widehat{D_j f}(\xi) &= \frac{1}{i}\int \partial_{x_j} f(x) e^{-i\xi\cdot x} dx = -\frac{1}{i}\int f(x)\partial_{x_j}(e^{-i\xi\cdot x})\, dx \\ &= -\frac{1}{i}(-i\xi_j)\int f(x) e^{-i\xi\cdot x} dx = \xi_j \hat{f}(\xi).\end{aligned}$$

(b) Folgt ähnlich sofort aus dem Satz über die Differentiation parameterabhängiger Integrale und dem Satz von Fubini.

Q.E.D.

Dieser Satz legt nahe, folgenden Funktionenraum einzuführen.

Definition. Der **Schwartzraum** $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ bestehe aus allen Funktionen $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ derart, daß $x^\alpha D^\beta \varphi$ beschränkt ist für alle Multiindices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. Derartige Funktionen wollen wir auch als **Schwartzfunktionen** bezeichnen. Oftmals werden wir den Schwartzraum auch kürzer mit $\mathcal{S}$ bezeichnen.

Bemerkung 2.19 Mittels der Leibnizformel kann man zeigen, daß eine Funktion $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine Schwartzfunktion ist dann und nur dann, wenn

$$D^\alpha(x^\beta \varphi) \text{ beschränkt ist für alle } \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

Dies sei als Übung überlassen.

Offenbar bildet $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ einen $\mathbb{C}$-Vektorraum, und es ist $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Für jede „Schwartzfunktion" $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist auch

$$(1 + |\cdot|^2)^\ell D^\alpha \varphi \in \mathcal{S}, \quad \text{für alle } \ \ell \in \mathbb{N},\ \alpha \in \mathbb{N}^n,$$

d.h. es gilt insbesondere

$$|D^\alpha \varphi(x)| \leq C_\ell (1 + |x|^2)^{-\ell} \quad \text{für alle } \ \ell \in \mathbb{N}. \tag{2.14}$$

$\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ besteht also aus denjenigen C^∞-Funktionen, welche zusammen mit jeder ihrer Ableitungen von beliebiger negativer Ordnung $O(|x|^{-N})$ im Unendlichen verschwindet. Man nennt Schwartzfunktionen daher auch „rasch fallende Funktionen". Da für $\ell > n/2$ die rechte Seite von (2.14) in jedem Raum $L^p(\mathbb{R}^n)$ liegt, ist ferner für jedes $\varphi \in \mathcal{S}$

$$D^\alpha \varphi \in L^p(\mathbb{R}^n), \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{N}^n,\ p \in [1, \infty].$$

Insbesondere ist

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n). \tag{2.15}$$

Aus Satz 2.18 gewinnt man leicht per Induktion nach den Ordnungen $|\alpha|$ und $|\beta|$ von α und β sowie der Leibnizregel folgendes

Korollar 2.20 *Die Fouriertransformation läßt $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ invariant, d.h. $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Ferner gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ und $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*

$$\xi^\alpha D_\xi^\beta (\mathcal{F}\varphi)(\xi) = (-1)^{|\beta|} \mathcal{F}(D_x^\alpha (x^\beta \varphi))(\xi) \,. \tag{2.16}$$

Bemerkung 2.21 Eine für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen fundamentale Konsequenz ist die folgende:
Ist $P(D) = \sum\limits_{|\alpha| \le m} a_\alpha D^\alpha$ ein „linearer Differentialoperator“ mit konstanten Koeffizienten $a_\alpha \in \mathbb{C}$, so bezeichnet man das Polynom $P(\xi) := \sum\limits_{|\alpha| \le m} a_\alpha \xi^\alpha,\ \xi \in \mathbb{R}^n$, als sein **(vollständiges) Symbol**.
Beispielsweise ist das Symbol des **Laplace-Operators**

$$\Delta := \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

gegeben durch $P(\xi) = -|\xi|^2$.
Nach (2.16) gilt

$$(P(D)\varphi)^\wedge(\xi) = P(\xi)\hat{\varphi}(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{2.17}$$

für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
Unter der Fouriertransformation geht also der Differentialoperator $P(D)$ über in den **Multiplikationsoperator**

$$M_P : \varphi \mapsto P\varphi,\ \varphi \in \mathcal{S},$$

wobei P das Symbol von $P(D)$ ist.

Als Folge von Korollar 2.20 erhalten wir

Theorem 2.22 (Riemann-Lebesgue-Lemma) *Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so ist $\hat{f} \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$, d.h. die Fouriertransformierte einer integrierbaren Funktion ist stetig und verschwindet im Unendlichen.*

Beweis. Da $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}$ ist, liegt nach Korollar 2.14 der Raum $\mathcal{S}$ dicht in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Zu $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gibt es daher eine Folge $\{\varphi_j\}_j$ in $\mathcal{S}$ mit $\lim\limits_{j\to\infty} \|f - \varphi_j\|_1 = 0$. Nach Satz 2.1 (b) ist insbesondere $\lim\limits_{j\to\infty} \|\hat{f} - \hat{\varphi}_j\|_\infty = 0$, d.h. $\{\hat{\varphi}_j\}_j$ konvergiert gleichmäßig gegen $\hat{f}$. Da $\hat{\varphi}_j \in \mathcal{S} \subset C_\infty(\mathbb{R}^n)$ ist, ist folglich auch $\hat{f} \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Q.E.D.

Man beachte, daß der Beweis gleichzeitig die Stetigkeit der Fouriertransformierten, welche wir früher schon auf andere Art und Weise hergeleitet hatten, mitliefert.
Mit Satz 2.1, Satz 2.3 und Theorem 2.22 ergibt sich folgendes

Korollar 2.23 *Die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ ist ein stetiger, linearer Homomorphismus der involutiven Banachalgebra $(L^1(\mathbb{R}^n), +, *, ^*; \|\cdot\|_1)$ in die involutive Banachalgebra $(C_\infty(\mathbb{R}^n), +, \cdot, \overline{}; \|\cdot\|_\infty)$.*

Mittels der Fourierumkehrformel, welche wir als nächstes beweisen werden, und der Tatsache, daß $\mathcal{S}$ dicht in C_∞ liegt, folgt zudem, daß die sogenannte **Fourieralgebra**

$$A(\mathbb{R}^n) := \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}^n)) \subset C_\infty(\mathbb{R}^n)$$

dicht in $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ liegt.

2.6 Umkehrung der Fouriertransformation

Lemma 2.24 *Es bezeichne Φ_n auf $\mathbb{R}^n$ die* **Gaußfunktion**

$$\Phi_n(x) := e^{-|x|^2/2}, \; x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann liegt Φ_n in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, und es gilt

$$\hat{\Phi}_n = (2\pi)^{n/2}\Phi_n. \tag{2.18}$$

Insbesondere ist

$$1 = \Phi_n(0) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{\Phi}_n(\xi)\, d\xi. \tag{2.19}$$

Beweis. Da $|\cdot|^{2N} e^{-|\cdot|^2/2}$ für jedes $N \in \mathbb{N}$ beschränkt ist, folgt leicht, daß $\Phi_n \in \mathcal{S}_n$ ist.
Sei nun zunächst $n = 1$. $y = \Phi_1$ erfüllt die Differentialgleichung

$$y' + xy = 0. \tag{2.20}$$

Nach (2.16) gilt ferner

$$(\hat{\Phi}_1)' = iD\hat{\Phi}_1 = -i\widehat{(x\Phi_1)},$$

also mit (2.20)

$$(\hat{\Phi}_1)' = -i\widehat{(-\Phi_1')} = \widehat{(-D\Phi_1)} = -\xi\hat{\Phi}_1.$$

Somit erfüllt auch $\hat{\Phi}_1$ die Differentialgleichung (2.20), und folglich ist $(\hat{\Phi}_1/\Phi_1)' \equiv 0$, d.h. $\hat{\Phi}_1/\Phi_1$ ist konstant.
Nun ist aber $\Phi_1(0) = 1$, und

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_1(0) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \left(\int \int e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy \right)^{1/2} \\ &= \left(\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\infty} e^{-r^2/2} r \, dr d\theta \right)^{1/2} = \sqrt{2\pi}. \end{aligned}$$

Somit folgt $\hat{\Phi}_1/\Phi_1 = \frac{\sqrt{2\pi}}{1} = (2\pi)^{1/2}$, also

$$\hat{\Phi}_1 = (2\pi)^{1/2}\Phi_1.$$

Ist n beliebig, so gilt wegen $\Phi_n(x) = \Phi_1(x_1)\cdots\Phi_1(x_n)$ und Fubinis Theorem offenbar $\hat{\Phi}_n(\xi) = \hat{\Phi}_1(\xi_1)\cdots\hat{\Phi}_1(\xi_n)$. Damit folgt sofort (2.18), und dann auch (2.19), da

$$\begin{aligned}\Phi_n(0) &= (2\pi)^{-n/2}\hat{\Phi}_n(0) = (2\pi)^{-n/2}\int \Phi_n(x)\,dx \\ &= (2\pi)^{-n}\int \hat{\Phi}_n(x)\,dx.\end{aligned}$$

Q.E.D.

Einen alternativen Beweis kann man mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel führen (Übung).

Satz 2.25 *Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$\int f\hat{g}\,dx = \int \hat{f}g\;dx. \tag{2.21}$$

Beweis. Nach Fubini ist

$$\begin{aligned}\int f\hat{g}\,dx &= \int\left(\int f(x)g(y)e^{-ix\cdot y}dy\right)dx \\ &= \int\left(\int f(x)g(y)e^{-ix\cdot y}dx\right)dy = \int \hat{f}(y)g(y)dy.\end{aligned}$$

Q.E.D.

Theorem 2.26 (Fourier-Umkehrformel) *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ so, daß $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$f(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}\,d\xi \tag{2.22}$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. Sei Φ_n die Gaußfunktion aus Lemma 2.24, für die wir bereits die Umkehrformel kennen, und setze $\varphi := (2\pi)^{-n}\hat{\Phi}_n = (2\pi)^{-n/2}\Phi_n$. Dann ist $\int \varphi\,dx = 1$, und wir betrachten die approximierende Eins $\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $\varepsilon > 0$ (vergl. Bemerkung 2.4).

Der Grundgedanke des Beweises wird darin bestehen, f durch „Superpositionen" von Translaten skalierter Gaußfunktionen, für welche die Fourierumkehrformel i.w. in Lemma 2.26 bewiesen wurde, zu approximieren. Nach Theorem 2.13 gilt nämlich

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|f - f * \varphi_\varepsilon\|_1 = 0, \tag{2.23}$$

wobei $f * \varphi_\varepsilon = \int f(y)\lambda_y \varphi_\varepsilon \, dy$.
Ferner ist nach Satz 2.1 $\varphi_\varepsilon = (2\pi)^{-n}\widehat{\Phi_n(\varepsilon\cdot\ )}$, folglich nach Satz 2.25, da Φ_n symmetrisch ist:

$$\begin{aligned} f * \varphi_\varepsilon(x) \quad &= \int f(x-y)\ (2\pi)^{-n}\widehat{\Phi_n(\varepsilon\cdot\ )}(y)\, dy \\ &= (2\pi)^{-n} \int f(x+y)\widehat{\Phi_n(\varepsilon\cdot\ )}(y)\, dy \\ &= (2\pi)^{-n} \int (\lambda_{-x} f)^\wedge(\xi)\, \Phi_n(\varepsilon\xi)\, d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int \hat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi}\, \Phi_n(\varepsilon\xi)\, d\xi. \end{aligned}$$

Nun ist $\hat{f}$ integrierbar, Φ_n ist beschränkt und $\Phi_n(\varepsilon\xi)$ strebt für $\varepsilon \to 0$ punktweise gegen $\Phi_n(0)$. Daher folgt nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f * \varphi_\varepsilon(x) = (2\pi)^{-n} \int \hat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi}\, d\xi$$

für jedes $x \in \mathbb{R}^n$. Andererseits folgt aus (2.23), daß für eine Folge $\varepsilon_j \searrow 0$ gilt: $f(x) = \lim\limits_{j\to\infty} f * \varphi_{\varepsilon_j}(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$. Damit ergibt sich (2.22).

Q.E.D.

Die Fourierumkehrformel besitzt z.B. für $n = 1$ folgende *physikalische Interpretation*: Sei $f(t)$ ein von der Zeit t abhängiges Signal, welches den Voraussetzungen von Theorem 2.26 genügt. Dann ist

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\tau) e^{i\tau t} dt,$$

d.h. f läßt sich in „Eigenschwingungen" $e^{i\tau t} = \cos(\tau t) + i \sin(\tau t)$ der „Frequenzen" $\tau \in \mathbb{R}$ zerlegen, wobei $\hat{f}(\tau)$ die „Amplitude" oder „Dichteverteilung" der Frequenzen darstellt.

Korollar 2.27 (Eindeutigkeitssatz) *Sind $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, und ist $\hat{f} = \hat{g}$, so ist $f = g$.*

Beweis. Seien $f, g \in \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{f} = \hat{g}$. Dann ist $h := f - g \in \mathcal{L}^1$, $\hat{h} = 0 \in \mathcal{L}^1$, und somit $h(x) = 0$ f.ü. nach Theorem 2.26. Es folgt $f = g$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Q.E.D.

Definition. Wir definieren die **Fourier-Kotransformierte** $\overline{\mathcal{F}}f$ einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ durch

$$\overline{\mathcal{F}}f(\xi) := \int f(x)e^{i\xi\cdot x}\,dx = \hat{f}(-\xi).$$

Ferner setzen wir für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$

$$\check{f}(x) := f(-x), \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Mit $f \in \mathcal{S}$ liegt auch $\check{f}$ in $\mathcal{S}$. Beachte auch, daß für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$(\overline{\mathcal{F}}f)^\vee = \mathcal{F}f, \quad \mathcal{F}(\check{f}) = \overline{\mathcal{F}}f, \tag{2.24}$$

$$(f * g)^\vee = \check{g} * \check{f} = \check{f} * \check{g}. \tag{2.25}$$

Als weitere Folge erhalten wir

Theorem 2.28 *(a) Die Fouriertransformation $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist ein linearer Isomorphismus, mit Umkehrabbildung $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}$.*
(b) Sind $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, so sind auch $\varphi\psi$ und $\varphi * \psi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, und es gilt

$$(\varphi * \psi)^\wedge = \hat{\varphi}\ \hat{\psi}, \quad (\varphi\psi)^\wedge = (2\pi)^{-n}\hat{\varphi} * \hat{\psi}. \tag{2.26}$$

Beweis. (a) Mit $\varphi \in \mathcal{S}$ sind nach Korollar 2.20 auch $\mathcal{F}\varphi$ und $\overline{\mathcal{F}}\varphi$ in $\mathcal{S}$. Somit gilt nach der Fourierumkehrformel (2.22) $\varphi(x) = (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}\varphi)(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$, und da φ stetig ist, gilt dies dann sogar für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Mit (2.24) erhalten wir dann zudem

$$\check{\varphi} = (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}\check{\varphi}) = (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}(\overline{\mathcal{F}}\varphi) = (2\pi)^{-n}(\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}\varphi)^\vee,$$

also

$$\varphi = (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}\varphi) = (2\pi)^{-n}\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}\varphi),$$

woraus sich die Behauptung ergibt.
(b) Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$. Nach der Leibnizregel gilt für jedes $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$D^\alpha(\varphi\psi) = \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta\varphi\, D^{\alpha-\beta}\psi, \tag{2.27}$$

wobei wir wie üblich setzen $\binom{\alpha}{\beta} := \binom{\alpha_1}{\beta_1}\cdots\binom{\alpha_n}{\beta_n}$, und wobei $\beta \le \alpha$ bedeute, daß $\beta_j \le \alpha_j$ für $j = 1, \ldots, n$. Damit folgt leicht, daß $\varphi\psi \in \mathcal{S}$.

Die Formel $(\varphi * \psi)^\wedge = \hat{\varphi}\hat{\psi}$ gilt nach Satz 2.3. Somit ist nach (a) insbesondere auch $\varphi * \psi = \mathcal{F}^{-1}(\hat{\varphi}\hat{\psi}) \in \mathcal{S}$. Nach Teil (a) ergibt sich hieraus

$$\varphi\psi = \mathcal{F}((\mathcal{F}^{-1}\varphi) * (\mathcal{F}^{-1}\psi)),$$

also

$$(\varphi\psi)^\wedge = (2\pi)^{-2n}\mathcal{F}^2(\overline{\mathcal{F}}\varphi * \overline{\mathcal{F}}\psi).$$

Wegen $\mathcal{F}^2 f(x) = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F} f(-x) = (2\pi)^n \check{f}(x)$ ergibt sich daher mit (2.24), (2.25)

$$\begin{aligned} (\varphi\psi)^\wedge &= (2\pi)^{-n}(\overline{\mathcal{F}}\varphi * \overline{\mathcal{F}}\psi)^\vee = (2\pi)^{-n}(\overline{\mathcal{F}}\varphi)^\vee * (\overline{\mathcal{F}}\psi)^\vee \\ &= (2\pi)^{-n}\hat{\varphi} * \hat{\psi}. \end{aligned}$$

Q.E.D.

2.7 L^2-Theorie: Der Satz von Plancherel

Wir bezeichnen für $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit

$$(f, g) := \int f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

das Skalarprodukt auf dem Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}^n)$. Damit ist also die L^2-Norm gegeben durch $\|f\|_2 = (f, f)^{1/2}$.

Satz 2.29 (Parsevals Formel) *Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$(\varphi, \psi) = (2\pi)^{-n}(\hat{\varphi}, \hat{\psi}). \tag{2.28}$$

Beweis. Betrachte $f := \varphi * \psi^*$. Dann ist nach Theorem 2.28 $f \in \mathcal{S}_n$, so daß nach der Fourierumkehrformel gilt:

$$\begin{aligned} (\varphi, \psi) &= \int \varphi(x)\psi^*(-x)\, dx = \varphi * \psi^*(0) = f(0) \\ &= (2\pi)^{-n}\int \hat{f}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Ferner ist $\hat{f} = \hat{\varphi}\hat{\psi}^* = \hat{\varphi}\overline{\hat{\psi}}$. Es folgt

$$(\varphi, \psi) = (2\pi)^{-n}(\hat{\varphi}, \hat{\psi}).$$

Q.E.D.

Theorem 2.30 (von Plancherel) *Die Fouriertransformation* $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *läßt sich eindeutig zu einem bijektiven linearen isometrischen Operator*

$$\tilde{\mathcal{F}} : L^2(\mathbb{R}^n, dx) \to L^2(\mathbb{R}^n, \mathbf{d}\xi)$$

fortsetzen, wobei wir mit $\mathbf{d}\xi$ *das skalierte Lebesguemaß* $\mathbf{d}\xi := (2\pi)^{-n} d\xi$ *bezeichnen.*

Beweis. Da $\mathcal{S}_n$ dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$ liegt, und da für $\varphi \in \mathcal{S}_n$ aufgrund der Parsevalschen Formel

$$\|\mathcal{F}\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n, \mathbf{d}\xi)} = \left(\int |\mathcal{F}\varphi(\xi)|^2 (2\pi)^{-n} d\xi \right)^{1/2} = \left(\int |\varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n, dx)} \tag{2.29}$$

gilt, ist also $\mathcal{F} : \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n$ eine Isometrie des dichten Teilraumes $\mathcal{S}_n$ von $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ auf den dichten Teilraum $\mathcal{S}_n$ von $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbf{d}x)$.
Hieraus folgt leicht mit Hilfe von Standardargumenten die Behauptung. Ist nämlich $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, so wähle man eine Folge $\varphi_j \in \mathcal{S}_n$, welche in L^2 gegen f konvergiert. Nach (2.29) bildet dann die Folge der Fouriertransformierten $\hat{\varphi}_j$ eine Cauchy-Folge in $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbf{d}\xi)$, welche wegen der Vollständigkeit des Raumes $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbf{d}\xi)$ einen Grenzwert $g \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbf{d}\xi)$ besitzt. Man kann sich leicht überzeugen, daß die Funktion g nicht von der Wahl der approximierenden Folge $\{\varphi_j\}_j$ abhängt. Wir setzen dann $\tilde{\mathcal{F}}f := g$. Die so auf ganz L^2 definierte Abbildung $\tilde{\mathcal{F}}$ besitzt die gewünschten Eigenschaften. Die Details dieses Arguments seien der Leserin bzw. dem Leser überlassen.
Q.E.D.

Bemerkungen 2.31 *(a) Für* $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ *stimmen die* „**Fourier-Plancherel-tranfomierte**“ $\tilde{\mathcal{F}}f$ *von* f *und die punktweise definierte Fouriertransformierte* $\hat{f}$ *im Sinne von* L^2*-Funktionen überein.*

Nach dem Beweis von Korollar 2.14 kann man nämlich zu f eine Folge $\{\varphi_j\}_j$ in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ finden mit $\lim\limits_{j\to\infty} \|f - \varphi_j\|_1 = 0$ und $\lim\limits_{j\to\infty} \|f - \varphi_j\|_2 = 0$. Dann konvergiert die Folge $\{\hat{\varphi}_j\}_j$ zum einen gleichmäßig gegen $\hat{f}$, und zum anderen in L^2 gegen $\tilde{\mathcal{F}}f$. Somit stimmen $\hat{f}$ und $\tilde{\mathcal{F}}f$ f.ü. überein.

Man bezeichnet daher $\tilde{\mathcal{F}}$ ebenfalls kurz als Fouriertransformation, und schreibt wieder $\hat{f}$ oder $\mathcal{F}f$ anstelle von $\tilde{\mathcal{F}}f$, falls $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

(b) Für beliebige $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *gilt dann die Parseval-Formel*

$$(f, g) = (2\pi)^{-n}(\hat{f}, \hat{g}). \tag{2.30}$$

Kapitel 3

Fourierreihen und die Poissonsche Summationsformel

3.1 Die Fouriertransformation auf $\mathbb{T}$

Wir kommen nun auf die Theorie der Fourierreihen zurück, welche wir bereits im ersten Kapitel eingeführt hatten. Ziel wird es sein zu zeigen, daß sich mit Hilfe kleiner, eher technischer Modifikationen die Ideen und Methoden des vorherigen Kapitels auf die Theorie der Fourierreihen übertragen lassen. Zugleich wollen wir die Theorie in einen allgemeineren Kontext stellen. Viele weitergehende Resultate über Fourierreihen und -integrale sowie Anwendungen dieser Theorien findet man u.a. in den Monographien [16], [1], [10] und [18].

Als Vorbereitung wollen wir zunächst zeigen, daß sich 2π-periodische Funktionen auf der reellen Achse mathematisch einfacher als Funktionen auf dem eindimensionalen Torus bzw. dem Einheitskreis auffassen lassen.
Eine Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist nämlich offenbar dann und nur dann 2π-periodisch, wenn es eine Funktion $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ gibt mit $\tilde{f}(x) = f(x + 2\pi\mathbb{Z})$. Es bezeichne Γ die diskrete Untergruppe $\Gamma := 2\pi\mathbb{Z}$ von $\mathbb{R}$. Dann ist z.B. das Intervall $A = [0, 2\pi[$ ein Fundamentalbereich in $\mathbb{R}$ für die Wirkung von Γ, d.h. $\mathbb{R}$ ist die disjunkte Vereinigung

$$\mathbb{R} = \dot{\bigcup_{\gamma\in\Gamma}} \gamma + A = \dot{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}} [2\pi k, 2\pi(k+1)[.$$

$\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ sei die Quotientengruppe modulo Γ, welche man auch als den **eindimensionalen Torus** bezeichnet, da die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{T} \to S^1,\ x + 2\pi\mathbb{Z} \to e^{ix}$$

eine Bijektion zwischen $\mathbb{T}$ und dem Kreis S^1 darstellt. Wir versehen entsprechend $\mathbb{T}$ mit der mittels φ übertragenen Topologie des Kreises S^1.

Bemerkung 3.1 Anstelle des Intervalls $[0, 2\pi[$ könnte man hier auch jeden anderen meßbaren Fundamentalbereich A verwenden. Unter einem **Fundamentalbereich** für die Wirkung von Γ auf $\mathbb{R}$ versteht man dabei eine Teilmenge A von $\mathbb{R}$, welche aus jeder Bahn von Γ, d.h. jeder Nebenklasse $x + \Gamma$, genau einen Repräsentanten enthält. In den meisten Anwendungen wird man als Fundamentalbereiche ein beliebiges halboffenes Intervall der Länge 2π verwenden, meistens die Intervalle $[0, 2\pi[$ oder $[-\pi, \pi[$.

Jede 2π-periodische Funktion $\tilde{f}$ auf $\mathbb{R}$ ist eindeutig durch ihre Einschränkung auf den Fundamentalbereich A bestimmt, und dieser wiederum wird unter der Quotientenabbildung $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{T},\ x \mapsto x + \Gamma$, bijektiv auf $\mathbb{T}$ abgebildet. Damit ist die Abbildung $f \mapsto \tilde{f} := f \circ \pi$, welche jeder Funktion f auf $\mathbb{T}$ eine 2π-periodische Funktion $\tilde{f}$ auf $\mathbb{R}$ zuordnet, bijektiv. Wir werden daher in Zukunft in der Regel Funktionen auf $\mathbb{T}$ mit 2π-periodischen Funktionen auf $\mathbb{R}$ identifizieren, und gelegentlich $\tilde{f}$ kürzer ebenfalls mit f bezeichnen, falls aus dem Kontext klar ist, welche Funktion gemeint ist.

Definitionen (a) Die Funktion $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ heiße **(Lebesgue) meßbar**, wenn die zugehörige Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dies ist.

(b) Sie heiße k**-mal (stetig) differenzierbar**, wenn $\tilde{f}$ dies ist. $C^k(\mathbb{T})$ bezeichne den Raum aller k-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{T}$. Ist f differenzierbar, so ist $\tilde{f}' : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ebenfalls 2π-periodisch, d.h. es gibt eine eindeutige Funktion auf $\mathbb{T}$, welche wir mit f' bezeichnen, mit $(f')^\sim = \tilde{f}'$. Wir setzen dann $\frac{d}{dt} f(t) := f'(t),\ Df := \frac{1}{i} \frac{d}{dt} f$. Entsprechend sind höhere Ableitungen auf $\mathbb{T}$ definiert.

(c) Mit $\mathcal{L}^p(\mathbb{T}),\ 1 \le p \le \infty$, bezeichnen wir den Raum aller meßbaren Funktionen $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, für welche die zugehörige Funktion $\tilde{f}$ über den Fundamentalbereich A p-fach integrierbar ist, d.h. $\tilde{f}\ |_{[0,2\pi[} \in \mathcal{L}^p([0, 2\pi[)$. $L^p(\mathbb{T})$ bezeichne den Raum aller Äquivalenzklassen von $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$-Funktionen modulo Nullfunktionen. Wie üblich werden wir meist $\mathcal{L}^p$ mit L^p identifizieren.
Das **Integral** der L^1-Funktion $f \in L^1(\mathbb{T})$ ist definiert durch

$$\int_{\mathbb{T}} f(t)dt := \oint \tilde{f}(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(x) dx.$$

Man kann übrigens leicht zeigen (Übung), daß für jeden meßbaren Fundamentalbereich A dann gilt

$$\int_{\mathbb{T}} f(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}\ |_A\ dx. \tag{3.1}$$

Entsprechend wird die L^p**-Norm** von $f \in L^p(\mathbb{T})$ definiert durch

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} := \begin{cases} (\int\limits_{\mathbb{T}} |f(t)|^p dt)^{1/p}, & \text{falls } 1 \leq p < \infty, \\ \|\tilde{f}\,|_A\,\|_\infty, & \text{falls } p = \infty. \end{cases} \tag{3.2}$$

Für $f \in L^1(\mathbb{T})$ gilt

$$\int\limits_{\mathbb{T}} f(t-s)dt = \int\limits_{\mathbb{T}} f(t)\,dt \quad \text{für alle } s \in \mathbb{T}, \tag{3.3}$$

d.h. das Integral auf $\mathbb{T}$ ist translationsinvariant. Da das Intervall $[-s, -s+2\pi[$ nämlich einen meßbaren Fundamentalbereich bildet, gilt nach (3.1) offenbar

$$\int\limits_{\mathbb{T}} f(t-s)\,dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{[0,2\pi[} \tilde{f}(x-s)\,dx = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{[-s,-s+2\pi[} \tilde{f}(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{T}} f(t)\,dt.$$

Bezeichnet $\mu = dt$ das zugehörige Maß auf $\mathbb{T}$, welches für jede meßbare Teilmenge $M \subset \mathbb{T}$ gegeben ist durch

$$|M| := \mu(M) := \int\limits_{\mathbb{T}} \mathbf{1}_M(t)dt,$$

so ist dieses folglich ebenfalls translationsinvariant. Man bezeichnet dt daher auch als das **Haarsche Maß** der (kompakten) Gruppe $\mathbb{T}$. Man beachte, daß im Gegensatz zu $\mathbb{R}$ die Gruppe $\mathbb{T}$ endliches Maß hat, genauer gilt sogar

$$\mu(\mathbb{T}) = \int\limits_{\mathbb{T}} 1\,dt = 1. \tag{3.4}$$

Damit gilt nach Hölder für jedes $p \in [1, \infty]$

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{T}} |f(t)|\,dt &= \int\limits_{\mathbb{T}} 1 \cdot |f(t)|\,dt \\ &\leq \|\mathbf{1}\|_{L^{p'}(\mathbb{T})} \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} = \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}, \end{aligned}$$

d.h. im Gegensatz zum $\mathbb{R}^n$ gilt hier stets die Inklusion

$$L^p(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T}), \quad \text{für } 1 \leq p \leq \infty, \tag{3.5}$$

und

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_p \quad \text{für alle } f \in L^p(\mathbb{T}). \tag{3.6}$$

Man kann ganz analog zu Theorem 2.2 beweisen, daß für $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ die **Faltung**

$$f * g(t) := \int\limits_{\mathbb{T}} f(s)g(t-s)ds = \int\limits_{\mathbb{T}} f(t-s)g(s)ds$$

für fast alle $t \in \mathbb{T}$ definiert ist, daß $f * g$ integrierbar ist, und daß

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \; \|g\|_1.$$

Wegen (3.5) ist damit auf $\mathbb{T}$ folglich die Faltung einer beliebigen Funktion $f \in L^p(\mathbb{T})$ mit einer beliebigen Funktion $g \in L^r(\mathbb{T})$, $1 \leq p, r \leq \infty$, wohldefiniert, im Gegensatz zum $\mathbb{R}^n$.
Setzen wir wieder $f^*(t) := \overline{f(-t)}$, dann folgt ferner in Analogie zu Theorem 2.2, daß $(L^1(\mathbb{T}), +, *, ^*; \|\cdot\|_1)$ ebenfalls eine kommutative involutive Banachalgebra ist, die sogenannte **Gruppenalgebra des Torus** $\mathbb{T}$. Ähnlich wie in Satz 2.5 zeigt man, daß für $f \in L^1(\mathbb{T}),\; g \in C^k(\mathbb{T})$ die Faltung $f * g$ in $C^k(\mathbb{T})$ liegt, und daß dann gilt

$$D^j(f * g) = f * D^j g, \quad 0 \leq j \leq k. \tag{3.7}$$

Ferner liegt, in Analogie zu Korollar 2.14, für jedes p mit $1 \leq p < \infty$ der Raum $C^\infty(\mathbb{T})$ dicht in $L^p(\mathbb{T})$, da mit Theorem 3.5 ein Analogon zu Theorem 2.13 gilt.

Definitionen (a) Für $k \in \mathbb{Z}$ sei $\tilde{e}_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der Charakter $\tilde{e}_k(x) := e^{ikx},\; x \in \mathbb{R}$. Da $\tilde{e}_k$ 2π-periodisch ist, kann man $\tilde{e}_k$ mit einer Funktion $e_k : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ identifizieren, und man schreibt suggestiv auch

$$e_k(t) = e^{ikt},\; t \in \mathbb{T}.$$

Offenbar ist jedes e_k stetig, und es gilt

$$e_k(s+t) = e_k(s)e_k(t) \quad \text{für alle } s, t \in \mathbb{T},$$

d.h. e_k ist ein stetiger Homomorphismus der Gruppe $\mathbb{T}$ in die Kreisgruppe S^1, d.h. ein **Charakter** von $\mathbb{T}$. Man kann zeigen, daß jeder Charakter von $\mathbb{T}$ von dieser Gestalt ist.

(b) Ist $f \in L^1(\mathbb{T})$, so setzen wir für $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) \;\; &:= \int\limits_{\mathbb{T}} f(t)\overline{e_k(t)}dt = \int\limits_{\mathbb{T}} f(t)e^{-ikt}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \tilde{f}(x)e^{-ikx}dx. \end{aligned}$$

$\hat{f}(k)$ heißt der k**-te Fourierkoeffizient** von f, und die Abbildung $\hat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C},\ k \mapsto \hat{f}(k)$, **die Fouriertransformierte** von f.
Bezeichnen wir für $s \in \mathbb{T}$ mit λ_s den Translationsoperator $\lambda_s f(t) := f(t-s)$, so gilt offenbar für jede Funktion $f \in L^1(\mathbb{T})$ in Analogie zu Satz 2.1 die Identität

$$\widehat{(\lambda_s f)}(k) = e^{-iks}\hat{f}(k), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{3.8}$$

Ferner gilt bei fast wortgleichem Beweis das folgende Analogon zu Lemma 2.6:

Lemma 3.2 (Stetigkeit der Translation in $L^p(\mathbb{T})$) *Sei $1 \leq p < \infty$, und sei $f \in L^p(\mathbb{T})$. Dann gilt*

$$\|\lambda_s f\|_p = \|f\|_p \tag{3.9}$$

für alle $s \in \mathbb{T}$, sowie

$$\lim_{s \to 0} \|\lambda_s f - f\|_p = 0. \tag{3.10}$$

Hier bezeichne 0 das neutrale Element $0 + 2\pi\mathbb{Z}$ von $\mathbb{T}$. Unter einer **approximierenden Eins** auf $\mathbb{T}$ verstehen wir eine Familie $\{\varphi_\varepsilon\}_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ integrierbarer Funktionen auf $\mathbb{T}$ mit folgenden Eigenschaften: Es gebe ein $C \geq 0$ so, daß gilt

(i)
$$\int_{\mathbb{T}} \varphi_\varepsilon(t)\, dt = 1 \quad \text{für alle } \ \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[;$$

(ii)
$$\int_{\mathbb{T}} |\varphi_\varepsilon(t)|\, dt \leq C \quad \text{für alle } \ \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[;$$

(iii) für jede Umgebung U der Null in $\mathbb{T}$ gilt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{T}\setminus U} |\varphi_\varepsilon(t)|\, dt = 0.$$

.

Liegen die φ_ε in $C^\infty(\mathbb{T})$, so wollen wir eine solche approximierende Eins auch als **Dirac-Familie** (und für jede fallende Nullfolge $\varepsilon_j \searrow 0$ die Folge $\{\varphi_j\}_j := \{\varphi_{\varepsilon_j}\}_j$ als **Dirac-Folge**) auf $\mathbb{T}$ bezeichnen.
Da auf dem Torus im Gegensatz zum Euklidischen Raum keine Dilatationen zur Verfügung stehen, kann man hier nicht mehr einfach durch Skalierung einer festen Funktion eine solche approximierende Eins konstruieren. Dennoch lassen sich relativ einfach approximierende Einsen auf dem Torus angeben.

Beispiel: Der Poissonkern. Im Zusammenhang mit der „Abelschen Summation“ von Fourierreihen (siehe z.B. [16]) tritt der sogenannte **Poissonkern**

$$P_r(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{T},\ (0 \leq r < 1) \tag{3.11}$$

auf. Durch Summation einer geometrischen Reihe erhält man leicht den folgenden expliziten Ausdruck für P_r :

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2}. \tag{3.12}$$

Lemma 3.3 *Setzen wir $\phi_\varepsilon := P_{e^{-\varepsilon}},\ \varepsilon > 0$, so ist $\{\phi_\varepsilon\}_\varepsilon$ eine Dirac-Familie.*

Beweis. Durch termweise Integration der Reihe (3.12) (welche zulässig ist, da die Reihe gleichmäßig konvergiert) erhalten wir sofort

$$\int_{\mathbb{T}} \phi_\varepsilon(t)\, dt = 1 \quad \text{für alle } \ \varepsilon > 0.$$

Ferner ist wegen

$$|2r\cos t| \leq r^2 + (\cos t)^2 \leq 1 + r^2 \tag{3.13}$$

stets $P_r(t) \geq 0$, womit auch die zweite Eigenschaft (ii) einer approximierenden Eins erfüllt ist.
Um die dritte Eigenschaft (iii) nachzuweisen genügt es offenbar zu zeigen, daß für jedes $\delta \in]0, \pi[$ gilt

$$\int_{\delta \leq |t| \leq \pi} P_r(t)\, dt \to 0, \quad \text{falls } r \to 1. \tag{3.14}$$

Nach (3.13) gilt jedoch $1 - 2r\cos t + r^2 \geq 1 - (\cos t)^2 \geq 1 - (\cos\delta)^2 =: c_\delta > 0$, falls $\delta \leq |t| \leq \pi/2$, und für $\pi/2 < |t| \leq \pi$ gilt trivialerweise ebenfalls $1 - 2r\cos t + r^2 \geq c_\delta > 0$. Somit gilt für $\delta \leq |t| \leq \pi$ stets $P_r(t) \leq (1-r^2)/c_\delta$, woraus (3.14) unmittelbar folgt.
Da in der Reihe $\phi_\varepsilon(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-|k|\varepsilon} e^{ikt}$ beliebig oft termweise nach t differenziert werden darf, so ist schließlich ϕ_ε eine glatte Funktion.

Q.E.D.

Bemerkung 3.4 Nach Satz 1.3 und (3.11) gilt übrigens offenbar für ϕ_ε die Fourier-Umkehrformel $\phi_\varepsilon(t) = \sum_k \widehat{\phi_\varepsilon}(k) e^{ikt}$, für alle $t \in \mathbb{T}$.

Bei fast wortgleichem Beweis gilt analog zu Theorem 2.13

Theorem 3.5 *Sei $\{\varphi_\varepsilon\}_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ eine approximierende Eins auf $\mathbb{T}$.*

(a) Ist $f \in L^p(\mathbb{T}),\ 1 \leq p < \infty$, so gilt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|f * \varphi_\varepsilon - f\|_p = 0.$$

(b) *Ist $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{T})$ gleichmäßig stetig in den Punkten einer Menge $V \subset \mathbb{T}$, so konvergiert $f * \varphi_\varepsilon$ auf V gleichmäßig gegen f, falls $\varepsilon \to 0$.*

Bemerkung 3.6 Der Poissonkern spielt insbesondere auch in der Theorie der Laplace-Gleichung auf der Einheitskreisscheibe $D := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ eine fundamentale Rolle. Führt man nämlich Polarkoordinaten $x_1 = r\cos\theta, x_2 = r\sin\theta,\quad 0 \le r < 1, 0 \le \theta < 2\pi$, in D ein, so ist die durch $F(r\cos\theta, r\sin\theta) := P_r(\theta)$ auf D definierte Funktion F **harmonisch,** d.h. es gilt $\Delta F = 0$ in D. In Polarkoordinaten ist der Laplace-Operator nämlich, wie man leicht zeigt, gegeben durch

$$\tilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

so daß dies sofort aus (3.11) folgt.
Ist nun $f \in L^1(\mathbb{T})$, und definiert man die Funktion $\tilde{u}(r,\theta) := f * P_r(\theta),\quad 0 \le r < 1, 0 \le \theta < 2\pi$, so gilt mit (3.7) offenbar

$$\tilde{\Delta}\tilde{u}(r,\theta) = f * ((\tilde{\Delta}\tilde{F})(r,\cdot))(\theta) = 0,$$

falls man $\tilde{F}(r,\theta) := P_r(\theta)$ setzt. Die zugehörige Funktion $u(r\cos\theta, r\sin\theta) := \tilde{u}(r,\theta)$ ist also harmonisch in D. Ferner gilt nach Theorem 3.5

$$\lim_{r\to 1} \tilde{u}(r,\theta) = f \text{ in } L^1(\mathbb{T}).$$

Identifizieren wir wieder den Torus $\mathbb{T}$ mit dem Rand $\partial D = S^1$ der Kreisscheibe D, so konvergiert also die Einschränkung von u auf den Kreis rS^1 mit Radius r für $r \to 1$ gegen die Funktion f (zumindest im L^1-Sinne). Damit löst u in dem angegebenen Sinne das **Dirichletsche Randwertproblem**

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ in } D, \\ u|_{\partial D} &= f. \end{aligned}$$

Mit einigem Mehraufwand läßt sich sogar beweisen, daß

$$\lim_{r\to 1} \tilde{u}(r,\theta) = f(\theta) \text{ für f.a. } \theta$$

gilt (vergl. z.B. [18] für ein analoges Resultat im oberen Halbraum).

Mit Theorem 3.5 läßt sich nun auch der Beweis der Fourier-Umkehrformel leicht übertragen.
Wir bezeichenen mit $\ell^p(\mathbb{Z})$ den Raum aller zur p-ten Potenz summierbaren Abbildungen $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, versehen mit der Norm $\|g\|_p := \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |g(k)|^p\right)^{1/p}$, falls $1 \le p < \infty$, und der Supremumsnorm $\|g\|_\infty := \sup_{k\in\mathbb{Z}} |g(k)|$, falls $p = \infty$.

Theorem 3.7 (Fourier-Umkehrformel auf $\mathbb{T}$) *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ so, daß $\hat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Dann gilt*

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikt} \tag{3.15}$$

für fast alle $t \in \mathbb{T}$.

Beweis. Sei $\{\phi_\varepsilon\}_\varepsilon > 0$ die Dirac-Familie aus Lemma 3.3. Dann gilt

$$\widehat{f * \phi_\varepsilon}(k) = \hat{f}(k) \widehat{\phi_\varepsilon}(k) = e^{-|k|\varepsilon} \hat{f}(k).$$

Da $\hat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z})$, konvergiert für $\varepsilon \to 0$ folglich die Reihe $\sum_k \widehat{f * \phi_\varepsilon}(k) e^{ikt} = \sum_k e^{-|k|\varepsilon} \hat{f}(k) e^{ikt}$ für jedes $t \in \mathbb{T}$ gegen den Wert der Fourierreihe

$$Sf(t) = \sum_k \hat{f}(k) e^{ikt}$$

von f (welche absolut konvergent ist).
Ferner gilt nach Bemerkung 3.4

$$\begin{aligned} \sum_k \hat{f}(k) \widehat{\phi_\varepsilon}(k) e^{ikt} &= \sum_k \int_{\mathbb{T}} f(s) e^{-iks} ds \, e^{ikt} \widehat{\phi_\varepsilon}(k) \\ &= \int_{\mathbb{T}} f(s) \sum_k \widehat{\phi_\varepsilon}(k) e^{ik(t-s)} \, ds = \int_{\mathbb{T}} f(s) \phi_\varepsilon(t-s) \, ds \\ &= f * \phi_\varepsilon(t), \end{aligned}$$

da die Fourierreihe von ϕ_ε gleichmäßig konvergent ist. Da $f * \phi_\varepsilon$ nach Theorem 3.5 in $L^1(\mathbb{T})$ gegen f strebt, gibt es eine Teilfolge $\{f * \phi_{\varepsilon_j}\}_j$, welche f.ü. gegen f konvergiert. Damit ergibt sich die behauptete Umkehrformel für f.

Q.E.D.

Bemerkung 3.8 Die Forderung $\hat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ in Theorem 3.7 ist recht stark; z.B. ist sie nicht erfüllt, wenn f die Indikatorfunktion eines Intervalls der Länge L mit $0 < L < 2\pi$ ist, wie man sofort nachrechnet.
Andererseits gibt es nach Kolmogorov L^1-Funktionen auf $\mathbb{T}$, für welche die Fourierreihe überall punktweise divergiert (siehe z.B.[10])!
Einer der tiefliegendsten Sätze der Fourieranalysis, nämlich der Satz von L. Carleson, besagt andererseits, daß die Fourierreihe einer Funktion f stets punktweise f.ü. gegen f konvergiert, falls $f \in L^2(\mathbb{T})$ ist. Dieses Ergebnis wurde anschließend von R. Hunt auf L^p- Funktionen f für beliebiges $p > 1$ ausgedehnt. Für $p > 1$ ist also de facto keine weitere Voraussetzung an die Fouriertransformierte $\hat{f}$ erforderlich! Einen neueren Beweis dieses Satzes, welcher auf M. Lacey und Ch. Thiele zurückgeht, findet man in [6].

Für die Fouriertransformation auf $\mathbb{T}$ gilt ebenfalls das **Riemann-Lebesgue-Lemma**: $\hat{f}$ verschwindet auf $\mathbb{Z}$ im Unendlichen für jedes $f \in L^1(\mathbb{T})$, d.h.

$$\lim_{|k|\to\infty} |\hat{f}(k)| = 0 \quad \text{für alle } f \in L^1(\mathbb{T}) \tag{3.16}$$

(vergleiche Aufgabe T.2). Mit Hilfe der Formel

$$\widehat{D^j f}(k) = k^j \hat{f}(k), \quad k \in \mathbb{Z}, f \in C^j(\mathbb{T}), \tag{3.17}$$

läßt sich übrigens auch der in Theorem 2.22 gegebene Beweis leicht übertragen. Diese impliziert nämlich, daß

$$|\hat{f}(k)| \leq \|D^j f\|_1 |k|^{-j}, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{3.18}$$

falls $f \in C^j(\mathbb{T})$. Bezeichnt $c_\infty(\mathbb{Z}) = \{a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} : \lim_{|k|\to 0} |a(k)| = 0\}$ den Raum aller „Nullfolgen“ auf $\mathbb{Z}$, versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$, so liegt nach (3.18) offenbar $\hat{f}$ in $c_\infty(\mathbb{Z})$, falls $f \in C^1(\mathbb{T})$. Ferner sieht man mit Hilfe von Theorem 3.5 und (3.7) leicht, daß der Raum $C^\infty(\mathbb{T}) \subset C^1(\mathbb{T})$ dicht in $L^1(\mathbb{T})$ liegt.
Ganz analog zu Korollar 2.23 gilt damit dann das folgende

Theorem 3.9 *Die Fouriertransformation $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{T}) \to c_\infty(\mathbb{Z})$, $f \mapsto \hat{f}$, ist ein stetiger, linearer Homomorphismus der involutiven Banachalgebra $(L^1(\mathbb{T}), +, *, ^*; \|\cdot\|_1)$ in die involutive Banachalgebra $(c_\infty(\mathbb{Z}), +, \cdot, \overline{}; \|\cdot\|_\infty)$.*

Insbesondere gilt also für $f, g \in L^1(\mathbb{T})$

$$\begin{aligned} (f * g)^\wedge &= \hat{f}\hat{g}, \\ (f^*)^\wedge &= \overline{\hat{f}}. \end{aligned}$$

Aufgrund der Umkehrformel gilt auch hier der **Eindeutigkeitssatz**, d.h. $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{T}) \to c_\infty(\mathbb{Z})$ ist injektiv.

Bemerkung 3.10 Die Fouriertransformierte einer L^1-Funktion auf $\mathbb{T}$ ist eine Funktion auf der additiven Gruppe $\mathbb{Z}$, nicht auf $\mathbb{T}$! Die Gruppe $\mathbb{Z}$ ist nämlich unter der Abbildung $k \mapsto e_k$ isomorph zur multiplikativen Gruppe $\hat{\mathbb{T}}$ aller (stetigen) Charaktere von $\mathbb{T}$, der sogenannten **dualen Gruppe** von $\mathbb{T}$, und die Fouriertransformierte $\hat{f}$ kann somit als Funktion auf $\hat{\mathbb{T}}$ betrachtet werden. Definiert man nun die **Fourier-Kotransformierte** $\overline{\mathcal{F}}a$ einer Funktion $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$ durch die Fourierreihe

$$\overline{\mathcal{F}}a(t) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} a(k) e^{ikt}, \ t \in \mathbb{T},$$

so ist dies eine Funktion auf $\mathbb{T}$, und die Fourier-Umkehrformel (3.15) läßt sich damit schreiben als

$$f = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f) \text{ f.ü. }, \tag{3.19}$$

in Analogie zur Umkehrformel auf dem $\mathbb{R}^n$, die die Gestalt $f = (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}$ besitzt. Nun sieht man sofort, daß jeder Charakter der Gruppe $\mathbb{Z}$, d.h. jeder Gruppenhomomorphismus $\chi : (\mathbb{Z}, +) \mapsto (S^1, \cdot)$, von der Gestalt

$$\chi(k) = e_k(t),\ k \in \mathbb{Z}, \tag{3.20}$$

ist für ein $t \in \mathbb{T}$, d.h. die Gruppe der Charaktere $\hat{\mathbb{Z}}$ von $\mathbb{Z}$ besteht aus den Funktionen $e_t(k) := e^{ikt}$, mit $t \in \mathbb{T}$. Somit läßt sich $\mathbb{T}$ als duale Gruppe $\hat{\mathbb{Z}}$ zu $\mathbb{Z}$ auffassen, und die Fourier-Kotransformierte von $a \in \ell_1(\mathbb{Z})$ als eine Funktion auf $\mathbb{T} \simeq \hat{\mathbb{Z}} \simeq (\hat{\mathbb{T}})^\wedge$.
Eine ähnliche Konstruktion ist auf jeder lokal-kompakten abelschen Gruppe G möglich, da nach dem **Pontryaginschen Dualitätssatz** $(\hat{G})^\wedge$ stets isomorph zu G ist (siehe z.B. [1], [10]). Für $\mathbb{R}^n$ ist übrigens, wie bereits erwähnt, $\widehat{\mathbb{R}^n} \simeq \mathbb{R}^n$. Dies erklärt, weshalb auf dem $\mathbb{R}^n$ die Fouriertransformierte einer Funktion wieder eine Funktion auf dem $\mathbb{R}^n$ ist!

Wir betrachten schließlich die Fouriertransfomation auf $L^2(\mathbb{T})$. Da $L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$ ist, ist hier $\hat{f}(k)$ punktweise definiert, und $\hat{f}$ liegt sicherlich in $c_\infty(\mathbb{Z})$, falls $f \in L^2(\mathbb{T})$.

Theorem 3.11 (Plancherel-Theorem für $\mathbb{T}$) *Die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ ist ein linearer isometrischer Operator von $L^2(\mathbb{T})$ auf $\ell^2(\mathbb{Z})$; insbesondere gilt für alle $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ die Parsevalsche Formel*

$$\int_{\mathbb{T}} f(t)\overline{g(t)}dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\overline{\hat{g}}(k). \tag{3.21}$$

Beweis. Sei $f \in L^2(\mathbb{T})$, und sei zunächst $\psi \in C^\infty(\mathbb{T})$. Dann ist auch $f*\psi^* \in C^\infty(\mathbb{T})$, so daß $(f * \psi^*)^\wedge = \hat{f}\overline{\hat{\psi}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ ist (wieso?). Nach Theorem 3.7 folgt

$$\begin{aligned}(f, \psi) &:= \int_T f(t)\overline{\psi}(t)dt = f * \psi^*(0) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f * \psi^*}(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\overline{\hat{\psi}}(k) \\ &:= (\hat{f}, \hat{\psi}).\end{aligned} \tag{3.22}$$

Insbesondere ist $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$, falls auch f glatt ist. Seien nun $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ beliebig. Dann gibt es eine Folge $\{\psi_j\}_j$ in $C^\infty(\mathbb{T})$ mit $g = \lim_{j\to\infty} \psi_j$ in $L^2(\mathbb{T})$. Mit (3.22) folgt $(f, g) = \lim_{j\to\infty}(f, \psi_j) = \lim_{j\to\infty}(\hat{f}, \hat{\psi}_j)$. Ferner bildet die Folge $\{\hat{\psi}_j\}_j$ eine Cauchy-Folge in $\ell^2(\mathbb{Z})$, welche somit einen Grenzwert $h \in \ell^2(\mathbb{Z})$ besitzt. Andererseits konvergiert wegen (3.6) die Folge $\{\psi_j\}_j$ auch in $L^1(\mathbb{T})$ gegen g, und somit gilt $\hat{g}(k) = \lim_{j\to\infty} \hat{\psi}_j(k)$, für jedes $k \in \mathbb{Z}$. Zusammen erhalten wir $h = \hat{g}$, d.h. $\hat{g} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ und

$$(f, g) = \lim_{j\to\infty} (\hat{f}, \hat{\psi}_j) = (\hat{f}, \hat{g}).$$

Schließlich sei

$$c_0(\mathbb{Z}) := \{a \in \ell^2(\mathbb{Z}) : a(k) = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } k \in \mathbb{Z}\}.$$

Offenbar ist $c_0(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{F}(L^2(\mathbb{T}))$, und $c_0(\mathbb{Z})$ liegt dicht in $\ell^2(\mathbb{Z})$. Es folgt $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{T})) = \ell^2(\mathbb{Z})$.

Q.E.D.

Korollar 3.12 *Die Charaktere $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(\mathbb{T})$.*

Beweis. Wir wissen nach (1.11) bereits, daß die $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ein Orthonormalsystem bilden. Dessen Vollständigkeit folgt damit sofort aus der Plancherel-Formel $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$, da $(f, e_k) = \hat{f}(k)$.

Q.E.D.

3.2 Zur punktweisen Konvergenz von Fourierreihen

Für $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ bezeichne wieder

$$S_N f(t) := \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e^{ikt}$$

die N-te Partialsumme der Fourierreihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{ikt}$. Offenbar ist

$$\begin{aligned} S_N f(t) &= \sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) e^{ik(t-s)} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \left(\sum_{k=-N}^{N} e^{ik(t-s)} \right) ds, \end{aligned}$$

d.h. es ist

$$S_N f(t) = f * D_N(t), \quad t \in \mathbb{T}, \tag{3.23}$$

wobei

$$D_N(x) := \sum_{k=-N}^{N} e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R},$$

den **Dirichlet-Kern** der Ordnung $N \in \mathbb{N}$ bezeichne. Durch Summation einer geometrischen Reihe erhält man

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}, & x \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ 2N+1, & x \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases} \tag{3.24}$$

Wir wollen hinreichende Bedingungen dafür angeben, daß die Fourierreihe von f in einem Punkt $t \in \mathbb{T}$ gegen $f(t)$ konvergiert. Dazu werden wir folgende Eigenschaften von D_N ausnutzen, welche sich unmittelbar aus der Definition ergeben:

$$\int_{\mathbb{T}} D_N(t)dt = 1, \tag{3.25}$$

$$\check{D}_N = D_N. \tag{3.26}$$

Man kann allerdings beweisen (Übung), daß

$$\int_{\mathbb{T}} |D_N(t)|dt \sim \log N \quad \text{für } N \to \infty,$$

so daß die Folge der D_N, im Gegensatz zur Folge ϕ_{ε_j} von Poisson-Kernen, welche wir im Beweis der Fourier-Umkehrformel verwendet hatten, leider keine approximierende Eins bildet. Wegen (3.26) werden wir im folgenden das „symmetrische " Intervall $[-\pi, \pi[$ als Fundamentalbereich benutzen.

Theorem 3.13 (Dini) *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$, und sei $t \in \mathbb{T}$. Gibt es ein $A \in \mathbb{C}$ mit*

$$\int_0^{\pi} \left| \frac{f(t+s)+f(t-s)}{2} - A \right| \frac{ds}{s} < \infty, \tag{3.27}$$

so gilt

$$\lim_{N\to\infty} S_N f(t) = A.$$

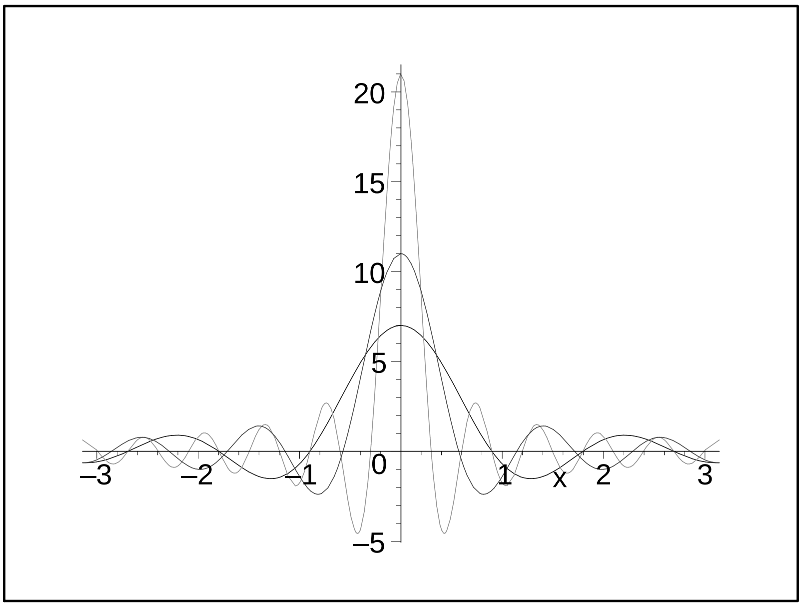

Abbildung 3.1: Dirichlet-Kerne, $N = 3, 5, 10$

Beweis. Wegen (3.26) ist

$$\begin{aligned} S_N f(t) &= f * D_N(t) = D_N * f(t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t-s) D_N(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+s) D_N(s) ds. \end{aligned}$$

Durch Mittelwertbildung erhalten wir

$$S_N f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} D_N(s) ds,$$

und folglich mit (3.25)

$$S_N f(t) - A = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - A \right) D_N(s) ds.$$

Bezeichnen wir mit J_N die rechte Seite dieser Gleichung, so ist zu zeigen, daß $\lim\limits_{N\to\infty} J_N = 0$. Dazu setzen wir für $s \in]-2\pi, 2\pi[$

$$h(s) := \begin{cases} \frac{1}{\sin(s/2)} - \frac{1}{s/2}, & s \neq 0, \\ 0, & s = 0. \end{cases}$$

Man sieht rasch, daß h analytisch in $]-2\pi, 2\pi[$ ist; insbesondere ist $h \in C^\infty(]-2\pi, 2\pi[)$. Ferner ist nach (3.24)

$$\begin{aligned} 2\pi J_N &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{f(t+s) - f(t-s)}{2} - A \right) \frac{\sin(N+\frac{1}{2})s}{s/2} ds \\ &\quad + \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{f(t+s) - f(t-s)}{2} - A \right) h(s) \sin(N+\frac{1}{2})s \, ds. \end{aligned}$$

Setze

$$\begin{aligned} f_1(s) &:= \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - A \right) \frac{1}{s/2}, \\ f_2(s) &:= \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - A \right) h(s). \end{aligned}$$

Die Voraussetzung des Theorems besagt, daß $f_1 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ ist. Da h auf dem kompakten Intervall $[-\pi, \pi]$ beschränkt ist, ist ferner auch $f_2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$, und es gilt:

$$\begin{aligned} 2\pi J_N &= \sum_{j=1}^{2} \int_{-\pi}^{\pi} f_j(s) \sin(N+\frac{1}{2})s \, ds \\ &= \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{2i} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f_j(s) e^{i(N+\frac{1}{2})s} ds - \int_{-\pi}^{\pi} f_j(s) e^{-i(N+\frac{1}{2})s} ds \right]. \end{aligned}$$

Wendet man das Riemann-Lebesgue Lemma auf letztere Integrale an, so folgt $J_N \to 0$ für $N \to \infty$.

Q.E.D.

Korollar 3.14 (Satz von Dirichlet) *Sei $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig differenzierbar, d.h. es gebe eine Zerlegung $-\pi = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_{m+1} = \pi$ des Intervalls $[-\pi, \pi]$ so, daß sich $f|_{]\tau_j, \tau_{j+1}[}$ für jedes $j = 0, \dots, m$ zu einer stetig differenzierbaren Funktion auf $[\tau_j, \tau_{j+1}]$ fortsetzen läßt. Für $t \in [-\pi, \pi]$ bezeichne $f(t \pm 0)$ den einseitigen Grenzwert*

$$f(t \pm 0) := \lim_{\substack{\tau \to 0 \\ \tau > 0}} f(t \pm \tau).$$

Dann gilt

$$\lim_{N \to \infty} S_N f(t) = \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}.$$

Ist f stetig im Punkte t, so folgt insbesondere

$$\lim_{N \to \infty} S_N f(t) = f(t).$$

Beweis. Setze im Satz von Dini $A := \frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$. Für $s > 0$ ist dann

$$\frac{1}{s}\left(\frac{f(t+s)+f(t-s)}{2} - A\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{f(t+s)-f(t+0)}{s} - \frac{f(t-0)-f(t-s)}{s}\right].$$

Da f stückweise stetig differenzierbar ist, existieren für $s \to 0$ die Grenzwerte von $\frac{f(t+s)-f(t+0)}{s}$ und $\frac{f(t-0)-f(t-s)}{s}$, und stimmen mit der rechtsseitigen Ableitung $f'(t+0)$ bzw. der linksseitigen Ableitung $f'(t-0)$ von f im Punkte t überein. Damit ist der Integrand

$$g(s) := \left|\frac{f(t+s)+f(t-s)}{2} - A\right| \cdot \frac{1}{s}$$

stetig in 0, d.h. mit f ist auch g stückweise stetig. Insbesondere ist $\int_0^\pi g(s)ds < \infty$. Damit folgt der Satz von Dirichlet aus dem Satz von Dini (welcher chronologisch allerdings nach dem Satz von Dini angesiedelt ist) .

Q.E.D.

3.3 Die Poissonsche Summationsformel

Sei f eine „gutartige“ Funktion auf $\mathbb{R}$, beispielsweise eine Schwartzfunktion. Dann können wir f auf die beiden folgenden Arten eine 2π-periodische Funktion zuordnen:

(a) Wir setzen

$$f_1(x) := 2\pi \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} f(x+\ell 2\pi), \ x \in \mathbb{R}.$$

(b) Wir betrachten die Fouriertransformierte $\hat{f}$ nur auf den ganzen Zahlen, und ordnen den Koeffizienten $\hat{f}(k), \ k \in \mathbb{Z}$, die Fourierreihe

$$f_2(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{ikx}$$

zu. Dann sind sowohl f_1 als auch f_2 offenbar 2π-periodisch, so daß wir beide Funktionen als Funktionen auf $\mathbb{T}$ betrachten können. Wir werden sehen, daß f_1 und f_2 übereinstimmen.

Theorem 3.15 *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ stetig und erfülle die beiden folgenden Bedingungen:*

(i) die Reihe $\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} f(x+\ell 2\pi)$ konvergiere lokal gleichmäßig (also auch gleichmäßig auf jedem Kompaktum) in $\mathbb{R}$;

(ii) die Reihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)$ *konvergiere absolut.*

Dann gilt die **Poissonsche Summationsformel**

$$2\pi \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} f(2\pi\ell) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k). \tag{3.28}$$

Bemerkungen 3.16 *(a) Mit f erfüllt auch die um y verschobene Funktion $\lambda_y f = f(\cdot - y)$ die Voraussetzungen des Theorems. Wendet man daher die Poissonsche Summationsformel auf $\lambda_{-x} f$ an, so erhält man die folgende Verallgemeinerung von* (3.28)*:*

$$2\pi \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} f(x + \ell 2\pi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{ikx}. \tag{3.29}$$

(b) Sei $a > 0$. Ersetzt man f durch $af(a\,\cdot)$, so ergibt sich folgende Verallgemeinerung der Formel (3.28) *:*

$$2\pi a \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} f(\ell 2\pi a) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{k}{a}\right). \tag{3.30}$$

(c) Man sieht leicht, daß die Bedingungen (i) und (ii) des Theorems erfüllt sind, falls $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ Abschätzungen der Form

$$f(x) = O((1 + |x|)^{-1-\delta}), \quad |x| \to \infty,$$

und

$$\hat{f}(\xi) = O((1 + |\xi|)^{-1-\delta}), \quad |\xi| \to \infty,$$

genügt, mit einem $\delta > 0$. Dies trifft insbesondere für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ zu.

Beweis. Nach (i) ist die Funktion

$$f_1 : t \mapsto f_1(t) := 2\pi \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} f(t + \ell 2\pi) \tag{3.31}$$

stetig und 2π-periodisch. Wir berechnen ihre Fourierkoeffizienten: Für $k \in \mathbb{Z}$ ist wegen der lokal gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (3.31)

$$\begin{aligned}
\hat{f}_1(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(t)e^{-ikt}dt \\
&= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \int_{[0,2\pi[} f(t + \ell 2\pi)e^{-ikt}dt \\
&= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \int_{[\ell 2\pi,(\ell+1)2\pi[} f(x)e^{-ikx}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ikx}dx = \hat{f}(k).
\end{aligned}$$

Wegen (ii) läßt sich die Fourier-Umkehrformel (3.15) auf f_1 anwenden, und es folgt

$$2\pi \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} f(\ell 2\pi) = f_1(0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_1(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k).$$

Man beachte dabei, daß wegen der Stetigkeit von f_1 und aufgrund der Bedingung (ii) die Fourier-Umkehrformel (3.15) für jedes $t \in \mathbb{T}$ gilt.

Q.E.D.

Beispiele 3.17 (a) Sei $f = \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} * \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$. Dann ist $f(x) = (1-|x|)_+$, und wegen

$$\widehat{\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}}(\xi) = \frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2}$$

folgt

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\sin^2(\xi/2)}{(\xi/2)^2}.$$

Wählt man nun in (3.30) $a := 1/\pi$, so folgt

$$2 \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} f(2\ell) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\sin^2(k\frac{\pi}{2})}{(k\frac{\pi}{2})^2},$$

also

$$2 = 1 + 2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{((2\ell+1)\frac{\pi}{2})^2},$$

d.h.

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(b) Wählt man für f den Gaußkern $\Phi_1(x) = e^{-x^2/2}$, so gilt mit Lemma 2.24, wenn wir $a := \sqrt{\frac{s}{2\pi}}$ wählen:

$$\sqrt{2\pi s} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} e^{-\ell^2 \pi s} = \sqrt{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{k^2 \pi}{s}}, \quad \text{für alle } s > 0.$$

Damit erhalten wir die bekannte **Funktionalgleichung**

$$s^{-1/2} \vartheta(1/s) = \vartheta(s), \quad s > 0 \tag{3.32}$$

für die **Theta-Funktion**

$$\vartheta(s) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 s}, \quad s > 0$$

3.4 Mehrdimensionale Fourierreihen

Die Theorie der Fourierreihen läßt sich ohne Schwierigkeiten auf höhere Dimensionen verallgemeinern.
Offenbar kann man jede Funktion f auf dem n-dimensionalen Torus $\mathbb{T}^n$ mit einer mehrfach 2π-periodischen Funktion $\tilde{f}$ auf dem $\mathbb{R}^n$ identifizieren (d.h. $\tilde{f}(x_1 + 2\pi k_1, \ldots, x_n + 2\pi k_n) = \tilde{f}(x_1, \ldots, x_n)$ für alle $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$.) An die Stelle von $2\pi\mathbb{Z}$ tritt hier also das Gitter $\Gamma := 2\pi\mathbb{Z}^n$ im $\mathbb{R}^n$. Als Fundamentalbereich für die Wirkung von Γ auf dem $\mathbb{R}^n$ kann man z.B. den Würfel $A := [0, 2\pi[^n$ wählen. Das Integral über den n-Torus ist dann definiert durch

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(t)\, dt := (2\pi)^{-n} \int_A \tilde{f}(x)\, dx.$$

Die stetigen Charaktere der Gruppe $\mathbb{T}^n$ sind gerade die Tensorprodukte $e_k(t) := e^{ik\cdot t} = e^{ik_1 t_1} \cdots e^{ik_n t_n}, \quad k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$, von Charakteren des eindimensionalen Torus, und die Fouriertransformierte einer integrierbaren Funktion $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$\hat{f}(k) := \int_{\mathbb{T}^n} f(t)\overline{e_k(t)}\, dt, \quad k \in \mathbb{Z}^n.$$

Sämtliche Ergebnisse aus Abschnitt 3.1 lassen sich damit auf offenkundige Art und Weise unmittelbar auf den höherdimensionalen Fall übertragen.
Beispielweise kann man im Beweis der Fourier-Umkehrformel als approximierende Eins das n-fache Tensorprodukt $\phi_\varepsilon^n(t) := \phi_\varepsilon(t_1) \cdots \phi_\varepsilon(t_n),\ \varepsilon > 0$, der „Poissonkerne“ ϕ_ε aus dem Beweis von Theorem 3.7 verwenden, und erhält bei fast wortgleichem Beweis die **Fourier-Umkehrformel auf dem** $\mathbb{T}^n$:

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(k) e^{ik\cdot t}, \quad \text{für fast alle } \ t \in \mathbb{T}^n, \tag{3.33}$$

falls $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T}^n)$ und $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\hat{f}(k)| < \infty$.
Mehr zur Theorie höherdimensionaler Fourierreihen findet man beispielweise in [18].

Kapitel 4

Temperierte Distributionen

4.1 Einleitung

In vielen Bereichen der Analysis, aber nicht zuletzt auch in der Physik, trifft man auf Situationen, in denen man Funktionen differenzieren möchte, welche im klassischen Sinne nicht differenzierbar sind, oder von denen man a priori zumindest nicht weiß, ob sie es sind. Die wesentlich von Laurent Schwartz geprägte Distributionentheorie schafft einen mathematischen Rahmen, in dem dieses Problem auf rigorose Weise gelöst wird, indem man zu einer größeren Klasse von Objekten als den differenzierbaren Funktionen, den „Distributionen" oder „verallgemeinerten Funktionen" übergeht, welche in einem verallgemeinerten Sinne dann beliebig oft differenzierbar sind. Physiker wie z.B. Dirac hatten auf formale Art und Weise schon früher mit solchen „Objekten" gearbeitet, aber erst die Theorien von Schwartz und anderen stellten diesen Kalkül auf eine solide Basis.
Die Kernidee besteht darin, Funktionen nicht mehr als punktweise definierte Objekte zu betrachten, sondern in ihrer „Wirkung" auf andere, gutartige Funktionen, sogenannte „Testfunktionen". Als Räume von Testfunktionen verwendet man dabei vor allem den Raum $\mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und den Raum $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Wichtig dabei ist, daß beide Räume aus beliebig oft differenzierbaren Funktionen bestehen. Um diese Idee genauer zu beschreiben, betrachten wir eine Funktion $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ (welche ja im Grunde auch schon nicht mehr punktweise definiert ist!). Dieser können wir dann eine Linearform u_f, z.B. auf $\mathcal{D}$, zuordnen mittels

$$u_f(\varphi) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}, \tag{4.1}$$

d.h. u_f ist eine Funktion auf $\mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Wichtig ist nun, daß f bereits durch die Linearform u_f bestimmt ist.

Satz 4.1 *Sind $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ so, daß $u_f(\varphi) = u_g(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}$, so ist $f = g$.*

Beweis. Es genügt, den Fall $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ zu betrachten, da zwei lokal integrierbare Funktion f und g genau dann f.ü. gleich sind, wenn für jede Funktion $\chi \in \mathcal{D}$ gilt $f\chi = g\chi$ f.ü.. Sei $\{\varphi_j\}_j$ eine Dirac-Folge in $\mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt dann

$$\begin{aligned} f * \varphi_j(x) &= \int f(y)\varphi_j(x-y)dy = \int f(y)\check{\varphi}_j(y-x)dy \\ &= \int f(y)(\lambda_x\check{\varphi}_j)(y)dy \\ &= u_f(\lambda_x\check{\varphi}_j). \end{aligned}$$

Ebenso ist $g * \varphi_j(x) = u_g(\lambda_x\check{\varphi}_j)$. Aus $u_f = u_g$ folgt somit $f * \varphi_j = g * \varphi_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Mit Theorem 2.13 erhalten wir daher im Limes für $j \to \infty$, daß $f = g$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Q.E.D.

Nach Satz 4.1 ist also die Abbildung $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \ni f \mapsto u_f$ injektiv. Tatsächlich gilt nach dem tieferliegenden „Lebesgueschen Differentiationssatz" (siehe [18, Theorem 1.25]), daß für $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}$ im obigen Beweis sogar

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{j\to\infty} f * \varphi_j(x) \\ &= \lim_{j\to\infty} u_f(\lambda_x\check{\varphi}_j) \text{ für f.a. } x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Somit läßt sich f sogar aus u_f „berechnen".

Die Kernidee der Distributionentheorie ist nun die, nicht mehr die Funktion f zu betrachten, sondern die Linearform u_f. Nun könnte man versuchen, als „verallgemeinerte" Funktionen sämtliche Linearformen auf $\mathcal{D}$ oder $\mathcal{S}$ zu benutzen. Diese algebraischen Dualräume stellen sich allerdings als viel zu groß heraus, als daß man mit ihnen sinnvoll Analysis betreiben könnte. Der „richtige" Zugang zum Begriff der Distribution besteht darin, den jeweiligen Raum von Testfunktionen mit einer sinnvollen Topologie zu versehen, und dann als Distributionen sämtliche **stetigen** Linearformen auf diesem Raum zu betrachten. Da dies für den Raum $\mathcal{S}$ aller Schwartzfunktionen technisch einfacher ist als für $\mathcal{D}$, und da sich für die stetigen Linearformen auf $\mathcal{S}$, d.h. die sogenannten „temperierten Distributionen", sogar eine Fouriertransformation erklären läßt, wollen wir mit diesen beginnen.

4.2 Lokal-konvexe Vektorräume und die Topologie auf $\mathcal{S}$

Für $N \in \mathbb{N}$ sei die Norm $\|\cdot\|_{(N)}$ auf $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$\|\varphi\|_{(N)} := \max_{|\alpha|\le N} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{N/2}|D^\alpha\varphi(x)|, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Man beachte, daß es zu jedem $N \in \mathbb{N}$ eine Konstante $C_N \geq 1$ gibt so, daß

$$\frac{1}{C_N}(1+|x|^2)^{N/2} \leq \sum_{|\alpha|\leq N} |x^\alpha| \leq C_N(1+|x|^2)^{N/2} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n \tag{4.2}$$

Im folgenden wollen wir oftmals folgende Abkürzung verwenden:

$$\langle x \rangle := (1+|x|^2)^{1/2}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Man bezeichnet $\langle x \rangle$ gelegentlich auch als „japanische Klammer“ von x.
Nach (4.2) liegt eine C^∞-Funktion φ genau dann in $\mathcal{S}$, wenn $\|\varphi\|_{(N)} < \infty$ ist für alle $N \in \mathbb{N}$.
Es liegt daher nahe, auf $\mathcal{S}$ eine Topologie einzuführen derart, daß eine Folge $\{\varphi_k\}_k$ in $\mathcal{S}$ gegen $\varphi \in \mathcal{S}$ konvergiert genau dann, wenn $\lim\limits_{k\to\infty} \|\varphi - \varphi_k\|_{(N)} = 0$ ist für jedes $N \in \mathbb{N}$. Da wir später, im Zusammenhang mit anderen Räumen von Testfunktionen, sogar überabzählbare Familien von Halbnormen betrachten werden, wollen wir die Konstruktion der Topologie gleich in einem allgemeineren Rahmen durchführen.

Definitionen. Sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, und sei $\mathcal{N} = \{\|\cdot\|_i\}_{i\in I}$ eine Familie von Halbnormen auf V. $\mathcal{N}$ heiße **separierend**, wenn für jedes $v \in V$ gilt:

$$\|v\|_i = 0 \text{ für alle } i \in I \iff v = 0.$$

Dies gilt insbesondere, wenn eine der Halbnormen $\|\cdot\|_i$ bereits eine Norm ist, wie z.B. im Falle $V = \mathcal{S}$.
Mittels der Halbnormen in $\mathcal{N}$ können wir zunächst „verallgemeinerte Kugeln“ in V als endliche Durchschnitte von offenen Kugeln bzgl. endlich vieler der Halbnormen $\|\cdot\|_i$ wie folgt definieren: Für jede endliche Teilmenge $E = \{i_1, \ldots, i_m\}$ von I und jedes $r > 0$ sei

$$B_{E,r}(v) := \{w \in V : \|w-v\|_{i_k} < r \quad \text{für } k = 1, \ldots, m\}.$$

Eine Teilmenge $\mathcal{U} \subset V$ heiße dann **Umgebung** von $v \in V$, falls es eine „Kugel“ $B_{E,r}(v)$ gibt, welche in $\mathcal{U}$ enthalten ist, und eine Teilmenge $\mathcal{O} \subset V$ heiße **offen**, falls sie eine Umgebung eines jeden ihrer Punkte ist. Ganz ähnlich wie auf normierten Räumen überlegt man sich mit Hilfe der Dreiecksungleichung für Halbnormen leicht, daß z.B. die „Kugeln“ $B_{E,r}(v)$ stets offen sind. Wie man rasch sieht, bildet die Menge $\mathcal{T}_\mathcal{N}$ aller offenen Teilmengen dann eine **Topologie** auf V, d.h. sowohl die leere Menge als auch ganz V sind offen, der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen, und die Vereinigung einer beliebigen Familie offener Mengen ist offen.
Die Mengen $B_{E,r}(v)$ bilden bei festgehaltenem v offenbar eine **Umgebungsbasis** von v, d.h. zu jeder Umgebung $\mathcal{U}$ von v gibt es eine derartige „Kugelumgebung“ von v, welche in $\mathcal{U}$ liegt.

Es sei angemerkt, daß wir anstelle der verallgemeinerten Kugeln $B_{E,r}(v)$ auch die Familie aller endlichen Durchschnitte von offenen Kugeln beliebigen Radius bzgl. endlich vieler der Halbnormen $\|\cdot\|_i$ hätten benutzen können, d.h. verallgemeinerte Kugeln der Gestalt

$$\{w \in V : \|w - v\|_i < r_i \quad \text{für } i \in E\},$$

wobei die $r_i > 0, i \in E$, beliebige positive Zahlen sind. Diese bilden nämlich offenbar eine Basis für dieselbe Topologie.
Da wir voraussetzen, daß die Familie von Halbnormen $\mathcal{N}$ separierend ist, ist die Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{N}}$ Hausdorffsch. Sind nämlich $v \neq w$ in V, so gibt es ein $i \in I$ mit $r := \|v - w\|_i > 0$. Setzen wir $E := \{i\}$, so trennen die offenen Kugeln $B_{E,r/2}(v)$ und $B_{E,r/2}(w)$ die Punkte v und w.
Für ein-elementige Mengen $E = \{i\}$ werden wir die Kugel $B_{E,r}(v)$ gelegentlich auch mit $B_{i,r}(v)$ bezeichnen.
Eine Folge $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ in V konvergiert dann definitionsgemäß gegen $v \in V$, wenn es zu jeder Umgebung $\mathcal{U}$ von v einen Index j_0 gibt so, daß $v_j \in \mathcal{U}$ für alle $j \geq j_0$.

Lemma 4.2 *Die Folge $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ in V konvergiert dann und nur dann gegen $v \in V$, wenn gilt:*

$$\lim_{j\to\infty} \|v_j - v\|_i = 0 \quad \textit{für alle} \;\; i \in I. \tag{4.3}$$

Beweis. Gilt (4.3), und ist $\mathcal{U}$ eine Umgebung von v, so gibt es eine „Kugel“ $B_{E,r}(v) \subset \mathcal{U}$. Zu jedem $k = 1, \ldots, m$ gibt es dann nach (4.3) einen Index j_k so, daß $\|v_j - v\|_{i_k} < r$ für alle $j \geq j_k$. Für alle $j \geq \max\{j_1, \ldots, j_m\}$ ist dann $v_j \in B_{E,r}(v) \subset \mathcal{U}$. Somit konvergiert v_j gegen v.
Da jede Kugel $B_{\{i\},r}(v)$ offen ist, ist die Umkehrung klar.

Q.E.D.

Lemma 4.2 zeigt, daß die von uns konstruierte Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{N}}$ den angestrebten Konvergenzbegriff für Folgen in V liefert. Dies gilt insbesondere für den Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, falls wir als Familie von Halbnormen $\mathcal{N}$ die Folge $\{\|\cdot\|_{(N)}\}_{N\in\mathbb{N}}$ wählen.
Vom $\mathbb{R}^n$ her, oder allgemeiner von der Theorie metrischer Räume X her, ist man es gewohnt, daß eine Teilmenge $A \subset X$ abgeschlossen ist dann und nur dann, wenn der Grenzwert einer jeden Folge in A, welche in X konvergiert, stets in A liegt. Damit lassen sich also durch den Konvergenzbegriff für Folgen bereits die abgeschlossenen Mengen charakterisieren, und damit auch die Topologie, da ja die offenen Mengen gerade die Komplemente von abgeschlossenen Mengen sind.
Leider ist im Falle einer überabzählbaren Familie von Halbnormen $\mathcal{N}$ i.a. die Topologie nicht mehr durch den Konvergenzbegriff für Folgen festgelegt, da man dann i.a. keine abzählbaren Umgebungsbasen mehr hat. Man muß dann den Begriff der Folge zu dem des Netzes verallgemeinern. Wir wollen darauf nur kurz eingehen, da wir

später sehen werden, daß man sich im Rahmen der Distributionentheorie letzendlich doch auf den Begriff der Folgen-Konvergenz beschränken kann.

Definitionen. Eine Menge I heiße **gerichtet**, wenn sie mit einer Relation $\leqslant$ mit den folgenden Eigenschaften versehen ist:
(i) $i \leqslant i$ für alle $i \in I$;
(ii) aus $i_1 \leqslant i_2$ und $i_2 \leqslant i_3$ folgt $i_1 \leqslant i_3$;
(iii) zu $i_1, i_2 \in I$ gibt es stets ein $i_3 \in I$ mit $i_1 \leqslant i_3$ und $i_2 \leqslant i_3$.

Beispiele:

(a) $\mathbb{N}$, versehen mit der gewöhnlichen Ordnung $\leq$, ist gerichtet.

(b) Wir betrachten offene Intervalle $]0, \varepsilon_0[$, wie sie z.B. in der Definition der Dirac-Familie auftauchen, oftmals als gerichtete Mengen, indem wir $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2$ setzen, falls bzgl. der gewöhnlichen Ordnung $\leq$ gilt: $\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$.

(c) Sei X ein topologischer Raum, und sei $x \in X$. Dann bildet die Menge $\mathcal{U}(x)$ aller Umgebungen von x eine gerichtete Menge bzgl. der Inklusion, d.h. $U_1 \leqslant U_2$ genau dann, wenn $U_2 \subset U_1$.

Ein **Netz** in einer Menge X ist eine Abbildung $\phi : I \to X$ einer gerichteten Menge I in die Menge X. Wir schreiben statt ϕ hier suggestiver $\{x_i\}_{i \in I}$, mit $x_i := \phi(i)$. Ein Netz $\{x_i\}_{i \in I}$ in einem topologischen Raum X **konvergiere** gegen $x \in X$, geschrieben $x_i \to x$ oder auch $x = \lim x_i$, wenn es zu jeder Umgebung $\mathcal{U}$ von x ein $i_0 \in I$ gibt so, daß $x_i \in \mathcal{U}$ für alle $i \geqslant i_0$.

Beispiele:

(a) Jede Folge $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ ist ein Netz mit Indexmenge $\mathbb{N}$. Der übliche Konvergenzbegriff für Folgen stimmt hier mit dem für das Netz $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ überein.

(b) Sei X ein topologischer Raum, und bezeichne wie zuvor $\mathcal{U}(x)$ die gerichtete Menge aller Umgebungen von x. Für jedes $U \in \mathcal{U}(x)$ sei $x_U \in U$. Dann konvergiert das Netz $\{x_U\}_{U \in \mathcal{U}(x)}$ gegen x.

Man kann zeigen, daß eine Teilmenge A eines topologischen Hausdorff-Raumes X abgeschlossen ist genau dann, wenn jedes Netz in A, welches in X konvergent ist, gegen einen Punkt aus A konvergiert (Übung).

Sei nun wieder V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, und seien $\mathcal{N} = \{\|\cdot\|_i\}_{i \in I}$ und $\mathcal{N}' = \{\|\cdot\|'_j\}_{j \in J}$ zwei separierende Familien von Halbnormen auf V. Diese beiden Familien von Halbnormen heißen **äquivalent,** wenn es zu jedem $i \in I$ eine endliche Teilmenge $E \subset J$ sowie eine Konstante $C > 0$ gibt so, daß

$$\|v\|_i \leq C \sum_{j \in E} \|v\|'_j, \quad \text{für alle } v \in V, \tag{4.4}$$

und wenn entsprechend auch jede der Halbnormen aus $\mathcal{N}'$ durch endlich viele der Halbnormen aus $\mathcal{N}$ kontrolliert werden kann. Man sieht sehr leicht, daß hierdurch eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller separierenden Familien von Halbnormen auf V definiert wird.

Beispiele 4.3 (a) Zu jeder separierenden Familie von Halbnormen $\mathcal{N} = \{\|\cdot\|_i\}_{i\in I}$ auf V kann man eine neue Familie $\tilde{\mathcal{N}} := \{\|\cdot\|_E\}_{E\in\mathcal{F}}$ definieren mit Indexmenge $\mathcal{F} := \{E \subset I : E \text{ ist endlich}\}$, indem man setzt

$$\|v\|_E := \max_{i\in E} \|v\|_i.$$

Wegen $\|v\|_E \le \sum_{i\in E} \|v\|_i$ ist diese offensichtlich äquivalent zu $\mathcal{N}$. Die Familie $\tilde{\mathcal{N}}$ besitzt die folgende zusätzliche Eigenschaft:

Für endlich viele Indices $E_1, \ldots, E_m \in \mathcal{F}$ ist stets $\max_{j=1,\ldots,m} \|\cdot\|_{E_j} \in \tilde{\mathcal{N}}$.

Insbesondere folgt daraus, daß die verallgemeinerten Kugeln $B_{E,r}(v) = \{w \in V : \|w - v\|_E < r\}$, $E \in \mathcal{F}, r > 0$, jeweils bereits Kugeln bzgl. nur einer der neuen Halbnormen, nämlich $\|\cdot\|_E$, sind. Diese bilden also bereits eine Umgebungsbasis von $v \in V$.

(b) Auf dem Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sind z.B. folgende Familien von Halbnormen äquivalent (Übung):

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{(N)} &:= \max_{|\alpha|\le N} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \langle x\rangle^N |D^\alpha \varphi(x)|, \quad N \in \mathbb{N},\\
\|\varphi\|_{\alpha,\beta} &:= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)|, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n,\\
\|\varphi\|_{(\alpha,\beta)} &:= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^\beta (x^\alpha \varphi)(x)|, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.
\end{aligned}$$

Seien nun V und W zwei Vektorräume über $\mathbb{K}$, versehen mit den separierenden Familien von Halbnormen $\mathcal{N} = \{\|\cdot\|_i\}_{i\in I}$, bzw. $\mathcal{N}' = \{\|\cdot\|'_j\}_{j\in J}$. Für lineare Abbildungen von V nach W liefert der folgende Satz eine „analytische“ Kennzeichnung der Stetigkeit.

Satz 4.4 *(a) Sei*

$$T : V \to W$$

ein linearer Homomorphismus. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) T ist stetig.

(ii) T ist stetig in $0 \in V$.

(iii) Zu jedem $j \in J$ gibt es eine endliche Indexmenge $\{i_1, \ldots, i_m\} \subset I$ sowie eine Konstante $C \geq 0$ so, daß

$$\|Tv\|'_j \leq C \sum_{k=1,\ldots,m} \|v\|_{i_k} \quad \textit{für alle } v \in V. \tag{4.5}$$

(b) Eine Linearform $u : V \to \mathbb{K}$ ist stetig genau dann, wenn es eine endliche Indexmenge $\{i_1, \ldots, i_m\} \subset I$ sowie $C \geq 0$ gibt so, daß

$$|u(v)| \leq C \sum_{k=1,\ldots,m} \|v\|_{i_k} \quad \textit{für alle } v \in V.$$

Beweis. Da (b) den Spezialfall $W = \mathbb{K}$ darstellt, genügt es, (a) zu beweisen.
(i) $\Longrightarrow$ *(ii)* ist klar.
(ii) $\Longrightarrow$ *(iii)* : Ist T stetig in 0, und ist $j \in J$, so wollen wir (4.5) beweisen. Indem wir gemäß Beispiel 4.3 (a) zu $\tilde{\mathcal{N}}$ und $\tilde{\mathcal{N}}'$ übergehen, dürfen wir o.B.d.A. annehmen, daß das Maximum von je endlich vielen Halbnormen jeweils wieder eine unsere Halbnormen (aus $\mathcal{N}$ bzw. $\mathcal{N}'$) ist. Dann genügt es zu zeigen, daß ein Index $i \in I$ und eine Konstante $C \geq 0$ existieren so, daß

$$\|Tv\|'_j \leq C\|v\|_i \quad \text{für alle } v \in V. \tag{4.6}$$

Nun ist die Kugel $B'_{j,1}(0)$ eine Umgebung der 0, so daß ihr Urbild $T^{-1}(B'_{j,1}(0))$ aufgrund der Stetigkeit von T in 0 ebenfalls eine Umgebung der 0 ist. Somit gibt es eine Kugel $B_{i,r}(0)$, welche unter T in $B'_{j,1}(0)$ abgebildet wird, d.h. aus $\|v\|_i < r$ folgt $\|Tv\|'_j < 1$.
Mit Hilfe eines Skalierungsarguments folgt hieraus die die Ungleichung (4.6), z.B. mit $C := \frac{2}{r}$:
Ist nämlich $\|v\|_i \neq 0$, und setzen wir $u := \frac{r}{2\|v\|_i} v$, so ist $\|u\|_i < r$, folglich $\|Tu\|'_j < 1$. Aufgrund der Linearität von T folgern wir, daß

$$\|Tv\|'_j \leq \frac{2}{r} \|Tu\|'_j \|v\|_i < \frac{2}{r} \|v\|_i.$$

Ist schließlich $\|v\|_i = 0$, so ist $\|tv\|_i < r$ für jedes $t > 0$, und somit $t\|Tv\|'_j = \|T(tv)\|'_j < 1$ für jedes $t > 0$, woraus $Tv = 0$ folgt. Damit gilt obige Ungleichung auch in diesem Fall.
(iii) $\Longrightarrow$ *(i)* : Aus (4.6) folgt wegen der Linearität von T sofort $B_{i,r/C}(v) \subset T^{-1}(B'_{j,r}(Tv))$, für jedes $r > 0$ und $v \in V$, und somit die Stetigkeit von T in jedem Punkt $v \in V$.

Q.E.D.

Das direkte Produkt $V \times W$ der Vektorräume V und W wird mit der Familie von Halbnormen $\|(v, w)\|_{i,j} := \|v\|_i + \|w\|'_j$, $(v, w) \in V \times W$, $\quad (i, j) \in I \times J$, versehen. Damit gilt das

Korollar 4.5 *Die Vektorraumoperationen*

$$\begin{aligned} \mathrm{add}: &\quad V \times V \to V, \quad (v, w) \mapsto v + w, \\ \sigma: &\quad \mathbb{K} \times V \to V, \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda v \end{aligned}$$

sind stetig.

Beweis. Für $v, w \in V$ und jedes $i \in I$ gilt offenbar $\|\mathrm{add}(v, w)\|_i = \|v + w\|_i \leq \|v\|_i + \|w\|_i = \|(v, w)\|_{i,i}$. Da add linear ist, folgt die Stetigkeit von add damit sofort aus Satz 4.4.
Ähnlich argumentiert man für σ.

Q.E.D.

Mit Hilfe von Satz 4.4 kann man auch leicht charakterisieren, wann zwei Familien von Halbnormen auf einem Vektorraum V dieselbe Topologie erzeugen:

Satz 4.6 *Seien $\mathcal{N} = \{\|\cdot\|_i\}_{i \in I}$ und $\mathcal{N}' = \{\|\cdot\|'_j\}_{j \in J}$ zwei separierende Familien von Halbnormen auf V. Dann stimmen die von ihnen erzeugten Topologien $\mathcal{T}_{\mathcal{N}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{N}'}$ überein dann und nur dann, wenn $\mathcal{N}$ und $\mathcal{N}'$ äquivalent sind.*

Beweis. Sei die $T := \mathrm{Id}$ die identische Abbildung auf V. Wir bezeichnen V, versehen mit der Familie von Halbnormen $\mathcal{N}$, ebenfalls mit V, und versehen mit $\mathcal{N}'$ mit V'. Dann erzeugen $\mathcal{N}$ und $\mathcal{N}'$ offenbar genau dann dieselbe Topologie, wenn $T : V \to V'$ und $T^{-1} : V' \to V$ stetig sind. Dies ist nach Satz 4.4 wiederum gleichbedeutend damit, daß die Familien von Halbnormen $\mathcal{N}$ und $\mathcal{N}'$ äquivalent sind.

Q.E.D.

Einen Vektorraum, auf dem eine Topologie definiert ist, bzgl. der einpunktige Mengen abgeschlossen sind, und auf dem die Vektorraumoperationen stetig sind, bezeichnet man als **topologischen Vektorraum.** Da in V, versehen mit der Familie von Halbnormen $\mathcal{N}$, die konvexen „Kugeln“ $B_{E,r}(v)$ eine Umgebungsbasis des Punktes v bilden, bezeichnet man V auch als **lokal-konvexen** (topologischen) Vektorraum.

Wir betrachten nun noch den wichtigen Sonderfall, daß die Familie von Halbnormen $\mathcal{N} = \{\|\cdot\|_i\}_{i \in I}$ höchstens abzählbar ist, wie z.B. für $V = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann läßt sich auf V sogar eine Metrik definieren, welche ebenfalls die Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{N}}$ liefert. Man sagt dann auch, der topologische Vektorraum sei **metrisierbar.**
Es bezeichne dazu

$$d'_i(v, w) := \|v - w\|_i, \quad v, w \in V,$$

die durch $\|\cdot\|_i$ induzierte Halbmetrik auf V. Durch

$$d_i(v, w) := \frac{d'_i(v, w)}{1 + d'_i(v, w)}$$

wird dann eine zu d'_i äquivalente Halbmetrik definiert, mit $d_i \leq 1$. Wähle dann eine abzählbare Familie $\{\rho_i\}_{i\in I}$ positiver Zahlen $\rho_i > 0$ so, daß $\sum_i \rho_i \leq 1$. Im Falle $I = \mathbb{N}$ kann man z.B. $\rho_i := 2^{-i-1}$ wählen. Wegen der Separiertheit von $\mathcal{N}$ wird dann schließlich durch

$$d(v,w) := \sum_{i\in I} \rho_i d_i(v,w) \tag{4.7}$$

eine Metrik $d = d_{\mathcal{N}}$ auf V definiert. Diese ist offenbar **invariant**, d.h.

$$d(v_1 + w, v_2 + w) = d(v_1, v_2) \qquad \text{für alle } v_1, v_2, w \in V. \tag{4.8}$$

Lemma 4.7 *(a) Sei $\{v_k\}_k$ eine Folge in V, und sei $v \in V$. Dann gilt $\lim_{k\to\infty} d(v_k, v) = 0$ dann und nur dann, wenn*

$$\lim_{k\to\infty} \|v_k - v\|_i = 0 \quad \textit{für alle} \;\; i \in I. \tag{4.9}$$

(b) Eine Folge $\{v_k\}_k$ in V ist genau dann eine Cauchy-Folge bzgl. der Metrik d, wenn sie eine Cauchy-Folge bzgl. jeder Halbnorm $\|\cdot\|_i$, $i \in I$, ist.

Beweis. (a) Sei $\varepsilon > 0$. Gilt (4.9) für jedes $i \in I$, so wähle eine endliche Teilmenge $M \subset I$ so, daß $\sum_{i\in I\setminus M} \rho_i < \varepsilon/2$, und anschließend $k_0 \in \mathbb{N}$ so, daß $\|v - v_k\|_i < \varepsilon/2$ für alle $k \geq k_0$ und $i \in M$. Für $k \geq k_0$ folgt dann

$$\begin{aligned} d(v, v_k) &\leq \sum_{i\in M} \rho_i d_i(v, v_k) + \sum_{i\in I\setminus M} \rho_i \cdot 1 \\ &\leq \sum_{i\in M} \rho_i \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Somit gilt $\lim\limits_{k\to\infty} d(v, v_k) = 0$.
Da andererseits stets

$$d_i(v,w) \leq \frac{1}{\rho_i}\, d(v,w) \tag{4.10}$$

gilt, folgt für jedes $i \in I$ aus $\lim\limits_{k\to\infty} d(v, v_k) = 0$ offenbar $\lim\limits_{k\to\infty} d_i(v, v_k) = 0$, und somit auch

$$\lim_{k\to\infty} \|v - v_k\|_i = \lim_{k\to\infty} d'_i(v, v_k) = 0.$$

(b) wird analog gezeigt.

Q.E.D.

Bemerkung 4.8 Ist $\mathcal{N}$ höchstens abzählbar, so besitzt jeder Punkt in V eine abzählbare Umgebungsbasis. Damit ist eine Menge abgeschlossen in V genau dann, wenn sie Folgen-abgeschlossen ist, und eine Abbildung $F : V \to X$ in einen topologischen Raum X ist stetig genau dann, wenn sie **Folgen-stetig** ist, d.h. wenn für jede konvergente Folge $\{v_j\}_j$ in V gilt $F(\lim_{j\to\infty} v_j) = \lim_{j\to\infty} F(v_j)$.

Definition. Ist $\mathcal{N}$ höchstens abzählbar, und ist d eine wie oben zu $\mathcal{N}$ konstruierte Metrik auf V, so bezeichnet man V als **Fréchetraum**, falls (V, d) ein vollständiger metrischer Raum ist.
Besteht $\mathcal{N}$ nur aus einer Norm $\|\cdot\|$, so ist $(V, \mathcal{N})$ ein Fréchetraum genau dann, wenn $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist.

Satz 4.9 $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \{\|\cdot\|_{(N)}\}_N)$ *ist ein Fréchetraum.*

Beweis. Sei $\{\varphi_k\}_k$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{S}$. Dann ist sie nach Lemma 4.7 eine Cauchyfolge bzgl. jeder Norm $\|\cdot\|_{(N)}$. Mit Hilfe von Standardargumenten folgert man, daß es daher zu jedem $N \in \mathbb{N}$ eine wohlbestimmte Funktion

$$\varphi_{(N)} \in \mathcal{S}^N := \{f \in C^N(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{(N)} < \infty\}$$

gibt so, daß

$$\lim_{k\to\infty} \|\varphi_{(N)} - \varphi_k\|_{(N)} = 0. \tag{4.11}$$

Da die Folge der Normen $\|\cdot\|_{(N)}$ auf $\mathcal{S}$ jedoch monoton wächst, d.h.

$$\|\varphi\|_{(N)} \leq \|\varphi\|_{(N+1)}, \tag{4.12}$$

gilt $\varphi_{(N)} = \varphi_{(N+1)}$ für jedes $N \in \mathbb{N}$. Setzen wir $\varphi := \varphi_{(0)}$, so ist also $\varphi_{(N)} = \varphi$ für jedes $N \in \mathbb{N}$. Damit liegt φ in $\mathcal{S}$, und es gilt $\lim\limits_{k\to\infty} \|\varphi - \varphi_k\|_{(N)} = 0$ für jedes $N \in \mathbb{N}$. Folglich konvergiert die Folge $\{\varphi_k\}_k$ in $\mathcal{S}$ gegen φ.

Q.E.D.

Die in dem folgenden Satz beschriebenen linearen Endomorphismen von $\mathcal{S}$ in sich sind für die Distributionentheorie von besonderer Bedeutung.

Definitionen. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ habe **polynomiales Wachstum**, falls es Konstanten $C \geq 0,\ N \in \mathbb{N}$ gibt so, daß

$$|f(x)| \leq C(1 + |x|^2)^{N/2} = C\langle x\rangle^N \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ besitze **moderates Wachstum**, wenn jede partielle Ableitung $D^\alpha f$ polynomiales Wachstum hat. Z.B. besitzen Polynomfunktionen moderates Wachstum.

Satz 4.10 *Die im folgenden aufgeführten linearen Endomorphismen von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}$ sind stetig:*

(a) Jede partielle Ableitung D^α, $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

(b) Jeder Multiplikationsoperator

$$M_f : \varphi \mapsto f\varphi, \quad \varphi \in \mathcal{S},$$

mit einer C^∞-Funktion f moderaten Wachstums.

(c) Die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ und die Fourier-Kotransformation $\overline{\mathcal{F}}$.

(d) Die Faltung

$$C_\psi : \varphi \mapsto \psi * \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{S},$$

mit einer Schwartzfunktion $\psi \in \mathcal{S}$.

Beweis. (a) ist unmittelbar klar, da

$$\|D^\alpha \varphi\|_{(N)} \leq \|\varphi\|_{(N+|\alpha|)}.$$

(b) Sei $\varphi \in \mathcal{S}$, und f besitze moderates Wachstum. Für $M \in \mathbb{N}$ und $|\alpha| \leq M$ gilt dann

$$\langle x\rangle^M D^\alpha(f\varphi)(x) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \langle x\rangle^M D^\beta f(x) D^{\alpha-\beta}\varphi(x).$$

Da f moderates Wachstum hat, gibt es Konstanten $C_1 > 0$, $\ell \in \mathbb{N}$ so, daß

$$|D^\beta f(x)| \leq C_1 \langle x\rangle^\ell \text{ für alle } \beta \leq \alpha.$$

Ferner ist $|\alpha - \beta| \leq |\alpha| \leq M$ für $\beta \leq \alpha$, also

$$|D^{\alpha-\beta}\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_{(M+N)} \langle x\rangle^{-N} \quad \text{für alle } N \in \mathbb{N}.$$

Insgesamt folgt

$$\begin{aligned} \langle x\rangle^M |D^\alpha(f\varphi)(x)| &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} C_1 \langle x\rangle^{M+\ell} \cdot \|\varphi\|_{(M+N)} \langle x\rangle^{-N} \\ &\leq C \|\varphi\|_{(M+N)} \langle x\rangle^{M+\ell-N}. \end{aligned}$$

Wählt man $N \geq M + \ell$, so folgt also

$$\|f\varphi\|_{(M)} \leq C\|\varphi\|_{(M+N)}.$$

Somit ist M_f stetig.

(c) Wegen $\overline{\mathcal{F}}\varphi = (\mathcal{F}\varphi)^\vee$ genügt es, $\mathcal{F}$ zu betrachten. Sei $M \in \mathbb{N}$. Wir wollen beweisen, daß für $\ell > n$

$$\|\hat{\varphi}\|_{(M)} \leq C\|\varphi\|_{(M+\ell)}.$$

Nach (4.2) reicht es zu zeigen, daß für $\ell > n$

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\xi^\beta D^\alpha \hat{\varphi}(\xi)| \leq C\|\varphi\|_{(M+\ell)}, \tag{4.13}$$

für alle α, β mit $|\alpha| \leq M,\ |\beta| \leq M$. Nach Korollar 2.20 ist aber

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\xi^\beta D^\alpha \hat{\varphi}(\xi)| = \|\mathcal{F}(D^\beta(x^\alpha\varphi))\|_\infty \leq \|D^\beta(x^\alpha\varphi)\|_1. \tag{4.14}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} |D^\beta(x^\alpha\varphi)(x)| &= |\sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} (D^\gamma x^\alpha) D^{\beta-\gamma}\varphi(x)| \\ &\leq C'(1+|x|^2)^{|\alpha|/2} \max_{\rho\leq\beta} |D^\rho\varphi(x)| \\ &\leq C''\langle x\rangle^{M+\ell} \max_{|\rho|\leq M} |D^\rho\varphi(x)| \cdot \langle x\rangle^{-\ell} \\ &\leq C''\|\varphi\|_{(M+\ell)}\langle x\rangle^{-\ell}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt $\|D^\beta(x^\alpha\varphi)\|_1 \leq C\|\varphi\|_{(M+\ell)}$ und somit (4.14), falls $\ell > n$.
(d) Für $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ gilt wegen der Fourier-Umkehrformel (vergl. Theorem 2.28)

$$\varphi * \psi = (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}(\widehat{\varphi * \psi}) = (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}(\hat{\varphi}\hat{\psi}),$$

also

$$C_\psi(\varphi) = (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}} \circ M_{\hat{\psi}} \circ \mathcal{F}(\varphi).$$

Da $\mathcal{F}, \overline{\mathcal{F}}$ und $M_{\hat{\psi}}$ nach (b) und (c) stetig sind, ist somit auch C_ψ stetig.

Q.E.D.

Kürzere Beweise, welche allerdings auch weniger Information liefern, lassen sich mit dem Satz vom abgeschlossenen Graphen führen (siehe [12]).

Definition Eine Linearform auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, welche bzgl. der Topologie von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ stetig ist, bezeichnet man als **temperierte Distribution**. Mit $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ bezeichnen wir den $\mathbb{C}$-Vektorraum aller temperierten Distributionen, d.h. den topologischen Dualraum von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Eine Linearform u auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist also eine temperierte Distribution dann und nur dann, wenn es Konstanten $C \geq 0$ und $N \in \mathbb{N}$ gibt so, daß

$$|u(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_{(N)} \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{4.15}$$

Man versieht $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit der schwach*-Topologie. Diese ist allgemeiner wie folgt definiert:
Ist V ein topologischer Vektorraum über $\mathbb{K}$, und bezeichnet V' seinen **topologischen Dualraum**, d.h. den Raum aller stetigen Linearformen $v' : V \to \mathbb{K}$, so erhält man für jedes $v \in V$ durch

$$\|v'\|_v := |v'(v)|, \quad v' \in V',$$

eine Halbnorm auf V'. Die **schwach*-Topologie** auf V' ist dann die lokal-konvexe Topologie, welche durch die Familie der Halbnormen $\{\|\cdot\|_v\}_{v\in V}$ definiert wird, welche offenbar separiert ist. Nach Satz 4.4 ist dann für jedes $v \in V$ die Punktauswertung

$$V' \ni v' \to v'(v) \in \mathbb{K}$$

stetig auf V', und man überlegt sich leicht, daß die schwach*-Topologie gerade die gröbste Topologie ist, bzgl. der alle Punktauswertungen stetig sind. Insbesondere konvergiert eine Folge oder ein Netz $\{v'_j\}_j$ in V' gegen ein $v' \in V'$ dann und nur dann, wenn für jedes $v \in V$ gilt:

$$\lim v'_j(v) = v'(v).$$

Die schwach*-Topologie ist also die **„Topologie der punktweisen Konvergenz“**. Beispielsweise konvergiert eine Folge oder ein Netz $\{u_j\}_j$ temperierter Distributionen gegen die temperierte Distribution u dann und nur dann, wenn für jede Schwartzfunktion φ gilt:

$$\lim u_j(\varphi) = u(\varphi).$$

Als unmittelbare Folge des Satzes von Banach-Steinhaus, welcher auch in Fréchetträumen gilt (siehe z.B. [12], Theorem 2.8), erhalten wir

Satz 4.11 *Ist $\{u_j\}_j$ eine Folge temperierter Distributionen, und existiert für jedes $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ der Grenzwert*

$$u(\varphi) := \lim_{j\to\infty} u_j(\varphi),$$

so ist u ebenfalls eine temperierte Distribution.

Beispiele 4.12 (a) Eine Funktion $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ heiße **temperiert**, falls es Konstanten $C \geq 0,\ N \in \mathbb{N}$ gibt so, daß

$$\int_{|x|\leq r} |f(x)|dx \leq Cr^N \quad \text{für alle } r \geq 1. \tag{4.16}$$

Z.B. ist jede Funktion moderaten Wachstums temperiert, aber auch jede L^p-Funktion (wieso?).

Ist f temperiert, so bezeichne u_f die Linearform

$$u_f(\varphi) := \int f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}, \tag{4.17}$$

auf $\mathcal{S}$. Dann ist u_f stetig, denn:

Sei $M > N$. Zunächst ist

$$|\varphi(x)| \le \|\varphi\|_{(M)} \langle x \rangle^{-M}.$$

Mit (4.16) folgt daher

$$\begin{aligned}
|u_f(\varphi)| &\le \int |f(x)||\varphi(x)|dx = \int_{|x|\le 1} |f(x)\varphi(x)|dx \\
&\qquad\qquad + \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^j \le |x| \le 2^{j+1}} |f(x)\varphi(x)|dx \\
&\le \|\varphi\|_{(M)} \left\{ \int_{|x|\le 1} |f(x)|dx + \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^j \le |x| \le 2^{j+1}} |f(x) 2^{-jM}|dx \right\} \\
&\le \|\varphi\|_{(M)} \left\{ C_1 + C \sum_{j=0}^{\infty} 2^{(j+1)N} 2^{-jM} \right\} \\
&= C_2 \|\varphi\|_{(M)},
\end{aligned}$$

da $2^{(j+1)N}2^{-jM} = 2^N 2^{-(M-N)j}$, wobei $M-N > 0$. Somit ist u_f eine temperierte Distribution.

Wir werden daher ab jetzt die temperierte Funktion f auch als temperierte Distribution u_f betrachten, und kurz auch $f(\varphi)$ anstelle von $u_f(\varphi)$ schreiben.

(b) Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Mit δ_x bezeichnen wir die Linearform

$$\delta_x(\varphi) := \varphi(x), \quad \varphi \in \mathcal{S},$$

auf $\mathcal{S}$. Wegen $|\varphi(x)| \le \|\varphi\|_{(0)}$ ist δ_x stetig.

Man bezeichnet die temperierte Distribution δ_x als das **Punktmaß** im Punkte x, oder auch als **Diracsche δ-Funktion** in x.

Ist allgemeiner μ ein **beschränktes Radonsches Maß** auf $\mathbb{R}^n$, d.h. eine stetige Linearform auf $(C_\infty(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$, so ist für $\varphi \in \mathcal{S} \subset C_\infty(\mathbb{R}^n)$ insbesondere

$$|\mu(\varphi)| \le \|\mu\|_1 \|\varphi\|_\infty = \|\mu\|_1 \|\varphi\|_{(0)},$$

wobei $\|\mu\|_1$ die Operatornorm der Linearform $\mu : C_\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ bezeichne. Somit ist $\mu|_{\mathcal{S}}$ eine temperierte Distribution, welche man meist wieder kurz mit μ bezeichnet.

(c) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, und setze wieder $f_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} f(\frac{x}{\varepsilon}),\ \varepsilon > 0$. Für jedes $\varphi \in \mathcal{S}$ gilt dann

$$f_\varepsilon(\varphi) = \int \varepsilon^{-n} f(\tfrac{x}{\varepsilon})\varphi(x)\,dx = \int f(x)\varphi(\varepsilon x)\,dx,$$

so daß nach dem Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(\varphi) = \int f(x)dx\,\varphi(0).$$

Somit erhalten wir

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon = (\int f(x)dx)\,\delta_0 \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Insbesondere gilt $\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon = \delta_0$ für Dirac-Familien.

(d) Seien $M, N \in \mathbb{N}$, und sei u_λ die durch $u_\lambda(x) := \lambda^N x^M e^{i\lambda x}$ auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion. Für jedes $\varphi \in \mathcal{S}$ ist dann $u_\lambda(\varphi) = \lambda^N \widehat{(x^M\varphi)}(-\lambda)$, und da offenbar $\widehat{(x^M\varphi)}$ in $\mathcal{S}$ liegt, folgt:

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} u_\lambda = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

Obwohl jede der Funktionen u_λ polynomial anwächst, konvergiert die Familie der temperierten Distributionen u_λ wegen des oszillierenden Faktors $e^{i\lambda x}$ dennoch gegen Null.

Bemerkung Radonsche Maße können mit den endlichen, regulären Borelschen Maßen auf dem $\mathbb{R}^n$ identifiziert werden. Siehe hierzu [13].

Um die „Dualität“ zwischen $\mathcal{S}'$ und $\mathcal{S}$ deutlicher zum Ausdruck zu bringen, schreibt man oft auch

$$\langle u, \varphi \rangle := u(\varphi), \qquad \text{für } u \in \mathcal{S}',\ \varphi \in \mathcal{S};$$

entsprechend schreiben wir $\langle f, \varphi \rangle := u_f(\varphi)$, falls f eine temperierte Funktion ist. Offenbar ist dann

$$\langle f, \varphi \rangle = \int f(x)\varphi(x)dx. \tag{4.18}$$

4.3 Operationen mit temperierten Distributionen

Viele Operationen, die wir für Funktionen kennen, wie z.B. die Differentiation, die Multiplikation oder Faltung mit geeigneten Funktionen, oder auch die Fouriertransformation, lassen sich auf temperierte Distributionen übertragen, und zwar nach folgendem Schema. Im folgenden bezeichnen wir lineare Homomorphismen von Vektorräumen auch als **lineare Operatoren**.

Definition. Sei $T : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ ein linearer Operator, zu dem es einen stetigen linearen Operator ${}^tT : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ gebe derart, daß

$$\langle T\psi, \varphi\rangle = \langle \psi, {}^tT\varphi\rangle \quad \text{für alle } \varphi, \psi \in \mathcal{S}. \tag{4.19}$$

Dann definiert man für $u \in \mathcal{S}'$ die Linearform Tu auf $\mathcal{S}$ durch

$$(Tu)(\varphi) = \langle Tu, \varphi\rangle := \langle u, {}^tT\varphi\rangle, \ \varphi \in \mathcal{S}, \tag{4.20}$$

d.h. es ist $Tu = u \circ {}^tT$. Dies zeigt, daß Tu stetig auf $\mathcal{S}$ ist, d.h. $Tu \in \mathcal{S}'$.
Wegen (4.19) bezeichnet man übrigens ${}^tT$ als den **formal zu T transponierten Operator**.
Für $u = u_f$, mit $f \in \mathcal{S}$, gilt dann offenbar nach (4.19)

$$\begin{aligned}\langle Tu_f, \varphi\rangle &= \langle u_f, {}^tT\varphi\rangle = \langle f, {}^tT\varphi\rangle \\ &= \langle Tf, \varphi\rangle = \langle u_{Tf}, \varphi\rangle,\end{aligned}$$

d.h. es gilt

$$Tu_f = u_{Tf} \quad \text{für alle } f \in \mathcal{S}. \tag{4.21}$$

Unsere Definition von Tu setzt also die von T fort von $\mathcal{S}$ auf $\mathcal{S}'$ (streng genommen hätten wir diese Fortsetzung mit einem anderen Symbol bezeichnen müssen!). Der durch (4.20) definierte Operator $T : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ ist stetig bzgl. der schwach*-Topologie, denn:
Ist $u = \lim u_j$ in $\mathcal{S}'$, so gilt für $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned}(Tu)(\varphi) &= u({}^tT\varphi) = \lim u_j({}^tT\varphi) \\ &= \lim (Tu_j)(\varphi),\end{aligned}$$

d.h. $Tu = \lim Tu_j$ in $\mathcal{S}'$. Beachte hier, daß eine Abbildung f zwischen zwei beliebigen topologischen Räumen X und Y stetig ist dann und nur dann, wenn sie „Netz-stetig“ ist, d.h. wenn für jedes Netz $\{x_j\}_j$ in X, welches gegen einen Punkt $x \in X$ konvergiert, daß Netz $\{f(x_j)\}_j$ in Y gegen $f(x)$ konvergiert. Diese Tatsache findet man in jedem Lehrbuch zur mengentheoretischen Topologie bewiesen.

(a) Differentiation temperierter Distributionen

Für $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ist nach Satz 4.10 $D^\alpha : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ ein stetiger linearer Operator. Ferner erhält man für $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ durch partielle Integration leicht

$$\begin{aligned}\langle D^\alpha\psi, \varphi\rangle &= \int D^\alpha\psi(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int \psi(x)D^\alpha\varphi(x)dx \\ &= \langle \psi, (-1)^{|\alpha|}D^\alpha\varphi\rangle,\end{aligned}$$

d.h. es ist ${}^tD^\alpha = (-1)^{|\alpha|}D^\alpha$. Somit ist für $u \in \mathcal{S}'$ die **partielle Ableitung** $D^\alpha u \in \mathcal{S}'$ definiert durch

$$\langle D^\alpha u, \varphi\rangle := (-1)^{|\alpha|}\langle u, D^\alpha \varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Beispiele 4.13 (i) Es bezeichne H die **Heaviside-Funktion** auf $\mathbb{R}$, d.h. $H = \mathbf{1}_{[0,\infty[}$. Für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt dann

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{dH}{dx}, \varphi \right\rangle &= -\langle H, \frac{d\varphi}{dx}\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} H(x)\varphi'(x)dx \\ &= -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Somit ist die „verallgemeinerte Ableitung“ oder „Ableitung von H als temperierte Distribution“ gegeben durch

$$H' := \frac{dH}{dx} = \delta_0. \tag{4.22}$$

(ii) Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist $D^\alpha \delta_x$ gegeben durch

$$\langle D^\alpha \delta_x, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}D^\alpha \varphi(x), \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

(iii) Die Funktion $f(x) := \log|x|,\ x \neq 0,\ f(0) := 0$, auf $\mathbb{R}$ ist temperiert. Für $\varphi \in \mathcal{S}$ und $\varepsilon > 0$ gilt

$$\langle \frac{df}{dx}, \varphi\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} \log|x|\varphi'(x)\,dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon} \log|x|\varphi'(x)\,dx.$$

Partielle Integration liefert

$$\langle \frac{df}{dx}, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\log\varepsilon\,(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) + \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx.\right\}$$

Wegen $\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$ und $\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\log\varepsilon = 0$ folgt

$$\langle \frac{df}{dx}, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx.$$

Die durch $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{1}{x}\varphi(x)\,dx$ definierte temperierte Distribution nennt man den **Cauchyschen Hauptwert** (englisch: „principal value“) der Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$ (welche offenbar nicht lokal integrierbar ist), und schreibt dafür $p.v.\frac{1}{x}$. Ebenso bezeichnet man $p.v.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x}\varphi(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{1}{x}\varphi(x)\,dx$ als den Cauchyschen Hauptwert des entsprechenden Integrals. Im Distributionensinne gilt also

$$\frac{d}{dx}\log|x| = p.v.\frac{1}{x}. \tag{4.23}$$

(b) Die Multiplikation einer temperierten Distribution mit einer Funktion moderaten Wachstums

Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine Funktion moderaten Wachstums. Nach Satz 4.10 ist der Multiplikationsoperator M_f stetig auf $\mathcal{S}$. Wegen

$$\langle M_f\psi, \varphi\rangle = \int (f\psi)\varphi dx = \int \psi(f\varphi)dx = \langle \psi, M_f\varphi\rangle$$

ist ${}^tM_f = M_f$. Man definiert daher das **Produkt** der temperierten Distribution $u \in \mathcal{S}'$ mit f durch $fu := M_f u$, d.h.

$$\langle fu, \varphi\rangle = \langle u, f\varphi\rangle, \;\; \varphi \in \mathcal{S}.$$

Vorsicht: Die Multiplikation zweier beliebiger temperierter Distributionen läßt sich leider nicht definieren!
Beispielsweise macht das Produkt der Diracschen Delta-Funktion δ_0 mit sich selbst keinen Sinn, zumindest nicht im Distributionensinne. Ist nämlich $\{\varphi_\varepsilon\}_\varepsilon$ eine Dirac-Familie, so hatten wir gesehen, daß $\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi_\varepsilon = \delta_0$ in $\mathcal{S}'$. Wegen $\varphi_\varepsilon\varphi_\varepsilon = \varepsilon^{-n}\psi_\varepsilon$, mit $\psi := \varphi_1\varphi_1$, strebt jedoch $\varphi_\varepsilon\varphi_\varepsilon$ keinem Grenzwert in $\mathcal{S}'$ zu.

(c) Die Fouriertransformierte einer temperierten Distribution

Nach Satz 2.25 gilt

$$\langle \mathcal{F}\psi, \varphi\rangle = \langle \psi, \mathcal{F}\varphi\rangle \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{S},$$

d.h. es ist ${}^t\mathcal{F} = \mathcal{F}$. Ferner ist die Fouriertransformation als Operator auf $\mathcal{S}$ nach Satz 4.10 stetig. Daher definiert man die **Fouriertransformierte** der temperierten Distribution u durch

$$\langle \hat{u}, \varphi\rangle = \langle \mathcal{F}u, \varphi\rangle = \langle u, \hat{\varphi}\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Ganz analog definiert man wegen

$$\begin{aligned}
\langle \overline{\mathcal{F}}\psi, \varphi\rangle &= \int \hat{\psi}(-\xi)\varphi(\xi)d\xi = \int \hat{\psi}(\xi)\check{\varphi}(\xi)d\xi \\
&= \int \psi(\xi)\hat{\check{\varphi}}(\xi)d\xi = \int \psi(\xi)\hat{\varphi}(-\xi)d\xi \\
&= \langle \psi, \overline{\mathcal{F}}\varphi\rangle
\end{aligned}$$

die **Fourier-Kotransformierte** von $u \in \mathcal{S}'$ durch

$$\langle \overline{\mathcal{F}} u, \varphi \rangle := \langle u, \overline{\mathcal{F}} \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Für die Fouriertransformation temperierter Distributionen gilt ganz allgemein die Fourierumkehrformel.

Satz 4.14 *Für jedes $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$u = (2\pi)^{-n} \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}u) = (2\pi)^{-n} \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}u).$$

Beweis. Für jedes $\varphi \in \mathcal{S}$ gilt nach Theorem 2.28 $\varphi = (2\pi)^{-n} \overline{\mathcal{F}} \mathcal{F} \varphi = (2\pi)^{-n} \mathcal{F} \overline{\mathcal{F}} \varphi$. Es folgt

$$\begin{aligned} \langle (2\pi)^{-n} \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}u), \varphi \rangle &= (2\pi)^{-n} \langle \overline{\mathcal{F}}u, \mathcal{F}\varphi \rangle \\ &= \langle u, (2\pi)^{-n} \overline{\mathcal{F}} \mathcal{F} \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

also $(2\pi)^{-n} \overline{\mathcal{F}} \mathcal{F} u = u$. Analog zeigt man $(2\pi)^{-n} \mathcal{F} \overline{\mathcal{F}} u = u$.

Q.E.D.

Beispiele 4.15 (i) Die Fouriertransformierte des Punktmaßes δ_x ist gegeben durch

$$\langle \widehat{\delta_x}, \varphi \rangle = \langle \delta_x, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(x) = \langle e_{-x}, \varphi \rangle,$$

d.h.

$$\widehat{\delta_x} = e_{-x}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.24}$$

Insbesondere ist $\widehat{\delta_0} = 1$.

Analog zeigt man, daß $\overline{\mathcal{F}} \delta_x = e_x$. Mit Satz 4.14 folgt daher

$$\mathcal{F} e_x = \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}} \delta_x) = (2\pi)^n \delta_x,$$

d.h.

$$\widehat{e_x} = (2\pi)^n \delta_x, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.25}$$

(ii) Wie man rasch sieht, wird durch

$$v := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k,$$

d.h.

$$\langle v, \varphi \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(k), \quad \varphi \in \mathcal{S},$$

eine temperierte Distribution v definiert. Nach der Poissonschen Summationsformel (3.30) ist

$$\begin{aligned}\langle \hat{v}, \varphi \rangle &= \langle v, \hat{\varphi} \rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(k) \\ &= 2\pi \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \varphi(2\pi\ell).\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\mathcal{F}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k\right) = 2\pi \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta_{2\pi\ell}. \tag{4.26}$$

(d) Die Faltung einer temperierten Distribution mit einer Schwartzfunktion

Seien $\varphi, \psi, \eta \in \mathcal{S}$. Dann gilt nach Fubini

$$\begin{aligned}\langle C_\psi \eta, \varphi \rangle &= \langle \psi * \eta, \varphi \rangle = \iint \psi(y)\eta(x-y)dy\, \varphi(x)\, dx \\ &= \iint \eta(x)\psi(y)\varphi(x+y)\, dydx \\ &= \int \eta(x) \int \check{\psi}(y)\varphi(x-y)\, dy\, dx = \langle \eta, \check{\psi} * \varphi \rangle,\end{aligned}$$

d.h. es ist

$${}^tC_\psi = C_{\check{\psi}},$$

und somit ist nach Satz 4.10 ${}^tC_\psi$ stetig auf $\mathcal{S}$. Man definiert daher die **Faltung** der Schwartzfunktion ψ mit der temperierten Distribution $u \in \mathcal{S}$ durch

$$\langle \psi * u, \varphi \rangle := \langle u, \check{\psi} * \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}. \tag{4.27}$$

Analog kann man $u * \psi \in \mathcal{S}'$ definieren durch

$$\langle u * \psi, \varphi \rangle := \langle u, \varphi * \check{\psi} \rangle.$$

Wegen $\check{\psi} * \varphi = \varphi * \check{\psi}$ ist dann

$$u * \psi = \psi * u. \tag{4.28}$$

Es gibt noch einen zweiten kanonischen Weg, die Faltung von u mit ψ zu definieren. Für $f, \psi \in \mathcal{S}$ ist nämlich

$$f * \psi(x) = \int f(y)\check{\psi}(y-x)dy = \langle f, \lambda_x \check{\psi} \rangle,$$

wobei für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ die Funktion $\lambda_x \check{\psi}$ in $\mathcal{S}$ liegt. Wir definieren daher für $u \in \mathcal{S}'$ und $\psi \in \mathcal{S}$ *punktweise* das Faltungsprodukt

$$u \circledast \psi(x) := \langle u, \lambda_x \check{\psi} \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.29}$$

Wir werden zeigen, daß beide Definitionen übereinstimmen, d.h. daß $u * \psi = u_f$, mit $f := u \circledast \psi$.

Lemma 4.16 *Es bezeichne $e_j := (0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ den j-ten Vektor der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^n$. Für $\varphi \in \mathcal{S}$ und $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei*

$$\varphi_h(x) := \frac{\varphi(x + he_j) - \varphi(x)}{h}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann gilt $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \lim\limits_{h \to 0} \varphi_h$ in der Topologie von $\mathcal{S}$.

Beweis. Da die Fouriertransformation $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ nach den Sätzen 4.10 und 2.28 ein Isomorphismus topologischer Vektorräume ist, genügt es zu zeigen, daß

$$\widehat{\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}} = \lim_{h \to 0} \widehat{\varphi_h} \quad \text{in } \mathcal{S},$$

d.h. daß

$$\lim_{h \to 0} \rho_h \hat{\varphi} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}, \tag{4.30}$$

wobei wir gesetzt haben

$$\rho_h(\xi) := \frac{e^{ih\xi_j} - 1}{h} - i\xi_j.$$

Nun gilt für $N \in \mathbb{N}, \ \alpha \in \mathbb{N}^n$

$$\langle \xi \rangle^N D^\alpha(\rho_h \hat{\varphi}) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \langle \xi \rangle^N (D^\beta \rho_h)(D^{\alpha - \beta} \hat{\varphi}). \tag{4.31}$$

Ferner ist

$$\frac{e^{ih\xi_j} - 1}{h} - i\xi_j = i\xi_j \int_0^1 (e^{ih\xi_j t} - 1)\, dt = -h\xi_j^2 \int_0^1 \int_0^t e^{ih\xi_j s}\, dsdt.$$

Damit folgt rasch, daß $|\rho_h(\xi)| \leq |h|\xi_j^2$. Ferner ist $|D_j \rho_h(\xi)| = |e^{ih\xi_j} - 1| \leq |h||\xi_j|$, und für $k \geq 2$ ist $|D_j^k \rho_h(\xi)| = |h^{k-1} e^{ih\xi_j}| = |h|^{k-1}$. Somit gilt

$$|D^\beta \rho_h(\xi)| \leq \begin{cases} |h|\xi_j^2, & \text{falls } |\beta| = 0, \\ |h||\xi_j|, & \text{falls } |\beta| = 1, \\ |h|^{|\beta| - 1}, & \text{falls } |\beta| \geq 2. \end{cases}$$

Man sieht damit leicht, daß der Ausdruck in (4.31) für $h \to 0$ gleichmäßig gegen 0 strebt, und folglich ist $\lim\limits_{h \to 0} \|\rho_h \hat{\varphi}\|_{(N)} = 0$.

Q.E.D.

Lemma 4.17 *Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$. Für $\varepsilon > 0$ bezeichnen wir mit η_ε die „Riemannsumme“*

$$\eta_\varepsilon := \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \varphi(\varepsilon k)\varepsilon^n \lambda_{\varepsilon k}\check{\psi}. \tag{4.32}$$

Dann gilt für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\varphi(\varepsilon k)|\, \varepsilon^n \|\lambda_{\varepsilon k}\check{\psi}\|_{(N)} < \infty, \tag{4.33}$$

d.h. die Reihe (4.32) konvergiert in $\mathcal{S}$ gegen eine Schwartzfunktion η_ε, welche punktweise gegeben ist durch

$$\eta_\varepsilon(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \varphi(\varepsilon k)\varepsilon^n \psi(\varepsilon k - x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Ferner gilt

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \eta_\varepsilon = \varphi * \check{\psi} \quad \text{in } \mathcal{S}. \tag{4.34}$$

Beweis. Man sieht rasch (Übung), daß zu jedem $N \in \mathbb{N}$ eine Konstante $C \geq 0$ existiert so, daß

$$\|\lambda_x\check{\psi}\|_{(N)} \leq C\langle x\rangle^N \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.35}$$

Ferner ist für jedes $M \in \mathbb{N}$

$$|\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_{(M)}\langle x\rangle^{-M}.$$

Damit folgt

$$|\varphi(\varepsilon k)|\, \varepsilon^n \|\lambda_{\varepsilon k}\check{\psi}\|_{(N)} \leq C\|\varphi\|_{(M)}\varepsilon^n\langle \varepsilon k\rangle^{-M+N}.$$

Durch Vergleich mit einem entsprechenden Integral folgert man leicht, daß

$$\sup_{0<\varepsilon<1} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \varepsilon^n\langle\varepsilon k\rangle^{-M+N} < \infty, \tag{4.36}$$

falls $M > N + n$. Damit folgt (4.33).
Sei nun $\eta_\varepsilon = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n} \varphi(\varepsilon k)\varepsilon^n\lambda_{\varepsilon k}\check{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Wir setzen

$$F(x, y) := \varphi(y)\check{\psi}(x - y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Man sieht leicht, (z.B. mittels partieller Fouriertransformation in x, oder mit Hilfe der linearen Koordinatentransformation $x' := x - y, y' := y$), daß $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Ferner ist $\eta_\varepsilon(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n} F(x, \varepsilon k)\varepsilon^n$, und $\varphi * \check{\psi}(x) = \int F(x, y)dy$, also

$$\eta_\varepsilon(x) - \varphi * \check{\psi}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \int_{\varepsilon(k+Q)} [F(x, \varepsilon k) - F(x, y)]\, dy, \tag{4.37}$$

wobei Q den Würfel $Q := [0,1[^n$ bezeichne.
Sei $\alpha \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| \leq N$. Nach dem Mittelwertsatz gilt für jedes $y \in \varepsilon(k+Q)$

$$|D_x^\alpha F(x,\varepsilon k) - D_x^\alpha F(x,y)| \leq \sqrt{n} \sup_{z\in\varepsilon(k+Q)} |D_x^\alpha \nabla_y F(x,z)| \cdot \varepsilon.$$

Ferner gilt

$$\langle (x,y)\rangle^{2N} |D_x^\alpha \nabla_y F(x,y)| \leq \sqrt{n} \|F\|_{(2N+1)},$$

und

$$\langle x\rangle\langle y\rangle \leq \langle (x,y)\rangle^2,$$

also

$$\begin{aligned}\langle x\rangle^N |D_x^\alpha \nabla_y F(x,z)| &\leq \|F\|_{(2N+1)} \langle z\rangle^{-N} \\ &\leq C\|F\|_{(2N+1)} \langle \varepsilon k\rangle^{-N},\end{aligned}$$

falls $z \in \varepsilon(k+Q)$. Somit folgt

$$\sup_{y\in\varepsilon(k+Q)} \langle x\rangle^N |D_x^\alpha F(x,\varepsilon k) - D_x^\alpha F(x,y)| \leq \varepsilon C \|F\|_{(2N+1)} \langle \varepsilon k\rangle^{-N},$$

d.h. mit (4.37) ist für $|\alpha| \leq N$

$$\begin{aligned}&\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \langle x\rangle^N |D^\alpha[\eta_\varepsilon - \varphi * \check{\psi}](x)| \\ &\qquad \leq \varepsilon C \|F\|_{(2N+1)} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \int_{\varepsilon(k+Q)} \langle \varepsilon k\rangle^{-N} dy \\ &\qquad = \varepsilon C \|F\|_{(2N+1)} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \varepsilon^n \langle \varepsilon k\rangle^{-N}.\end{aligned}$$

Für $N > n$ folgt (vgl. (4.35))

$$\|\eta_\varepsilon - \varphi * \check{\psi}\|_{(N)} \leq \varepsilon C \|F\|_{(2N+1)}.$$

Hieraus ergibt sich (4.34).

Q.E.D.

Theorem 4.18 *Seien $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:*

(a) $u \circledast \psi$ liegt in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und hat moderates Wachstum. Ferner ist

$$D^\alpha(u \circledast \psi) = (D^\alpha u) \circledast \psi = u \circledast D^\alpha \psi,$$

für jedes $\alpha \in \mathbb{N}^n$, wobei im mittleren Term mit D^α die Ableitung im Distributionensinne gemeint ist, während in den anderen Termen die klassische Ableitung gemeint ist.

(b) $u * \psi = u_f$*, mit* $f := u \circledast \psi$*.*

(c) $(u * \psi)^\wedge = \hat{\psi}\hat{u}$*.*

(d) $(u * \psi) * \varphi = u * (\psi * \varphi)$ *für alle* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*.*

(e) $\hat{u} * \hat{\psi} = (2\pi)^n (\psi u)^\wedge$*.*

Beweis. (a) Sei $j \in \{1, \ldots, n\},\ h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann ist für festes x

$$\frac{u \circledast \psi(x + he_j) - u \circledast \psi(x)}{h} = \langle u, \varphi_h \rangle,$$

falls wir setzen $\varphi(y) := (\lambda_x \check{\psi})(y) = \psi(x - y)$, und

$$\varphi_h(y) := \frac{\varphi(y - he_j) - \varphi(y)}{h}.$$

Nach Lemma 4.16 ist $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = -\lim\limits_{h \to 0} \varphi_h$ in $\mathcal{S}$, folglich gilt

$$\lim_{h \to 0} \langle u, \varphi_h \rangle = -\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} \rangle.$$

Somit ist $u \circledast \psi$ in x partiell nach x_j differenzierbar, und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (u \circledast \psi)(x) = -\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} \rangle = \langle u, \lambda_x \left(\frac{\partial \psi}{\partial y_j} \right)^\vee \rangle,$$

d.h.

$$D_j (u \circledast \psi)(x) = u \circledast D_j \psi(x), \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Somit ist $u \circledast \psi$ partiell differenzierbar. Da ferner nach (4.35) $\nabla(u \circledast \psi)$ lokal beschränkt ist, ist $u \circledast \psi$ stetig (verwenden Sie dazu iterativ den Mittelwertsatz der eindimensionalen Analysis!)). Per Induktion nach der Ableitungsordnung erhält man aus obigem Spezialfall, daß $u \circledast \psi \in C^\infty$, und daß

$$D^\alpha (u \circledast \psi) = u \circledast D^\alpha \psi, \qquad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{N}^n. \tag{4.38}$$

Ferner zeigt (4.35), daß $u \circledast \psi$ polynomiales Wachstum hat, und das Gleiche gilt nach (4.38) auch für $D^\alpha(u \circledast \psi)$, d.h. $u \circledast \psi$ hat moderates Wachstum. Schließlich ist

$$\begin{aligned}
(D^\alpha u) \circledast \psi(x) &= (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha (\lambda_x \check{\psi}) \rangle \\
&= \langle u, \lambda_x (D^\alpha \psi)^\vee \rangle \\
&= u \circledast D^\alpha \psi(x).
\end{aligned}$$

(b) Sei $\varphi \in \mathcal{S}$, und setze wieder

$$\eta_\varepsilon := \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \varphi(\varepsilon k)\varepsilon^n \lambda_{\varepsilon k}\check{\psi}, \quad \varepsilon > 0.$$

Nach Lemma 4.17 gilt $\varphi * \check{\psi} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \eta_\varepsilon$ in $\mathcal{S}$. Aufgrund der Stetigkeit von u folgt daher

$$\langle u * \psi, \varphi\rangle = \langle u, \varphi * \check{\psi}\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle u, \eta_\varepsilon\rangle.$$

Ferner konvergiert auch die Reihe (4.32) für η_ε in $\mathcal{S}$, so daß

$$\begin{aligned}\langle u, \eta_\varepsilon\rangle &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \varphi(\varepsilon k)\varepsilon^n \langle u, \lambda_{\varepsilon k}\check{\psi}\rangle \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \varphi(\varepsilon k)\, u \circledast \psi(\varepsilon k)\varepsilon^n.\end{aligned}$$

Offenbar ist jedoch $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n} \varphi(\varepsilon k) u \circledast \psi(\varepsilon k)\varepsilon^n$ eine das Integral $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\, u \circledast \psi(y)\, dy$ approximierende Riemannsumme, d.h. es gilt $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\langle u, \eta_\varepsilon\rangle = \int \varphi(y)\, u \circledast \psi(y)\, dy = \langle u \circledast \psi, \varphi\rangle$. Es folgt $\langle u * \psi, \varphi\rangle = \langle u \circledast \psi, \varphi\rangle, \quad$ für alle $\varphi \in \mathcal{S}$.
(c) Für $\varphi \in \mathcal{S}$ ist nach Theorem 2.28

$$\begin{aligned}\langle (u * \psi)^\wedge, \varphi\rangle &= \langle u * \psi, \hat{\varphi}\rangle = \langle u, \hat{\varphi} * \check{\psi}\rangle \\ &= \langle u, \hat{\varphi} * (\mathcal{F}^{-1}\check{\psi})^\wedge\rangle = (2\pi)^n \langle u, \mathcal{F}\big(\varphi(\mathcal{F}^{-1}\check{\psi})\big)\rangle \\ &= \langle \hat{u}, \varphi\, (2\pi)^n \mathcal{F}^{-1}\check{\psi}\rangle = \langle \hat{u}, \varphi\hat{\psi}\rangle \\ &= \langle \hat{\psi}\hat{u}, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Die Identitäten in (d) und (e) seien als Übung überlassen.

Q.E.D.

Bemerkungen. (a) Aufgrund von Theorem 4.18 werden wir im folgenden die Distribution $u * \psi$ stets mit der C^∞-Funktion $u \circledast \psi$ identifizieren.

(b) Der Beweis von Theorem 4.18 macht stark von der Stetigkeit temperierter Distributionen auf dem Raum $\mathcal{S}$ Gebrauch und unterstreicht damit die Bedeutung der Stetigkeitsforderung an Distributionen.

4.4 Regularisierung: Die Friedrichs-Glättung

Sei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\int \varphi(x)dx = 1$, und betrachte die approximierende Eins

$$\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \ \varepsilon > 0.$$

Satz 4.19 *Für jedes* $\psi \in \mathcal{S}$ *gilt*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \psi * \varphi_\varepsilon = \psi \quad \text{in } \mathcal{S}. \tag{4.39}$$

Ist $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, *und setzen wir* $u_\varepsilon := u * \varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, *so folgt*

$$u = \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon \quad \text{in } \mathcal{S}'$$

Beweis. Sei $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\hat{\psi} - \widehat{\psi * \varphi_\varepsilon} = (1 - \widehat{\varphi_\varepsilon})\hat{\psi},$$

und da die Fouriertransformation ein topologischer Isomorphismus von $\mathcal{S}$ auf $\mathcal{S}$ ist, genügt es zu zeigen, daß für jedes $\eta \in \mathcal{S}$

$$(1 - \widehat{\varphi_\varepsilon})\eta \to 0 \text{ in } \mathcal{S}, \text{ für } \varepsilon \to 0. \tag{4.40}$$

Nun ist aber

$$h_\varepsilon(x) := 1 - \widehat{\varphi_\varepsilon}(x) = 1 - \hat{\varphi}(\varepsilon x) = \hat{\varphi}(0) - \hat{\varphi}(\varepsilon x),$$

so daß man mit Hilfe der Mittelwertungleichung erhält

$$|D^\beta h_\varepsilon(x)| \le C_\beta \begin{cases} \varepsilon|x|, & \text{falls } |\beta| = 0; \\ \varepsilon^{|\beta|}, & \text{falls } |\beta| > 0. \end{cases}$$

Hieraus folgt zusammen mit der Leibnizregel (4.40).
Da mit φ auch $\check{\varphi}$ in $\mathcal{S}$ liegt und ebenfalls das Integral 1 besitzt, folgt mit (4.40) für $u \in \mathcal{S}'$ und $\psi \in \mathcal{S}$:

$$\langle u, \psi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \langle u, \psi * \check{\varphi}_\varepsilon \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \langle u * \varphi_\varepsilon, \psi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \langle u_\varepsilon, \psi \rangle.$$

Q.E.D.

Fazit. Jede temperierte Distribution läßt sich im Distributionensinne „beliebig genau“ durch glatte Funktionen approximieren.

Wählt man im Beweis von Satz 4.19 φ so, daß $\hat{\varphi}$ kompakten Träger hat, so folgt wegen (4.40) zudem auch

Satz 4.20 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *liegt dicht in* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Kapitel 5

Distributionen in offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$

5.1 Grundlegende Definitionen

Wir wollen nun das Konzept der temperierten Distribution „lokalisieren“, um Distributionen in beliebigen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ einzuführen.
Wir bezeichen im folgenden mit

$$\mathcal{D}(\Omega) := C_0^\infty(\Omega) \hookrightarrow C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

den Raum der **Testfunktionen** auf einer gegebenen, nichtleeren offenen Teilmenge Ω des $\mathbb{R}^n$, d.h. aller C^∞-Funktionen auf Ω, deren Träger im topologischen Raum Ω kompakt ist. Der Pfeil $\hookrightarrow$ soll dabei andeuten, daß die entsprechende Abbildung eine Einbettung darstellt.

Betrachte zur Motivation eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$. $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ bezeichne den Raum aller lokal integrierbaren Funktionen auf Ω. Offenbar ist f lokal integrierbar, d.h. $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, dann und nur dann, wenn für jede Funktion $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ die triviale Fortsetzung $\widetilde{f\chi}$ von $f\chi$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ liegt. Ferner gilt für jedes $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{f\chi}, \varphi \rangle &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f\chi}(x)\varphi(x)dx = \int\limits_{\Omega} f(x)(\chi\,\varphi|_\Omega)(x)dx \\ &= \langle f, \chi\,\varphi|_\Omega \rangle, \end{aligned} \tag{5.1}$$

wobei mit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ offenbar $\chi\,\varphi|_\Omega \in \mathcal{D}(\Omega)$ ist. Diese Beobachtung legt folgende Definitionen nahe:

Definitionen. (a) Sei $u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ ein lineares Funktional, d.h. eine Linearform auf dem $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathcal{D}(\Omega)$ im Sinne der linearen Algebra. Ist $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$, so bezeichne $\widetilde{u\chi}$ die wie folgt definierte Linearform auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\widetilde{u\chi}(\varphi) := u(\chi\,\varphi|_\Omega), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

(b) Das lineare Funktional $u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ bezeichnet man als eine **Distribution** in Ω, falls $\widetilde{u\chi}$ eine temperierte Distribution auf dem $\mathbb{R}^n$ ist für jedes $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Distributionen „sehen also lokal aus“ wie temperierte Distributionen. Die Distributionen in Ω bilden offenbar einen linearen Teilraum $\mathcal{D}'(\Omega)$ des Raumes aller Linearformen auf $\mathcal{D}(\Omega)$.

(c) Ist $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, so bezeichne u_f die Linearform

$$u_f(\varphi) := \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = \langle f, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

auf $\mathcal{D}(\Omega)$. Nach (5.1) gilt für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ \chi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \widetilde{u_f\chi}(\varphi) &= u_f(\chi\,\varphi|_\Omega) = \langle f, \chi\,\varphi|_\Omega \rangle \\ &= \langle \widetilde{f\chi}, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

d.h.

$$\widetilde{u_f\chi} = u_{\widetilde{f\chi}} \quad \text{auf } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Da χ kompakten Träger hat, ist die Funktion $\widetilde{f\chi}$ temperiert, d.h. $\widetilde{u_f\chi} = u_{\widetilde{f\chi}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Für Funktionen f entspricht die Bildung der temperierten Distribution $\widetilde{u_f\chi}$ also derjenigen temperierten Distribution, welche man durch triviale Fortsetzung der Funktion $f\chi$ erhält. Insbesondere sehen wir, daß $u_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ eine Distribution in Ω ist.

Identifizieren wir, wie üblich, die Funktion $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ mit der Distribution $u_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, so haben wir also eine Einbettung

$$L^1_{\text{loc}}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega). \tag{5.2}$$

Da nicht jede lokal integrierbare Funktion auf dem $\mathbb{R}^n$ eine temperierte Distribution ist, sondern nur die temperierten Funktionen (Übung), zeigt dies insbesondere, daß der Raum $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ erheblich größer ist als $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Beispielsweise liegt die Funktion $f(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}$, in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, jedoch nicht in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

(d) Für $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ schreiben wir im folgenden oft wieder $\langle u, \varphi \rangle := u(\varphi)$, um die Dualität zwischen $\mathcal{D}'(\Omega)$ und $\mathcal{D}(\Omega)$ herauszustreichen.

Wir wollen als nächstes die „Stetigkeitseigenschaft“ einer Distribution direkt kennzeichnen, ohne Bezug auf die Topologie von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ zu nehmen. Dazu benötigen wir einige weitere Definitionen.

Definitionen. Sei Ω eine nichtleere offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

(a) Für $N \in \mathbb{N}$ bezeichne $\|\cdot\|_N$ die folgende Norm auf $\mathcal{D}(\Omega)$:

$$\|\varphi\|_N := \max_{|\alpha| \le N} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha \varphi(x)|, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Offenbar ist dann $\{\|\cdot\|\}_N$ eine aufsteigende Folge von Normen auf $\mathcal{D}(\Omega)$.

(b) Ist K ein Kompaktum im $\mathbb{R}^n$, so bezeichne

$$\mathcal{D}_K := \{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp}\varphi \subset K\}.$$

Ist $K \subset \Omega$, so können wir offenbar $\mathcal{D}_K$ auch als einen eingebetteten Teilraum von $\mathcal{D}(\Omega)$ betrachten, indem wir Funktionen aus $\mathcal{D}_K$ auf Ω einschränken. Dies wollen wir im folgenden oftmals (ohne weiteren Kommentar) so handhaben.

Offenbar sind die Normen $\|\cdot\|_N$ und $\|\cdot\|_{(N)}$ auf $\mathcal{D}_K$ äquivalent: Es gibt eine Konstante $C_K \geq 1$ so, daß

$$\|\varphi\|_N \leq \|\varphi\|_{(N)} \leq C_K\|\varphi\|_N, \quad \text{für alle } \ \varphi \in \mathcal{D}_K. \tag{5.3}$$

Wir versehen im folgenden $\mathcal{D}_K$ stets mit der durch die Folge der Normen $\|\cdot\|_N$ erzeugten lokal-konvexen Topologie.

Satz 5.1 *$\mathcal{D}_K$ ist ein Fréchetraum, dessen Topologie mit der Relativtopologie von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ auf $\mathcal{D}_K$ übereinstimmt, d.h. eine Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}_K$ ist offen genau dann, wenn es eine offene Teilmenge $\mathcal{V} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gibt mit $\mathcal{U} = \mathcal{V} \cap \mathcal{D}_K$.*

Beweis. Offensichtlich bildet $\mathcal{D}_K$ einen abgeschlossenen Teilraum von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, und ist somit vollständig bzgl. der Topologie von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Diese stimmt wegen (5.3) aber mit der durch die Normen $\|\cdot\|_N$, $N \in \mathbb{N}$, definierten überein.

Q.E.D.

(c) Sei $\{K_j\}_j$ eine Folge kompakter Teilmengen von Ω. Wir bezeichnen diese als **kompakte Ausschöpfung** von Ω, falls gilt:

(i) $K_j \subset K_{j+1}^0$ für alle j;

(ii) $\Omega = \bigcup_j K_j$;

Offenbar implizieren diese Bedingungen

(iii) zu jedem Kompaktum $K \subset \Omega$ gibt es ein j mit $K \subset K_j^0$.

Kompakte Ausschöpfungen existieren für jede nichtleere offene Teilmenge Ω des $\mathbb{R}^n$. Beispielweise läßt sich eine solche wie folgt konstruieren:
Es bezeichne $\mathcal{B}$ die Familie aller kompakten Euklidischen Kugeln $\overline{B}_r(x)$, welche ganz in Ω liegen und deren Radius r und Koordinaten x_j des Mittelpunktes x sämtlich rational sind. Diese Familie ist abzählbar, so daß wir eine Folge $\{B_j\}_j$ derartiger Kugeln wählen können, welche ganz $\mathcal{B}$ durchläuft. Die aufsteigende Folge kompakter Mengen $K_j' := B_0 \cup \cdots \cup B_j$, $j \in \mathbb{N}$, erfüllt dann (ii), wie man rasch sieht (bereits die Folge der Inneren $(K_j')^0$ überdeckt Ω). Da jede der Mengen K_j' für genügend

großes $k(j) \in \mathbb{N}$ vom Inneren von $K'_{k(j)}$ überdeckt wird, können wir schließlich eine Teilfolge $\{K_j\}_j = \{K'_{k_j}\}_j$ finden, welche zudem (i) erfüllt.

(d) Wir sagen, eine Folge $\{A_j\}_j$ von Teilmengen von Ω **strebe (in Ω) gegen Unendlich** bzw. sie sei **lokal endlich**, falls es zu jedem Kompaktum $K \subset \Omega$ einen Index j_0 gibt so, daß $A_j \cap K = \emptyset$ für alle $j \geq j_0$, d.h. falls K von höchstens endlich vielen der Mengen A_j geschnitten wird. Beispielweise streben die Mengen $A_j := K_{j+1} \setminus K_j$ in Ω gegen Unendlich, falls die K_j eine kompakte Ausschöpfung von Ω bilden.
In gewissem Sinne stellt man sich bei diesen Definitionen also auch die Randpunkte von Ω, falls $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ ist, als unendlich ferne Punkte vor. Beachte, daß wir auch $A_j = \emptyset$ zulassen.

(e) Für jede Teilmenge $A \subset \Omega$ und jedes $N \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\|f\|_{A,N} := \max_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in A} |D^\alpha f(x)|,$$

wobei hier $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine beliebige C^N-Funktion sein kann.
Sind $\{A\} := \{A_j\}_j$ eine nach Unendlich strebende Folge von Teilmengen von Ω, $\{N\} := \{N_j\}_j$ eine Folge natürlicher Zahlen und $\{\varepsilon\} := \{\varepsilon_j\}_j$ eine Folge positiver Zahlen $\varepsilon_j > 0$, so ist auf $\mathcal{D}(\Omega)$ die folgende Halbnorm definiert:

$$\|\varphi\|_{\{A\},\{N\},\{\varepsilon\}} := \sum_j \frac{1}{\varepsilon_j} \|\varphi\|_{A_j,N_j}.$$

Ist z.B. $\|\varphi\|_{\{A\},\{N\},\{\varepsilon\}} \leq 1$, so gilt insbesondere $\|\varphi\|_{A_j,N_j} \leq \varepsilon_j$ für alle j, d.h. mittels dieser Halbnormen läßt sich messen, wie rasch die Funktion φ und ihre Ableitungen im Unendlichen verschwinden.
Wir bezeichnen mit $\mathcal{N}_{\mathcal{D}(\Omega)}$ die separierende Familie aller solcher Halbnormen $\|\varphi\|_{\{A\},\{N\},\{\varepsilon\}}$ auf $\mathcal{D}(\Omega)$. Offenbar liegt mit je endlich vielen Halbnormen aus $\mathcal{N}_{\mathcal{D}(\Omega)}$ auch deren Summe in $\mathcal{N}_{\mathcal{D}(\Omega)}$.

Theorem 5.2 *Sei $\Omega \neq \emptyset$ offen im $\mathbb{R}^n$, und sei u eine Linearform auf $\mathcal{D}(\Omega)$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) u ist eine Distribution, d.h. $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

(b) Für jedes Kompaktum $K \subset \Omega$ ist die Einschränkung $u|_{\mathcal{D}_K}$ von u auf $\mathcal{D}_K \subset \mathcal{D}(\Omega)$ stetig auf dem Fréchetraum $(\mathcal{D}_K, \{\|\cdot\|_N\}_N)$, d.h. es gibt Konstanten $C_K \geq 0$ und $N_K \in \mathbb{N}$ so, daß

$$|u(\varphi)| \leq C_K \|\varphi\|_{N_K} \qquad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}_K. \tag{5.4}$$

(c) Es existiert eine Halbnorm $\|\cdot\|_{\{A\},\{N\},\{\varepsilon\}}$ mit

$$|u(\varphi)| \leq \|\varphi\|_{\{A\},\{N\},\{\varepsilon\}} \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{5.5}$$

(d) *Es gilt* $\lim\limits_{j\to\infty} u(\varphi_j) = 0$ *für jede Folge* $\{\varphi_j\}_j \subset \mathcal{D}(\Omega)$*, welche gegen 0 strebt in dem Sinne, daß* $\lim\limits_{j\to\infty} \|\varphi_j\|_N = 0$ *ist für jedes* $N \in \mathbb{N}$*, und daß alle* φ_j *in einem gemeinsamen Kompaktum* $K \subset \Omega$ *getragen sind.*

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b). Sei $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, und sei $K \subset \Omega$ ein Kompaktum. Wähle $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ so, daß $\chi \equiv 1$ auf einer Umgebung von K. Für $\varphi \in \mathcal{D}_K$ ist dann $\varphi = \chi\varphi$, so daß

$$u(\varphi) = u(\chi\,\varphi|_\Omega) = \widetilde{u\chi}(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}_K.$$

Bezeichnet $\iota : \mathcal{D}_K \hookrightarrow \mathcal{S}$ die Einbettung von $\mathcal{D}_K$ in $\mathcal{S}$, so ist also $u|_{\mathcal{D}_K} = \widetilde{u\chi} \circ \iota$. Da $\iota : \mathcal{D}_K \to \mathcal{S}$ und $\widetilde{u\chi} : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ stetig sind, ist folglich auch $u|_{\mathcal{D}_K}$ stetig auf $\mathcal{D}_K$. Die Ungleichung (5.4) folgt nun sofort aus Satz 4.4 (b).
(b) $\Rightarrow$ (c). Sei $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine kompakte Ausschöpfung von Ω, und wähle $\chi_j \in \mathcal{D}(\Omega)$ so, daß $\chi_j \equiv 1$ auf einer Umgebung von K_j und $\operatorname{supp}\chi_j \subset K_{j+1}$. Setzen wir $\eta_0 := \chi_0$ und $\eta_j := \chi_j - \chi_{j-1}$, falls $j \geq 1$, so gilt für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\varphi = \sum_j \eta_j\varphi,$$

wobei in dieser Reihe nur endlich viele Terme von Null verschieden sind. Da für $j \geq 1$ der Träger von η_j in $K_{j+1} \setminus K_{j-1}$ liegt, folgt mit (5.4) sowie der Leibnizformel

$$\begin{aligned} |u(\varphi)| &= |\sum_j u(\eta_j\varphi)| \leq \sum_j |u(\eta_j\varphi)| \\ &\leq \sum_j C_{K_{j+1}} \|\eta_j\varphi\|_{N_{K_{j+1}}} \\ &\leq \sum_j C_j \|\varphi\|_{A_j,N_j}, \end{aligned}$$

falls wir setzen $A_0 := K_1$, $N_0 := N_{K_1}$, $A_j := K_{j+1} \setminus K_{j-1}$, $N_j := N_{K_{j+1}}$ für $j \geq 1$, und die Konstanten $C_j > 0$ genügend groß wählen. Mit $\varepsilon_j := 1/C_j$ folgt (5.5).
(c) $\Rightarrow$ (d). Dies ist unmittelbar klar, da nur endlich viele der Mengen A_j das Kompaktum K schneiden.
(d) $\Rightarrow$ (a). Die Linearform u auf $\mathcal{D}(\Omega)$ sei stetig im Sinne von (d), und es sei $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Wir müssen zeigen, daß die Linearform $\widetilde{u\chi}$ auf $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ stetig ist. Es genügt wegen der Linearität von $\widetilde{u\chi}$, die Stetigkeit in 0 zu beweisen. Sei dazu $\{\varphi_j\}_j$ eine Nullfolge in $\mathcal{S}$. Es ist

$$\widetilde{u\chi}(\varphi_j) = u(\psi_j),$$

falls wir $\psi_j := \chi\,\varphi_j|_\Omega \in \mathcal{D}(\Omega)$ setzen.
Sei $K := \operatorname{supp}\chi$. Dann ist $\operatorname{supp}\psi_j \subset K$ für jedes $j \in \mathbb{N}$. Bezeichnet $\tilde{\chi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ die triviale Fortsetzung von χ auf den $\mathbb{R}^n$, so strebt mit $\{\varphi_j\}_j$ nach Satz 4.10 (b)

auch die Folge $\tilde{\chi}\,\varphi_j$ in $\mathcal{S}$ gegen 0, wobei $\tilde{\chi}\,\varphi_j \in \mathcal{D}_K$ für jedes $j \in \mathbb{N}$. Nach Satz 5.1 konvergiert somit die Folge $\tilde{\chi}\,\varphi_j$ in $\mathcal{D}_K$ gegen 0, und es ist $\psi_j = (\tilde{\chi}\,\varphi_j)|_\Omega$. Nach (d) ist folglich

$$\lim_{j\to\infty} \widetilde{u\chi}(\varphi_j) = \lim_{j\to\infty} u(\psi_j) = 0.$$

Q.E.D.

Im Hinblick auf Theorem 5.2 werden wir eine Folge $\{\varphi_j\}_j$ in $\mathcal{D}(\Omega)$, welche im Sinne von Theorem 5.2 (d) gegen 0 strebt, als $\mathcal{D}$ **-Nullfolge** bezeichnen.

In Analogie zu den temperierten Distributionen lassen sich nun auch die Distributionen als stetige Linearformen auf dem Raum $\mathcal{D}(\Omega)$ auffassen, falls man auf diesem eine geeignete Topologie einführt.

Definitionen. (a) Man versieht $\mathcal{D}(\Omega)$ mit der von den Halbnormen $\|\varphi\|_{\{A\},\{N\},\{\varepsilon\}}$ aus $\mathcal{N}_{\mathcal{D}(\Omega)}$ erzeugten Topologie.
Damit wird $\mathcal{D}(\Omega)$ zu einem lokal-konvexen topologischen Vektorraum, und aus Theorem 5.2 folgt unmittelbar

Satz 5.3 *Eine Linearform auf $\mathcal{D}(\Omega)$ ist eine Distribution dann und nur dann, wenn sie stetig auf $\mathcal{D}(\Omega)$ ist, d.h. $\mathcal{D}'(\Omega)$ ist der topologische Dualraum $\mathcal{D}(\Omega)'$ von $\mathcal{D}(\Omega)$.*

(b) $\mathcal{D}'(\Omega)$ wird mit der schwach*-Topologie bzgl. $\mathcal{D}(\Omega)$ versehen.

Satz 5.4 *Ist $\{u_j\}_j$ eine Folge von Distributionen in $\mathcal{D}'(\Omega)$, und existiert für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ der Grenzwert*

$$u(\varphi) := \lim_{j\to\infty} u_j(\varphi),$$

so ist $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Beweis. Sei $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Dann gilt offenbar

$$\widetilde{u\chi}(\varphi) := \lim_{j\to\infty} \widetilde{u_j\chi}(\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

und somit ist nach Satz 4.11 $\widetilde{u\chi}$ eine temperierte Distribution. Damit ist $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.
Q.E.D.

(c) Sei $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Läßt sich die natürliche Zahl $N = N_K \in \mathbb{N}$ in (5.4) unabhängig vom Kompaktum $K \subset \Omega$ wählen, so heißt die Distribution u von **endlicher Ordnung**. Die kleinste natürliche Zahl N mit dieser Eigenschaft bezeichnet man als die **Ordnung** der Distribution u.

Beispiele 5.5 (i) Sei $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}|u_f(\varphi)| = |\langle f, \varphi\rangle| &= \left|\int_K f(x)\varphi(x)\,dx\right| \\ &\leq \int_K |f(x)|\,dx\,\|\varphi\|_0 = C_K\|\varphi\|_0 \qquad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}_K.\end{aligned}$$

Somit besitzt f, bzw. genauer u_f, die Ordnung 0.

(ii) Sei analog zu Beispiel 4.13 (b) für $x \in \Omega$ die Distribution $D^\alpha\delta_x \in \mathcal{D}'(\Omega)$ gegeben durch

$$\langle D^\alpha\delta_x, \varphi\rangle := (-1)^{|\alpha|}D^\alpha\varphi(x), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Dann ist

$$|\langle D^\alpha\delta_x, \varphi\rangle| = |D^\alpha\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_{|\alpha|}.$$

Somit ist die Ordnung von $D^\alpha\delta_x$ durch $|\alpha|$ beschränkt, und erwartungsgemäß ist diese sogar genau $N = |\alpha|$ (siehe Bemerkung 6.3).

(iii) Die Distribution $\sum_{j=0}^\infty D^j\delta_j$ auf $\mathbb{R}$ besitzt offenbar keine endliche Ordnung.

(d) Seien $\Omega_1 \subset \Omega$ nichtleere offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Bezeichnet $\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)$ die triviale Fortsetzung von $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ auf Ω, so definiert man die **Einschränkung** $u|_{\Omega_1}$ der Distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ auf Ω_1 durch

$$u|_{\Omega_1}(\varphi) := u(\tilde{\varphi}), \;\; \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1).$$

Theorem 5.2 (b) zeigt unmittelbar, daß $u|_{\Omega_1}$ eine Distribution in Ω_1 ist.
Wir sagen, u **verschwinde** auf Ω_1, falls $u|_{\Omega_1} = 0$. Dies ist offenbar gleichbedeutend damit, daß

$$u(\varphi) = 0 \qquad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ mit } \operatorname{supp}\varphi \subset \Omega_1. \tag{5.6}$$

Allgemeiner sagen wir, daß die Distributionen u und v aus $\mathcal{D}'(\Omega)$ **auf Ω_1 übereinstimmen,** wenn ihre Einschränkungen auf Ω_1 gleich sind.

Lemma 5.6 *Die Distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ verschwindet dann und nur dann auf Ω, wenn es zu jedem Punkt $x \in \Omega$ eine offene Umgebung U_x von x in Ω gibt, auf der u verschwindet.*

Beweis. Die eine Richtung ist klar. Es gebe umgekehrt zu jedem $x \in \Omega$ eine offene Umgebung U_x in Ω, auf welcher u verschwindet, und sei $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Wir müssen zeigen, daß $u(\varphi) = 0$ ist.

Sei dazu K der kompakte Träger von φ, und wähle endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_k \in K$ so, daß

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} U_{x_j}.$$

Nach Lemma 2.17 können wir dann eine den U_{x_j} untergeordnete glatte Teilung der Eins wählen, d.h. Funktionen $\chi_1, \ldots, \chi_k \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\operatorname{supp} \chi_j \subset U_{x_j}$, so daß $\sum_{j=1}^{k} \chi_j \equiv 1$ auf einer Umgebung von K. Dann ist $\varphi = \sum_{j=1}^{k} \varphi\chi_j$, wobei $\operatorname{supp} \varphi\chi_j \subset U_{x_j}$.
Mit (5.6) folgt, da u auf U_{x_j} verschwindet:

$$u(\varphi) = \sum_{j=1}^{k} u(\varphi\chi_j) = 0.$$

Q.E.D.

Korollar 5.7 *Sei $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Ist $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Familie offener Teilmengen $U_\alpha \subset \Omega$, auf welchen u verschwindet, so verschwindet u auch auf der Vereinigungsmenge $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.*

Definition. Sei $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Nach Korollar 5.7 gibt es eine größte offene Menge $U \subset \Omega$, auf welcher u verschwindet, nämlich die Vereinigungsmenge aller offenen Mengen, auf denen u verschwindet. Das Komplement $\Omega \setminus U$ bezeichnet man als den **Träger** der Distribution u, und schreibt dafür $\operatorname{supp} u$. Offenbar ist $\operatorname{supp} u$ abgeschlossen in Ω, und es gilt

$$u(\varphi) = 0 \qquad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ mit } \operatorname{supp} \varphi \cap \operatorname{supp} u = \emptyset. \tag{5.7}$$

5.2 Temperierte Distributionen als Distributionen auf dem $\mathbb{R}^n$

Sei $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ eine temperierte Distribution. Dann ist offenbar nach Theorem 5.2 die Einschränkung $u|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$ von u auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ eine Distribution auf $\mathbb{R}^n$. Nach Satz 4.20 liegt ferner $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, so daß u bereits durch $u|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$ bestimmt ist. Damit ist die lineare Abbildung

$$\iota : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),\ u \mapsto u|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)},$$

injektiv. Zudem ist sie offenbar stetig bzgl. der schwach*-Topologien von $\mathcal{S}'$ bzw. $\mathcal{D}'$, d.h. ι ist eine topologische Einbettung.
Dementsprechend werden wir in Zukunft temperierte Distributionen auch als Distributionen auf dem $\mathbb{R}^n$ betrachten, und kurz u anstelle von $u|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$ schreiben.

5.3 Operationen mit Distributionen

Ähnlich wie für temperierte Distributionen wollen wir auch für Distributionen in offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ die üblichen Operationen, wie z.B. partielle Ableitungen oder die Multiplikation mit geeigneten Funktionen, definieren. Dies werden wir mit Hilfe des Kriteriums (d) aus Theorem 5.2 in den meisten Fällen auf die bereits eingeführten Operationen für temperierte Distributionen zurückführen können.

Seien wieder Ω, Ω_1 und Ω_2 nichtleere offene Teilmengen eines Euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ (welcher nicht notwendig für Ω_1 und Ω_2 derselbe sein muß).

Definition. Sei $T : \mathcal{D}(\Omega_1) \to \mathcal{D}(\Omega_2)$ ein linearer Operator, zu dem es einen stetigen linearen Operator (den „formal transponierten Operator“)

$$ {}^tT : \mathcal{D}(\Omega_2) \to \mathcal{D}(\Omega_1) $$

gibt derart, daß

$$ \langle T\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, {}^tT\psi \rangle \qquad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1), \psi \in \mathcal{D}(\Omega_2). \tag{5.8} $$

Dann definiert man für $u \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ die Distribution $Tu \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ durch $Tu := u \circ {}^tT$, d.h.

$$ \langle Tu, \varphi \rangle = \langle u, {}^tT\varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_2). \tag{5.9} $$

Anstelle der Stetigkeit von ${}^tT$ genügt es nach Theorem 5.2, die Folgen-Stetigkeit in folgendem Sinne zu verlangen:

(c0) Für jede $\mathcal{D}$-Nullfolge $\{\varphi_j\}_j$ in $\mathcal{D}(\Omega_2)$ ist die Bildfolge $\{{}^tT\varphi_j\}_j$ eine $\mathcal{D}$-Nullfolge in $\mathcal{D}(\Omega_1)$.

Damit strebt dann nämlich $Tu(\varphi_j) = u({}^tT(\varphi_j))$ in $\mathbb{C}$ gegen 0, d.h. Tu ist eine Distribution in Ω_2.

Definition. Liegen Ω_1 und Ω_2 im selben Raum $\mathbb{R}^n$, so definieren wir für jedes $\chi \in \mathcal{D}(\Omega_2)$ die lineare Abbildung

$$ \widetilde{{}^tT\chi} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) $$

durch

$$ \widetilde{{}^tT\chi}(\varphi) := {}^tT(\chi\,\varphi|_{\Omega_2}), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). $$

Dabei fassen wir $\mathcal{D}(\Omega_1)$ als Teilraum von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ auf. Für den Fall, daß Ω_1 und Ω_2 in Räumen unterschiedlicher Dimensionen liegen, läßt sich der Operator $\widetilde{{}^tT\chi}$ offenbar analog definieren, aber wir werden dies nicht benötigen.
Das nachfolgende Kriterium wird für uns besonders nützlich sein.

Lemma 5.8 *Es gebe zu jeder Funktion $\chi \in \mathcal{D}(\Omega_2)$ ein Kompaktum $K_1 \subset \Omega_1$ so, daß $\widetilde{{}^tT\chi}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{D}_{K_1}$, und daß der lineare Operator $\widetilde{{}^tT\chi} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ stetig ist. Dann ist ${}^tT$ Folgen-stetig im Sinne von (c0).*
Insbesondere ist dann für jede Distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ durch $u \circ {}^tT$ eine Distribution $Tu \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ definiert.

Beweis. Sei $\{\varphi_j\}_j$ eine $\mathcal{D}$-Nullfolge in $\mathcal{D}(\Omega_2)$. Dann liegen insbesondere die Träger der φ_j in einem gemeinsamen Kompaktum $K_2 \subset \Omega_2$, d.h. es ist $\varphi_j \in \mathcal{D}_{K_2}$ für alle j. Wähle $\chi \in \mathcal{D}(\Omega_2)$ so, daß $\chi \equiv 1$ auf einer Umgebung von K_2, und anschließend ein Kompaktum $K_1 \subset \Omega_1$ so, daß $\widetilde{{}^tT\chi}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{D}_{K_1}$. Für $\varphi \in \mathcal{D}_{K_2}$ ist dann offenbar ${}^tT\varphi = \widetilde{{}^tT\chi}(\varphi)$. Ferner stimmt nach Satz 5.1 die Topologie auf $\mathcal{D}_{K_i}$ mit der Relativtopologie von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ überein. Damit konvergiert wegen der Stetigkeit von $\widetilde{{}^tT\chi} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ die Folge der ${}^tT\varphi_j$ in $\mathcal{D}_{K_1} \subset \mathcal{D}(\Omega_1)$ gegen 0, und ist damit eine $\mathcal{D}$-Nullfolge in $\mathcal{D}(\Omega_1)$.

Q.E.D.

Bemerkung 5.9 Die Folgen-Stetigkeit von ${}^tT$ wie auch die Bedingung in Lemma 5.8 sind tatsächlich sogar äquivalent zur Stetigkeit von ${}^tT$ - siehe dazu Theorem 5.18.

(a) Differentiation von Distributionen

Der Operator $D^\alpha : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ ist offenbar stetig, und es ist ${}^tD^\alpha = (-1)^{|\alpha|}D^\alpha$. Daher definiert man für $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ die partielle Ableitung $D^\alpha u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ durch

$$\langle D^\alpha u, \varphi\rangle := (-1)^{|\alpha|}\langle u, D^\alpha \varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

(b) Multiplikation mit glatten Funktionen

Sei $f \in C^\infty(\Omega)$, und sei $M_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ der Multiplikationsoperator $M_f(\varphi) := f\varphi$. Für jedes $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ist offenbar

$$\widetilde{M_f\chi}(\varphi) = M_{\widetilde{f\chi}}(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Da $\widetilde{f\chi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist, ist somit nach Satz 4.10 $\widetilde{M_f\chi} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ stetig. Ferner ist $\widetilde{M_f\chi}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{D}_K$, falls $K := \operatorname{supp}\chi$. Somit ist $M_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ nach Lemma 5.8 Folgen-stetig im Sinne von (c0). Da ferner ${}^tM_f = M_f$ ist, definiert man das **Produkt** der Funktion $f \in C^\infty(\Omega)$ mit der Distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ durch $fu := M_f u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, d.h.

$$\langle fu, \varphi\rangle := \langle u, f\varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Man zeigt leicht (Übung), daß

$$\operatorname{supp}(fu) \subset \operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} u. \tag{5.10}$$

(c) Die Faltung einer Distribution mit einer Testfunktion

Sei $\Omega = \mathbb{R}^n$, und sei $\psi \in \mathcal{D} := \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Es bezeichne

$$C_\psi : \mathcal{D} \to \mathcal{D}, \;\; \varphi \mapsto \psi * \varphi$$

den Faltungsoperator mit ψ. Für jedes $\chi \in \mathcal{D}$ gilt

$$\widetilde{C_\psi \chi}(\varphi) = \psi * (\chi\varphi) = \tilde{C}_\psi \circ M_\chi(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S},$$

wobei $\tilde{C}_\psi$ den Operator der Faltung mit ψ auf $\mathcal{S}$ bezeichne. Nach Satz 4.10 (d) ist somit $\widetilde{C_\psi \chi} = \tilde{C}_\psi \circ M_\chi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ stetig. Sei ferner K das Kompaktum

$$K := \operatorname{supp}\chi + \operatorname{supp}\psi.$$

Für $\varphi \in \mathcal{S}$ ist dann $\operatorname{supp}(C_\psi\,\chi)\varphi = \operatorname{supp}\psi * (\chi\varphi) \subset \operatorname{supp}\psi + \operatorname{supp}(\chi\varphi) \subset K$, d.h. $\widetilde{C_\psi \chi}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{D}_K$. Damit ist C_ψ nach Lemma 5.8 Folgen-stetig im Sinne von (c0). Ferner gilt, ähnlich wie für die Faltung auf $\mathcal{S}$, ${}^tC_\psi = C_{\check{\psi}}$. Man definiert daher die **Faltung** $\psi * u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ der Testfunktion $\psi \in \mathcal{D}$ mit der Distribution $u \in \mathcal{D}'$ durch

$$\langle \psi * u, \varphi\rangle := \langle u, \check{\psi} * \varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Ähnlich definiert man $u * \psi$ mittels $\langle u * \psi, \varphi\rangle := \langle u, \varphi * \check{\psi}\rangle$, und es gilt offenbar

$$u * \psi = \psi * u. \tag{5.11}$$

Ferner zeigt man leicht, daß

$$\operatorname{supp}\psi * u \subset \operatorname{supp}\psi + \operatorname{supp} u. \tag{5.12}$$

Ähnlich wie für die Faltung einer temperierten Distribution mit einer Schwartzfunktion kann man auch auf folgende Weise punktweise eine Faltung definieren:

$$u \circledast \psi(x) := \langle u, \lambda_x \check{\psi}\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{5.13}$$

Analog zu Theorem 4.18 gilt

Satz 5.10 *Seien $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt* *(a)* $u \circledast \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, *und*

$$D^\alpha(u \circledast \psi) = (D^\alpha u) \circledast \psi = u \circledast D^\alpha \psi \quad \textit{für alle } \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

(b) $u * \psi = u_f$, *mit* $f := u \circledast \psi$.

(c) $(u * \psi) * \varphi = u * (\psi * \varphi) \quad$ *für alle* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Für $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist $\widetilde{u\chi} \in \mathcal{S}'$ eine temperierte Distribution. Wähle $r > 0$ so, daß $\operatorname{supp}\psi \subset \overline{B}_r(0)$, und χ so, daß $\chi \equiv 1$ auf $\overline{B}_{R+r}(0)$, $R > 0$. Für $\varphi \in \mathcal{D}$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset \overline{B}_R(0)$ folgt dann

$$\begin{aligned} \langle u * \psi, \varphi \rangle &= \langle u, \varphi * \check{\psi} \rangle = \langle u, \chi(\varphi * \check{\psi}) \rangle \\ &= \langle \widetilde{u\chi}, \varphi * \check{\psi} \rangle = \langle \widetilde{u\chi} * \psi, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

da $\operatorname{supp}\varphi * \check{\psi} \subset \overline{B}_R(0) + \overline{B}_r(0) = \overline{B}_{R+r}(0)$, d.h. es gilt

$$u * \psi = \widetilde{u\chi} * \psi \quad \text{auf } \mathcal{D}_{\overline{B}_R(0)}.$$

Nach Theorem 4.18 ist aber

$$\widetilde{u\chi} * \psi = \widetilde{u\chi} \circledast \psi.$$

Ferner ist für $x \in \overline{B}_R(0)$

$$\widetilde{u\chi} \circledast \psi(x) = \langle \widetilde{u\chi}, \lambda_x \check{\psi} \rangle = \langle u, \chi(\lambda_x \check{\psi}) \rangle,$$

wobei $\operatorname{supp}\lambda_x \check{\psi} = x - \operatorname{supp}\check{\psi} \subset \overline{B}_{R+r}(0)$, womit also $\chi(\lambda_x\check{\psi}) = \lambda_x \check{\psi}$ gilt. Es folgt

$$\widetilde{u\chi} \circledast \psi(x) = u \circledast \psi(x) \quad \text{für alle } x \in \overline{B}_R(0). \tag{5.14}$$

Setzen wir $f := u \circledast \psi$, so erhalten wir insgesamt, daß

$$u * \psi|_{B_R(0)} = u_f|_{B_R(0)}.$$

Da $R > 0$ beliebig war, folgt (b).
Analog folgert man aus (5.14) und Theorem 4.18 auch (a) und (c).

Q.E.D.

Aufgrund dieses Satzes werden wir im folgenden, ähnlich wie für den Fall temperierter Distributionen, die Distribution $u * \psi$ stets mit der C^∞-Funktion $u \circledast \psi$ identifizieren.

(d) Koordinatentransformationen

Sei $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ ein C^∞-Diffeomorphismus der offenen Teilmenge Ω_1 des $\mathbb{R}^n$ auf die offenen Teilmenge Ω_2 des $\mathbb{R}^n$. Da für jede Funktion $\psi \in \mathcal{D}(\Omega_2)$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ aufgrund der Transformationsformel gilt

$$\langle \psi \circ \Phi, \varphi \rangle = \int_{\Omega_1} \psi \circ \Phi(x)\, \varphi(x)\, dx = \int_{\Omega_2} \psi(y)\, \varphi \circ \Phi^{-1}(y) |\det D\Phi^{-1}(y)|\, dy,$$

und da der durch ${}^tT\varphi(y) := \varphi \circ \Phi^{-1}(y) |\det D\Phi^{-1}(y)|$ definierte lineare Operator den Raum $\mathcal{D}(\Omega_1)$ offensichtlich stetig in $\mathcal{D}(\Omega_2)$ abbildet, definiert man für $u \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ die Distribution $u \circ \Phi \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ durch

$$\langle u \circ \Phi, \varphi \rangle := \langle u, \varphi \circ \Phi^{-1} |\det D\Phi^{-1}| \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1). \tag{5.15}$$

Bemerkungen. (a) Die Distribution $u \circ \Phi$ läßt sich sogar allgemeiner für jede **Submersion** $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ definieren, d.h. jede C^∞-Abbildung einer offenen Teilmenge Ω_1 eines $\mathbb{R}^n$ in eine offene Teilmenge Ω_2 eines $\mathbb{R}^m$, für welche das totale Differential $D\Phi(x)$ für jeden Punkt $x \in \Omega_1$ surjektiv ist (siehe z.B. [9]) .

(b) Man kann Distributionen auf beliebigen C^∞-Mannigfaltigkeiten M einführen, indem man zu jeder Karte (U_α, κ_a) eines gegebenen Atlanten der Mannigfaltigkeit eine Distribution u_α im zugehörigen Koordinatengebiet $\Omega_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ vorgibt und verlangt, daß diese Distributionen unter den Übergangstransformationen $\Phi_{\beta,\alpha}$ zwischen je zwei dieser Karten im Sinne von (5.15) ineinander übergehen.

Alternativ kann man auch wieder versuchen, Distributionen als die stetigen Linearformen auf $\mathcal{D}(M) := C_0^\infty(M)$ zu definieren. Dies führt auf den Begriff der „Distributionendichte“. Diese beiden Konzepte führen allerdings auf verschiedene Begriffe, und erst, wenn man auf M ein „glattes Referenzmaß“, wie z.B. auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit das Riemannsche Volumenelement, vorgibt, lassen sich beide Konzepte ineinander überführen (siehe [9]). Ein solches Maß $d\mu$ auf M, welches unter einer jeden Kartenabbildung $\kappa_\alpha : U_\alpha \to \Omega_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ eines offenen Kartengebietes $U_\alpha \subset M$ ein Bildmaß $(\kappa_\alpha)_*(d\mu)$ auf Ω_α besitzt, welches eine glatte Dichte ρ_α bzgl. des Lebesmaßes besitzt, d.h., $(\kappa_\alpha)_*(d\mu) = \rho_\alpha\, dx$, mit $\rho_\alpha \in C^\infty(\Omega_\alpha)$, erlaubt es nämlich einerseits, geeignete Funktionen f auf M wieder mit Maßen $f d\mu$ zu identifizieren, und somit mit der Distributionendichte u_f, welche durch $u_f(\varphi) := \int_M f\, d\mu$, $\varphi \in C_0^\infty(M)$, definiert ist. Ferner erlaubt es, ähnlich wie auf dem $\mathbb{R}^n$, durch $\langle T\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, {}^tT\psi \rangle$ wieder formal transponierte Operatoren einzuführen, falls wir hier

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \int_M \varphi\psi\, d\mu$$

setzen. Ist nun $\{u_\alpha\}_\alpha$ eine Distribution auf M, wobei jeweils $u_\alpha \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ist, so kann man eine Linearform v auf $\mathcal{D}(M)$ wie folgt einführen:

Ist z.B. $\varphi \in \mathcal{D}(M)$ im Kartengebiet U_α getragen, so setzt man

$$v(\varphi) := \langle u_\alpha, (\varphi \circ \kappa_\alpha^{-1})\, \rho_\alpha \rangle.$$

Ist nun $\varphi \in \mathcal{D}(M)$ ebenso im Kartengebiet U_β getragen, und bezeichnet $\Phi_{\beta,\alpha} := \kappa_\beta \circ \kappa_\alpha^{-1}$ den Kartenwechsel zwischen Ω_α und Ω_β (genauer: der jeweiligenTeilmengen, welche dem Durchschnitt $U_\alpha \cap U_\beta$ entsprechen), so folgt aufgrund unserer Voraussetzungen an die Familie der Distributionen u_α, wonach ja $u_\alpha = u_\beta \circ \Phi_{\beta,\alpha}$ ist, mit (5.15) offenbar

$$\langle u_\alpha, (\varphi \circ \kappa_\alpha^{-1})\, \rho_\alpha \rangle = \langle u_\beta, (\varphi \circ \kappa_\beta^{-1}) \rho_\alpha \circ \Phi_{\alpha,\beta}^{-1} \,|\det D\Phi_{\alpha,\beta}^{-1}| \rangle.$$

Ferner ist offenbar $\rho_\beta\, dx$ das Bildmaß $(\Phi_{\alpha,\beta})_*(\rho_\alpha\, dx)$ von $\rho_\alpha dx$ unter der Übergangstransformation $\Phi_{\alpha,\beta}$, d.h., $(\Phi_{\alpha,\beta})_*(\rho_\alpha\, dx) = \rho_\beta\, dx$. Hieraus erhält man leicht mit Hilfe der Transformationsformel für das Lebesguemaß dx, daß

$$\rho_\alpha \circ \Phi_{\alpha,\beta}^{-1} \,|\det D\Phi_{\alpha,\beta}^{-1}| = \rho_\beta.$$

Insgesamt erhalten wir damit, dass

$$\langle u_\alpha, (\varphi \circ \kappa_\alpha^{-1})\, \rho_\alpha \rangle = \langle u_\beta, (\varphi \circ \kappa_\beta^{-1})\, \rho_\beta \rangle.$$

Dies zeigt, daß die Definition von v nicht von der Wahl der Karte abhängt, und mit Hilfe von Teilungen der Eins zeigt man schließlich, daß v auf ganz $\mathcal{D}(M)$ wohldefiniert, linear und stetig ist. Damit haben wir dann der Distribution $\{u_\alpha\}_\alpha$ eine Distributionendichte v auf $\mathcal{D}(M)$ zugeordnet, und umgekehrt kann man zeigen, daß man jeder Distributionendichte v eine Distribution $\{u_\alpha\}_\alpha$ zuordnen kann so, daß die beschriebenen Prozesse zueinander invers sind. Für weitere Details sei auf die Literatur, z.B. [9], verwiesen.

Beispiel 5.11 Sei $\Phi := \exp : \mathbb{R} \to]0,\infty[$ die Exponentialabbildung, und sei $y_0 \in]0,\infty[$ ein fester Punkt im Bildbereich. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\langle \delta'_{y_0} \circ \exp, \varphi \rangle &= \langle \delta'_{y_0}, \varphi \circ \log\, |\log'| \rangle = -\frac{d}{dy}\left(\frac{\varphi \circ \log(y)}{y} \right)(y_0) \\
&= -\frac{\varphi'(\log y_0)}{y_0^2} + \frac{\varphi(\log y_0)}{y_0^2}.
\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\delta'_{y_0} \circ \exp = e^{-2x_0}\left(\delta'_{x_0} + \delta_{x_0}\right), \quad \text{mit } x_0 := \log y_0.$$

5.4 $\mathcal{D}(\Omega)$ als topologischer Vektorraum*

Die Ergebnisse, die wir in diesem und im nachfolgenden Abschnitt beweisen werden, sind mehr von theoretischer Bedeutung - wer hauptsächlich am praktischen Umgang mit Distributionen interessiert ist, kann diese Abschnitte ohne weiteres auslassen oder erst später darauf zurückkommmen.
Im vorliegenden Abschnitt wollen wir die Topologie von $\mathcal{D}(\Omega)$ ausführlicher untersuchen.
Wie man leicht sieht, bilden für jedes Kompaktum $K \subset \Omega$ die Einschränkungen der Halbnormen aus $\mathcal{N}_{\mathcal{D}(\Omega)}$ auf $\mathcal{D}_K$ ein zur Familie $\{\|\cdot\|_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ äquivalentes System von Halbnormen auf $\mathcal{D}_K$. Daraus folgt sofort

Satz 5.12 *Für jedes Kompaktum $K \subset \Omega$ stimmt die Topologie von $\mathcal{D}_K$ mit der Relativtopologie von $\mathcal{D}(\Omega)$ überein, d.h. eine Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}_K$ ist offen genau dann, wenn es eine offene Teilmenge $\mathcal{V} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ gibt mit $\mathcal{U} = \mathcal{V} \cap \mathcal{D}_K$.*

Der Raum $\mathcal{D}(\Omega)$ ist, wie wir sehen werden, leider nicht metrisierbar. Für Folgen läßt sich der Konvergenzbegriff in $\mathcal{D}(\Omega)$ dennoch leicht beschreiben (vergl. auch Theorem 5.2 (d)).

Satz 5.13 *Seien $\{\varphi_j\}_j$ eine Folge in $\mathcal{D}(\Omega)$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $\varphi = \lim\limits_{j\to\infty} \varphi_j$ *in* $\mathcal{D}(\Omega)$.

(ii) Alle φ_j und φ sind in einem gemeinsamen Kompaktum $K \subset \Omega$ getragen, und die φ_j konvergieren in $\mathcal{D}_K$ gegen φ, d.h. $\lim\limits_{j\to\infty} \|\varphi - \varphi_j\|_N = 0$ für alle $N \in \mathbb{N}$.

Beweis. (ii)$\Rightarrow$ (i) folgt unmittelbar aus Satz 5.12.
Es gelte umgekehrt (i). Wir beobachten zunächst, daß stets $\|\cdot\|_N$ in $\mathcal{N}_{\mathcal{D}(\Omega)}$ liegt (wähle für $\{A\}$ die Folge $\Omega, \emptyset, \emptyset, \ldots$, und $N_j := N$, $\varepsilon_j := 1$.) Somit gilt insbesondere $\lim\limits_{j\to\infty} \|\varphi - \varphi_j\|_N = 0$ für jedes $N \in \mathbb{N}$. Es bleibt zu zeigen, daß alle φ_j in einem gemeinsamen Kompaktum getragen sind.
Wäre dies aber nicht der Fall, so gäbe es eine Folge von Punkten $\{x_j\}_j$ in Ω, welche in Ω gegen Unendlich streben, sowie eine Teilfolge $\{\varphi_{k_j}\}_j$ von $\{\varphi_j\}_j$ so, daß $(\varphi - \varphi_{k_j})(x_j) \neq 0$ für alle j. Wähle dann $A_j := \{x_j\}$, $N_j := 0$ und $\varepsilon_j := |(\varphi - \varphi_{k_j})(x_j)|$. Für die zugehörige Halbnorm folgte dann

$$\|\varphi - \varphi_{k_j}\|_{\{A\},\{N\},\{\varepsilon\}} \geq \frac{1}{\varepsilon_j}\|\varphi - \varphi_{k_j}\|_{0,\{x_j\}} = \frac{|(\varphi - \varphi_{k_j})(x_j)|}{\varepsilon_j} = 1$$

für alle j, im Widerspruch zu (i). Q.E.D.

Definition. Eine Folge bzw. allgemeiner ein Netz $\{v_j\}_{j\in J}$ in einem topologischen Vektorraum V heiße **Cauchy-Folge** bzw. **Cauchy-Netz**, falls es zu jeder Umgebung $\mathcal{U}$ der Null in V einen Index $j_0 \in J$ gibt so, daß

$$v_j - v_k \in \mathcal{U} \quad \text{für alle } j, k \geqslant j_0.$$

Wird die Topologie auf V durch die Halbnormen $\{\|\cdot\|_i\}_{i\in I}$ erzeugt, so ist dies offenbar gleichbedeutend damit, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $i \in I$ ein j_0 gibt so, daß

$$\|v_j - v_k\|_i < \varepsilon \quad \text{für alle } j, k \geqslant j_0. \tag{5.16}$$

Theorem 5.14 $\mathcal{D}(\Omega)$ *ist* **vollständig**, *d.h. jede Cauchy-Folge und allgemeiner jedes Cauchy-Netz in* $\mathcal{D}(\Omega)$ *ist konvergent in* $\mathcal{D}(\Omega)$.

Beweis. Sei $\{\varphi_\nu\}_\nu$ ein Cauchy-Netz in $\mathcal{D}(\Omega)$. Dann bildet $\{\varphi_\nu\}_\nu$ insbesondere ein Cauchy-Netz bzgl. jeder Halbnorm $\|\cdot\|_N$, und damit konvergiert nach bekannten Sätzen $\{\varphi_\nu\}_\nu$ gleichmäßig auf Ω gegen eine C^∞-Funktion φ auf Ω, und jede Ableitung $D^\alpha\varphi_\nu$ konvergiert gleichmäßig gegen $D^\alpha\varphi$. Ähnlich wie im Beweis von Satz 5.13 zeigen wir, daß φ kompakten Träger hat, d.h. in $\mathcal{D}(\Omega)$ liegt.
Andernfalls gäbe es nämlich eine Folge von Punkten $\{x_j\}_j$ in Ω, welche in Ω gegen Unendlich strebt, so daß $\varphi(x_j) \neq 0$ für alle j. Wähle dann $A_j := \{x_j\}$, $N_j := 0$ und $\varepsilon_j := |\varphi(x_j)|$, und setze

$$\|\psi\|' := \|\psi\|_{\{A\},\{N\},\{\varepsilon\}} = \sum_j \frac{|\psi(x_j)|}{|\varphi(x_j)|}.$$

Da $\{\varphi_\nu\}_\nu$ ein Cauchy-Netz bzgl. $\|\cdot\|'$ ist, gäbe es dann ein ν_0 sowie eine $C > 0$ so, daß

$$\|\varphi_\nu\|' \leq C \quad \text{für alle } \nu \geqslant \nu_0,$$

(wieso?), d.h. es folgte

$$\sum_j \frac{|\varphi_\nu(x_j)|}{|\varphi(x_j)|} \leq C \quad \text{für alle } \nu \geqslant \nu_0. \tag{5.17}$$

Für jedes j gilt aber $\lim_\nu \varphi_\nu(x_j) = \varphi(x_j)$, im Widerspruch zu (5.17).
Es bleibt zu zeigen, daß die φ_ν in $\mathcal{D}(\Omega)$ gegen φ streben. Wir betrachten dazu eine beliebige Halbnorm $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{\{A\},\{N\},\{\varepsilon\}}$ aus $\mathcal{N}_{\mathcal{D}(\Omega)}$, und fixieren ein $\varepsilon > 0$. Dann gibt es einen Indes ν_0 so, daß

$$\|\varphi_\nu - \varphi_\mu\| < \varepsilon/3 \quad \text{für alle } \nu, \mu \geqslant \nu_0.$$

Ferner gibt es ein j_0 so, daß $\operatorname{supp}\varphi \cap A_j = \emptyset$ für alle $j \geq j_0$. Wähle dann $j_1 \geq j_0$ so, daß

$$\sum_{j>j_1} \frac{1}{\varepsilon_j}\|\varphi_{\nu_0}\|_{A_j,N_j} < \varepsilon/3.$$

Für $\nu \geqslant \nu_0$ ist dann

$$\sum_{j>j_1} \frac{1}{\varepsilon_j} \|\varphi_\nu\|_{A_j,N_j} \leq \|\varphi_\nu - \varphi_{\nu_0}\| + \varepsilon/3 < 2\varepsilon/3.$$

Es folgt

$$\|\varphi - \varphi_\nu\| = \sum_{j=0}^{j_1} \frac{1}{\varepsilon_j} \|\varphi - \varphi_\nu\|_{A_j,N_j} + \sum_{j>j_1} \frac{1}{\varepsilon_j} \|\varphi_\nu\|_{A_j,N_j} < \sum_{j=0}^{j_1} \frac{1}{\varepsilon_j} \|\varphi - \varphi_\nu\|_{N_j} + 2\varepsilon/3.$$

Da für jedes j gilt $\lim_\nu \|\varphi - \varphi_\nu\|_{N_j} = 0$, gibt es schließlich ein $\nu_1 \geqslant \nu_0$ so, daß $\sum\limits_{j=0}^{j_1} \frac{1}{\varepsilon_j} \|\varphi - \varphi_\nu\|_{N_j} < \varepsilon/3$ für alle $\nu \geqslant \nu_1$. Für $\nu \geqslant \nu_1$ erhalten wir somit $\|\varphi - \varphi_\nu\| < \varepsilon$.

Q.E.D.

Für jede kompakte Ausschöpfung $\{K_j\}_j$ von Ω gilt offenbar

$$\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_j \mathcal{D}_{K_j}, \tag{5.18}$$

d.h. in gewissem Sinne ist $\mathcal{D}(\Omega)$ ein „Grenzwert“ von Räumen $\mathcal{D}_K$. Der folgende Satz zeigt, daß dies sogar im topologischem Sinne gilt.

Theorem 5.15 *Der lokal-konvexe topologische Vektorraum $\mathcal{D}(\Omega)$ ist der „induktive Limes“ der topologischen Vektorräume $\mathcal{D}_K$, d.h. eine konvexe Teilmenge von $\mathcal{D}(\Omega)$ ist eine Umgebung der Null in $\mathcal{D}(\Omega)$ dann und nur dann, wenn für jedes Kompaktum $K \subset \Omega$ ihr Durschschnitt mit $\mathcal{D}_K$ eine Umgebung der Null in $\mathcal{D}_K$ ist.*

Beweis. Die eine Implikation ist nach Satz 5.12 klar.
Sei umgekehrt $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ eine konvexe Teilmenge, deren Durchschnitt mit jedem $\mathcal{D}_K$ eine Nullumgebung in $\mathcal{D}_K$ ist. Es bleibt zu zeigen, daß $\mathcal{U}$ eine Nullumgebung in $\mathcal{D}(\Omega)$ ist.
Sei dazu $\{K_j\}_j$ eine kompakte Ausschöpfung von Ω. Zu jedem j gibt es dann ein $N_j \in \mathbb{N}$ und ein $\delta_j > 0$ so, daß die Kugel $\{\psi \in \mathcal{D}_{K_{j+1}} : \|\psi\|_{N_j} < \delta_j\}$ in $\mathcal{U} \cap \mathcal{D}_{K_{j+1}}$ liegt.
Wie im Beweis von Theorem 5.2 wählen wir wieder eine Folge $\{\eta_j\}_j$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ so, daß $\sum_j \eta_j \equiv 1$ in Ω, und $\operatorname{supp} \eta_j \subset A_j$, wobei $A_0 := K_1$ und $A_j := K_{j+1} \setminus K_{j-1}$ für $j \geq 1$ sei. Jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ läßt sich dann zerlegen als endliche Summe

$$\varphi = \sum_j 2^{-j-1} \, (2^{j+1} \eta_j \varphi).$$

Aufgrund der Konvexität von $\mathcal{U}$ liegt nun φ bereits dann in $\mathcal{U}$, wenn jede der Funktionen $2^{j+1}\eta_j\varphi$ in $\mathcal{U}$ liegt.
Mittels der Leibnizformel sieht man leicht, daß es zu jedem j eine Konstante $k_j \geq 0$ gibt so, daß für alle $\varepsilon_j > 0$ folgendes gilt:

$$\|\varphi\|_{A_j,N_j} \le \varepsilon_j \text{ impliziert stets } \|2^{j+1}\eta_j\varphi\|_{N_j} \le k_j\varepsilon_j.$$

Wir wählen nun eine Folge $\{\varepsilon_j\}_j$, $\varepsilon_j > 0$ so, daß $k_j\varepsilon_j < \delta_j$ für alle j, und setzen $\|\cdot\| := \|\varphi\|_{\{A\},\{N\},\{\varepsilon\}}$, mit den so gewählten A_j, N_j und ε_j.
Für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\|\varphi\| < 1$ gilt dann $\frac{1}{\varepsilon_j}\|\varphi\|_{A_j,N_j} < 1$, also $\|2^{j+1}\eta_j\varphi\|_{N_j} < \delta_j$, d.h. $2^{j+1}\eta_j\varphi \in \mathcal{U}$, da ja $\operatorname{supp}(2^{j+1}\eta_j\varphi) \subset K_{j+1}$. Folglich liegt φ in $\mathcal{U}$. Damit ist $\mathcal{U}$ eine Umgebung der Null in $\mathcal{D}(\Omega)$.

Q.E.D.

Bemerkung. Da der Raum $\mathcal{D}_K$ metrisierbar ist, ist eine Abbildung auf $\mathcal{D}_K$ stetig genau dann, wenn sie Folgen-stetig ist.
Damit ergibt sich rasch

Satz 5.16 *Sei $T : \mathcal{D}(\Omega) \to X$ eine lineare Abbildung in einen lokal-konvexen topologischen Vektorraum X. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

(i) T ist stetig.

(ii) $T|_{\mathcal{D}_K} : \mathcal{D}_K \to X$ ist stetig für jedes Kompaktum $K \subset \Omega$.

(iii) $\lim\limits_{j\to 0} T\varphi_j = 0$ für jede Nullfolge $\{\varphi_j\}_j$ in $\mathcal{D}(\Omega)$.

Beweis. Aufgrund der Definition der Topologie auf $\mathcal{D}(\Omega)$ stimmt die Topologie von $\mathcal{D}_K$ mit der Relativtopologie von $\mathcal{D}(\Omega)$ überein, falls $K \subset \Omega$ kompakt ist. Damit folgt sofort (i) $\Rightarrow$ (ii), und (ii) $\Rightarrow$ (iii) ist klar aufgrund von Satz 5.13. Umgekehrt folgt aus obiger Bemerkung (iii) $\Rightarrow$ (ii).
Es gelte schließlich (ii), und es sei $\mathcal{V}$ eine Nullumgebung in X. Wir zeigen, daß $\mathcal{U} := T^{-1}(\mathcal{V}) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ eine Nullumgebung in $\mathcal{D}(\Omega)$ ist. Wir dürfen o.B.d.A. annehmen, daß $\mathcal{V}$ konvex ist. Dann gilt das Gleiche aber auch für $\mathcal{U}$, da T linear ist, und nach Voraussetzung ist $\mathcal{U} \cap \mathcal{D}_K = (T|_{\mathcal{D}_K})^{-1}(\mathcal{V})$ eine Nullumgebung in $\mathcal{D}_K$, für jedes Kompaktum $K \subset \Omega$. Damit ist $\mathcal{U}$ nach Theorem 5.15 eine Nullumgebung in $\mathcal{D}(\Omega)$, und folglich ist T stetig in 0. Wegen der Linearität von T ist T dann in jedem Punkt $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ stetig, und damit folgt (i).

Q.E.D.

Bemerkungen 5.17 (a) Die Topologie von $\mathcal{D}(\Omega)$ ist nicht metrisierbar.
Wählt man nämlich eine kompakte Ausschöpfung $\{K_j\}_j$ von Ω, so ist

$$\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathcal{D}_{K_j}. \tag{5.19}$$

Jeder Teilraum $\mathcal{D}_{K_j}$ hat jedoch offenbar leeres Inneres bzgl. $\mathcal{D}(\Omega)$ (andernfalls enthielte nämlich $\mathcal{D}_{K_j}$ auch eine Nullumgebung, und damit wäre schon $\mathcal{D}_{K_j} =$

$\mathcal{D}(\Omega)$). Wäre der Raum $\mathcal{D}(\Omega)$ nun metrisierbar, so wäre er nach Theorem 5.14 ein Fréchetraum, und somit wäre nach dem Baireschen Kategoriensatz (siehe [13]) $\bigcup_{j=0}^{\infty} \mathcal{D}_{K_j}$ nirgends dicht in $\mathcal{D}(\Omega)$.

(b) Der Raum $\mathcal{D}(\Omega)$, versehen mit der durch die Folge der Normen $\|\cdot\|_N$ erzeugten Topologie, ist nicht vollständig (Übung).

5.5 Stetige lineare Abbildungen zwischen Räumen von Testfunktionen*

Wir werden nun noch die stetigen linearen Abbildungen zwischen Räumen von Testfunktionen charakterisieren.

Satz 5.18 *Sei $T : \mathcal{D}(\Omega_1) \to \mathcal{D}(\Omega_2)$ eine lineare Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) T ist stetig.

(ii) Für jede Folge $\{\varphi_j\}_j$ in $\mathcal{D}(\Omega_1)$ gilt:
Aus $\varphi = \lim_{j\to\infty} \varphi_j$ in $\mathcal{D}(\Omega_1)$ folgt $T\varphi = \lim_{j\to\infty} T\varphi_j$ in $\mathcal{D}(\Omega_2)$.

(iii) Zu jedem Kompaktum $K_1 \subset \Omega_1$ gibt es ein Kompaktum $K_2 \subset \Omega_2$ so, daß gilt:
$T|_{\mathcal{D}_{K_1}}$ bildet $\mathcal{D}_{K_1}$ stetig nach $\mathcal{D}_{K_2}$ ab.

(iv) Zu jedem $\chi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ gibt es ein Kompaktum $K \subset \Omega_2$ so, daß gilt:
$\widetilde{T\chi}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{D}_K$, und $\widetilde{T\chi} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist stetig.

Beweis. Die Äquivalenz von (i) und (ii) folgt sofort aus Satz 5.16.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Sei T stetig, und sei $K_1 \subset \Omega_1$ kompakt. Es genügt zu zeigen, daß ein Kompaktum $K_2 \subset \Omega_2$ existiert so, daß $T(\mathcal{D}_{K_1}) \subset \mathcal{D}_{K_2}$; die Stetigkeit von $T|_{\mathcal{D}_{K_1}} : \mathcal{D}_{K_1} \to \mathcal{D}_{K_2}$ ist dann klar, da $\mathcal{D}_{K_i}$ die Relativtopologie von $\mathcal{D}(\Omega_i),\ i = 1, 2,$ trägt.

Angenommen, es existierte kein solches Kompaktum $K_2 \subset \Omega_2$. Wähle dann eine kompakte Ausschöpfung $\{K^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ von Ω_2. Zu jedem j gäbe es dann einen Punkt $y_j \in \Omega_2 \setminus K^j$ sowie eine Funktion $\psi_j \in \mathcal{D}_{K_1}$ so, daß $T\psi_j(y_j) \neq 0$. Setze $\varphi_j := \frac{\psi_j}{\|\psi_j\|_j}$. Dann gilt

$$\|\varphi_j\|_N \leq \|\varphi_j\|_j = 1 \quad \text{für alle } j \geq N,$$

und $\varepsilon_j := \frac{|T\varphi_j(y_j)|}{j+1} > 0$. Nun liegt die durch

$$\|\psi\|' := \sum_j \frac{1}{\varepsilon_j}|\psi(y_j)|, \quad \psi \in \mathcal{D}(\Omega_2),$$

definierte Halbnorm $\|\cdot\|'$ in $\mathcal{N}_{\mathcal{D}(\Omega_2)}$. Wegen der Stetigkeit von T gibt es zu dieser Halbnorm daher ein $N \in \mathbb{N}$ sowie eine Konstante $C \geq 0$ so, daß

$$\|T\varphi\|' \leq C\|\varphi\|_N \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}_{K_1}.$$

Insbesondere folgte für alle $j \geq N$

$$j+1 = \frac{|T\varphi_j(y_j)|}{\varepsilon_j} \leq \|T\varphi_j\|' \leq C\|\varphi_j\|_N \leq C.$$

Damit erhielten wir einen Widerspruch.
(iii) $\Rightarrow$ (iv). Sei $\chi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$, und setze $K_1 := \operatorname{supp}\chi$. Für $\varphi \in \mathcal{S}$ ist dann

$$\widetilde{T\chi}(\varphi) = T(\varphi^0), \text{ wobei } \varphi^0 := \chi\, \varphi|_{\Omega_1} \in \mathcal{D}_{K_1}.$$

Da die Multiplikation mit χ eine stetige Abbildung auf $\mathcal{S}$ ist, folgt die Stetigkeit von $\widetilde{T\chi} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ damit unmittelbar aus (iii) und Satz 5.1.

(iv) $\to$ (i). Nach Satz 5.16 ist $T : \mathcal{D}(\Omega_1) \to \mathcal{D}(\Omega_2)$ stetig genau dann, wenn $T|_{\mathcal{D}_K} : \mathcal{D}_K \to \mathcal{D}(\Omega_2)$ stetig ist für jedes Kompaktum $K \subset \Omega_1$. Sei K ein solches Kompaktum, und wähle $\chi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ so, daß $\chi \equiv 1$ auf einer Umgebung von K. Für $\varphi \in \mathcal{D}_K$ ist dann offenbar $T\varphi = \widetilde{T\chi}(\varphi)$. Somit ist nach (iv) und Satz 5.1 die Restriktion $T|_{\mathcal{D}_K} : \mathcal{D}_K \to \mathcal{S}$ stetig, wobei das Bild in einem Raum $\mathcal{D}_{K_2}$ liegt. Wieder mit Satz 5.1 ist also

$$T|_{\mathcal{D}_K} : \mathcal{D}_K \to \mathcal{D}_{K_2} \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega_2)$$

stetig.

Q.E.D.

Kapitel 6

Distributionen mit kompaktem Träger

6.1 Fortsetzung auf $\mathcal{E}(\Omega)$ und $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.

Definition. Sei $\Omega \neq \emptyset$ offen im $\mathbb{R}^n$. Die Distributionen $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mit kompaktem Träger bilden offenbar einen linearen Teilraum von $\mathcal{D}'(\Omega)$, welchen wir mit $\mathcal{E}'(\Omega)$ bezeichnen wollen.

Satz 6.1 *Sei $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$, und sei $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ so, daß $\chi \equiv 1$ auf einer Umgebung des Trägers von u.*

(a) Dann ist $\chi u = u$ auf $\mathcal{D}(\Omega)$.

(b) Durch $\tilde{u}(\varphi) := u(\chi\,\varphi)$, $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, läßt sich u von $\mathcal{D}(\Omega)$ zu einer Linearform $\tilde{u}$ auf dem Raum $C^\infty(\Omega)$ fortsetzen. Diese Fortsetzung hängt nicht von der Wahl von χ ab.

(c) Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, sowie zu jeder kompakten Umgebung K von $\operatorname{supp} u$ in Ω eine Konstante $C_K \geq 0$ so, daß

$$|\tilde{u}(\varphi)| \leq C_K \max_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)| \tag{6.1}$$

für alle $\varphi \in C^\infty(\Omega)$. Insbesondere hat u endliche Ordnung, und wir dürfen in (6.1) für N die Ordnung von u wählen.

Beweis. (a) Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \langle u, \varphi \rangle &= \langle u, \chi\varphi \rangle + \langle u, (1-\chi)\varphi \rangle \\ &= \langle \chi u, \varphi \rangle + \langle u, (1-\chi)\varphi \rangle. \end{aligned}$$

Nun ist $(1-\chi)\varphi \equiv 0$ auf einer Umgebung von $\operatorname{supp} u$, d.h. $\operatorname{supp}((1-\chi)\varphi) \cap \operatorname{supp} u = \emptyset$. Nach (5.7) ist somit $\langle u, (1-\chi)\varphi\rangle = 0$, und folglich $\langle u, \varphi\rangle = \langle \chi u, \varphi\rangle$.
(b) Sei χ_1 eine weitere Testfunktion in $\mathcal{D}(\Omega)$, welche auf einer Umgebung von $\operatorname{supp} u$ identisch 1 ist. Für $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ ist dann

$$\langle u, \chi\,\varphi\rangle - \langle u, \chi_1\,\varphi\rangle = \langle u, (\chi - \chi_1)\varphi\rangle. \tag{6.2}$$

Da aber $(\chi-\chi_1)\varphi$ auf einer Umgebung von $\operatorname{supp} u$ verschwindet, ist $\langle u, (\chi-\chi_1)\varphi\rangle = 0$. Damit folgt die Behauptung.
(c) Da K eine Umgebung des Trägers von u ist, gibt es nach Lemma 2.15 eine Funktion $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ so, daß $\chi \equiv 1$ auf einer Umgebung von $\operatorname{supp} u$ und $\operatorname{supp} \chi \subset K$. Nach (a) ist dann $u = \chi u$, und nach Theorem 5.2(b) gibt es zu K Konstanten $N = N_K \in \mathbb{N}$ und $C_K \geq 0$ so, daß für alle $\varphi \in C^\infty(\Omega)$

$$|\tilde{u}(\varphi)| = |u(\chi\varphi)| \leq C_K \|\chi\varphi\|_N,$$

da ja $\operatorname{supp}(\chi\varphi) \subset K$. Nach der Leibnizregel ist jedoch wegen $\operatorname{supp} \chi \subset K$

$$\|\chi\varphi\|_N \leq C \max_{|\alpha|\leq N} \sup_{x\in K} |D^\alpha \varphi(x)| = C\|\varphi\|_{K,N},$$

wie man leicht sieht. Damit erhalten wir (6.1), wobei a priori N von K abhängt. Wir dürfen aber o.B.d.A. annehmen, daß jedes unserer Kompakta K in einem festen Kompaktum $L \subset \Omega$ liegt, zu dem wir N gemäß Theorem 5.2 gewählt haben. Damit kann dann N unabhängig von K gewählt werden, und zwar dürfen wir sogar für N die Ordnung von u wählen.

Q.E.D.

Definitionen. (a) Es bezeichne $\mathcal{E}(\Omega)$ den Raum $C^\infty(\Omega)$, versehen mit der lokalkonvexen Topologie, welche von der Familie von Halbnormen

$$\mathcal{N}_{\mathcal{E}(\Omega)} := \{\|\cdot\|_{K,N}\}_{K\subset\Omega \text{ kompakt}, N\in\mathbb{N}},$$

erzeugt wird. Dies ist offenbar die Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz sämtlicher Ableitungen. Ist $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine kompakte Ausschöpfung von Ω, und wählt man anstelle von $\mathcal{N}_{\mathcal{E}(\Omega)}$ die entsprechende Familie von Halbnormen, für die nur die abzählbar vielen Kompakta $K = K_j$ verwendet werden, so erhält man offenbar eine äquivalente abzählbare Familie von Halbnormen, womit der topologische Vektorraum $\mathcal{E}(\Omega)$ metrisierbar ist. Man sieht ferner leicht, daß der Raum $\mathcal{E}(\Omega)$ vollständig ist, und somit einen Fréchetraum bildet.
Nach Satz 6.1(c) läßt sich jede Distribution mit kompaktem Träger in Ω auf natürliche Weise zu einer stetigen Linearform auf $\mathcal{E}(\Omega)$ fortsetzen.
Umgekehrt erfüllt jede stetige Linearform $\tilde{u}$ auf $\mathcal{E}(\Omega)$ offenbar die Ungleichung (6.1), für ein geeignetes Kompaktum $K \subset \Omega$ und gewisse Konstanten C_K und N. Somit

ist die Einschränkung u von $\tilde{u}$ auf $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{E}(\Omega)$ eine Distribution in Ω, welche in dem Kompaktum K getragen ist, und ihre natürliche Fortsetzung im Sinne von Satz 6.1 stimmt mit $\tilde{u}$ überein.
Damit kann man den Raum $\mathcal{E}'(\Omega)$ aller Distributionen mit kompaktem Träger in Ω in der Tat mit dem topologischen Dualraum von $\mathcal{E}(\Omega)$ identifizieren.

(b) Der Beweis von Satz 6.1 zeigt, daß sich durch

$$\tilde{\tilde{u}}(\varphi) := \tilde{u}(\varphi|_\Omega) = u(\chi\,\varphi|_\Omega), \quad \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n),$$

die Distribution $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ von $\mathcal{D}(\Omega)$ sogar auf natürliche Weise „trivial" zu einer Linearform $\tilde{\tilde{u}}$ auf dem Raum $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen läßt. Diese Fortsetzung hängt wieder nicht von der Wahl von χ ab, und es gilt analog zu (6.1) die Ungleichung

$$|\tilde{\tilde{u}}(\varphi)| \leq C \max_{|\alpha|\leq N} \sup_{x\in K} |D^\alpha \varphi(x)| \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n), \tag{6.3}$$

für ein geeignetes Kompaktum $K \subset \Omega$ und gewisse Konstanten C und N.
Damit kann man jede Distribution u mit kompaktem Träger auf Ω auf natürliche Weise auch als Distribution mit kompaktem Täger auf dem ganzen $\mathbb{R}^n$ auffassen. Deren Einschränkung $\tilde{\tilde{u}}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} = \widetilde{u\chi}$ auf den Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist per definitionem eine temperierte Distribution (was auch sofort aus (6.3) folgt).

Im folgenden werden wir meist all diese Fortsetzungen $\tilde{\tilde{u}}, \tilde{u}$ bzw. $\widetilde{u\chi}$ wieder kurz mit u bezeichnen, soweit aus dem Kontext klar ist, auf welchem Raum diese jeweils operieren.

Insbesondere ist für $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ die Fouriertransformierte $\hat{u} \in \mathcal{S}'$ wohldefiniert.

(c) Allgemeiner läßt sich sogar die Fourier-Laplace-Transformierte von $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ definieren: Für $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$ bezeichne $e_\zeta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ die Funktion

$$e_\zeta(x) := e^{i\zeta\cdot x}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei

$$\zeta \cdot x := \zeta_1 x_1 + \cdots + \zeta_n x_n$$

sei. Da $e_\zeta \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ ist, können wir somit für $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ die Funktion

$$\mathcal{FL}u : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$$

definieren durch

$$\mathcal{FL}u(\zeta) := \tilde{\tilde{u}}(e_{-\zeta}), \quad \zeta \in \mathbb{C}^n.$$

Beachte: Für jede Funktion $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$, welche auf einer Umgebung des Trägers von u identisch 1 ist, gilt definitionsgemäß genauer:

$$\mathcal{FL}u(\zeta) := u(\chi\, e_{-\zeta}|_\Omega), \quad \zeta \in \mathbb{C}^n.$$

$\mathcal{FL}u$ wird als die **Fourier-Laplace-Transformierte** von u bezeichnet. Wir werden diese im nächsten Kapitel genauer untersuchen.

(d) Für $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ und $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ kann man die Faltung $u * \psi$ wie üblich sowohl durch

$$\langle u * \psi, \varphi \rangle := \langle u, \varphi * \check{\psi} \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

als auch punktweise durch

$$u \circledast \psi(x) := \langle u, \lambda_x \check{\psi} \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

definieren. Wieder überzeugt man sich leicht, daß beide Definitionen dieselbe Distribution liefern. Analog wird $\psi * u$ definiert, und es ist dann $\psi * u = u * \psi$.

6.2 Distributionen mit einpunktigem Träger

Wir untersuchen nun noch die Frage, wie die in einem Punkt getragenen Distributionen aussehen.

Theorem 6.2 *Sei $y \in \mathbb{R}^n$, und sei $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} u = \{y\}$. Sei ferner N die Ordnung von u. Dann existieren für $|\alpha| \le N$ Konstanten $a_\alpha \in \mathbb{C}$ so, daß*

$$u = \sum_{|\alpha| \le N} a_\alpha D^\alpha \delta_y. \tag{6.4}$$

Beweis. Wir dürfen o.B.d.A. $y = 0$ annehmen, indem wir die durch $\langle \lambda_{-y} u, \varphi \rangle := \langle u, \lambda_y \varphi \rangle$, $\varphi \in \mathcal{D} := \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, definierte verschobene Distribution $\lambda_y u$ betrachten, deren Träger durch $\{0\}$ gegeben ist.
Wähle $\chi \in \mathcal{D}$ mit $\chi(x) = 1$ für $|x| \le 1/2$, $\chi(x) = 0$ für $|x| \ge 1$, und setze $\chi_{(\varepsilon)}(x) := \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $0 < \varepsilon < 1$. Dann ist $\operatorname{supp} \chi_{(\varepsilon)} \subset \overline{B}_\varepsilon(0)$. Ferner ist nach Satz 6.1

$$u = \chi_{(\varepsilon)} u \quad \text{für alle } \varepsilon > 0,$$

und wählt man z.B. $K := \overline{B}_1(0)$ in (6.1), so gilt

$$|u(\varphi)| \le C \max_{|\alpha| \le N} \|D^\alpha(\chi_{(\varepsilon)} \varphi)\|_\infty \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n). \tag{6.5}$$

Hierbei betrachten wir u bereits als Linearform auf $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.
Ferner ist

$$D^\alpha(\chi_{(\varepsilon)} \varphi)(x) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \varepsilon^{-|\beta|} (D^\beta \chi)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) D^{\alpha-\beta} \varphi(x),$$

also

$$\|D^\alpha(\chi_{(\varepsilon)} \varphi)\|_\infty \le C_1 \sum_{\beta \le \alpha} \varepsilon^{-|\beta|} \sup_{|x| \le \varepsilon} |D^{\alpha-\beta} \varphi(x)|. \tag{6.6}$$

Wir nehmen zunächst an, daß $D^\gamma\varphi(0) = 0$ ist für alle $\gamma \in \mathbb{N}^n$ mit $|\gamma| \leq N$, d.h., daß φ in 0 von der Ordnung $N+1$ verschwindet. Dann zeigt die Taylorentwicklung von φ um 0, daß $\varphi(x) = \mathcal{O}(|x|^{N+1})$ ist. Entsprechend folgt

$$D^\varrho\varphi(x) = \mathcal{O}(|x|^{N+1-|\varrho|}), \quad \text{für } |\varrho| \leq N.$$

Somit ist dann für $|\alpha - \beta| \leq N$

$$\sup_{|x|\leq\varepsilon} |D^{\alpha-\beta}\varphi(x)| \leq C_{\alpha-\beta}\, \varepsilon^{N+1-|\alpha-\beta|} = C_{\alpha-\beta}\varepsilon^{N+1-|\alpha|+|\beta|},$$

also, mit (6.6),

$$\begin{aligned} \|D^\alpha(\chi_{(\varepsilon)}\varphi)\|_\infty &\leq C_2 \sum_{\beta\leq\alpha} \varepsilon^{-|\beta|}\varepsilon^{N+1-|\alpha|+|\beta|} \\ &\leq C_3\varepsilon^{N+1-|\alpha|}, \end{aligned}$$

falls $|\alpha| \leq N$. Aus (6.5) folgt dann offenbar, indem man ε gegen 0 streben läßt:

Verschwindet φ in 0 von der Ordnung $N+1$, so ist $u(\varphi) = 0$.

Ist nun $\varphi \in \mathcal{E}$ beliebig, so schreiben wir mittels der Taylorschen Formel

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha|\leq N} \frac{\varphi^{(\alpha)}(0)}{\alpha!}x^\alpha + r(x),$$

wobei $r \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ in 0 von der Ordnung $N+1$ verschwindet. Nach dem bereits Gezeigten ist somit $u(r) = 0$. Setzen wir $\varphi_\alpha(x) := \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!}x^\alpha$, so ist $\varphi_\alpha \in \mathcal{E}$, und es folgt

$$\begin{aligned} u(\varphi) &= u\left(\sum_{|\alpha|\leq N} (-1)^{|\alpha|}D^\alpha\varphi(0)\,\varphi_\alpha\right) \\ &= \sum_{|\alpha|\leq N} u(\varphi_\alpha)(-1)^{|\alpha|}D^\alpha\varphi(0), \end{aligned}$$

d.h. $u = \sum\limits_{|\alpha|\leq N} a_\alpha D^\alpha\delta_0$, mit $a_\alpha := u(\varphi_\alpha) \in \mathbb{C}$.

Q.E.D.

Bemerkung 6.3 Mit Beispiel 5.5 (ii) folgt insbesondere, daß $D^\alpha\delta_y$ die Ordnung $|\alpha|$ besitzt. Damit wiederum muß offenbar wenigstens ein a_α mit $|\alpha| = N$ in (6.4) verschieden von Null sein, da sonst ja die Ordnung von u kleiner als N wäre.

6.3 Faltung mit einer Distribution mit kompaktem Träger

Unter geeigneten Voraussetzungen an Distributionen $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ist auch die Faltung $u * v \in \mathcal{D}'$ wohldefiniert. Wir zeigen noch, daß dies z.B. der Fall ist, wenn einer der Faktoren kompakten Träger hat.

Sei zunächst $u \in \mathcal{E}' \subset \mathcal{S}'$ eine Distribution mit kompaktem Träger, und betrachte den linearen Operator $C_u\varphi := u * \varphi,\ \varphi \in \mathcal{S}$, auf $\mathcal{S}$. Nach Theorem 4.18 ist zunächst für $\varphi \in \mathcal{S}$ stets $C_u\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, und es ist

$$D^\alpha(C_u\varphi)(x) = u * D^\alpha\varphi(x) = u(\lambda_x(D^\alpha\varphi)^\vee).$$

Ferner ist nach (6.1)

$$|u(\psi)| \leq C \max_{|\beta|\leq N} \sup_{y\in K} |D^\beta\psi(y)| \quad \text{für alle } \psi \in \mathcal{E},$$

falls N die Ordnung von u bezeichnet und K eine kompakte Umgebung des Trägers von u ist. Somit folgt mit $D^\alpha\varphi =: \psi_\alpha$:

$$|D^\alpha(C_u(\varphi)(x)| \leq C_1 \max_{|\beta|\leq N} \sup_{y\in K} |D^\beta\psi_\alpha(x-y)|. \tag{6.7}$$

Hieraus folgt rasch, daß für jedes $M \in \mathbb{N}$

$$\|C_u\varphi\|_{(M)} \leq C_M\|\varphi\|_{(M+N)}. \tag{6.8}$$

Insbesondere bildet C_u den Raum $\mathcal{S}$ stetig in sich ab. Definieren wir für $u \in \mathcal{D}'$ die Distribution $\check{u} \in \mathcal{D}'$ durch

$$\langle \check{u}, \varphi\rangle := \langle u, \check{\varphi}\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D},$$

so ist ferner für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned}\langle C_u\varphi, \psi\rangle &= \langle u * \varphi, \psi\rangle = \langle u, \psi * \check{\varphi}\rangle \\ &= \langle u, (\varphi * \check{\psi})^\vee\rangle = \langle \check{u}, \varphi * \check{\psi}\rangle \\ &= \langle \check{u} * \psi, \varphi\rangle = \langle \varphi, \check{u} * \psi\rangle,\end{aligned}$$

d.h. es ist ${}^tC_u = C_{\check{u}}$.

Definition. Sind $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ und $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, so definieren wir die Distribution $u * v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ durch

$$\langle u * v, \varphi\rangle := \langle v, \check{u} * \varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{6.9}$$

Analog definiert man $v * u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ durch

$$\langle v * u, \varphi\rangle := \langle v, \varphi * \check{u}\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{6.10}$$

Satz 6.4 *Seien $u, v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, und wenigstens eine dieser Distributionen besitze einen kompakten Träger. Dann gilt*

(a) $u * v = v * u$.

(b) $(u * v) * \varphi = u * (v * \varphi)$ *für alle* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(c) $\operatorname{supp} u * v \subset \operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v$.

(d) $D^\alpha(u * v) = (D^\alpha u) * v = u * (D^\alpha v)$ *für alle* $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

(e) $\langle u * v, \varphi\rangle = \langle u, \varphi * \check{v}\rangle$ *für alle* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Übung.

Analog kann man, indem man in (6.9) bzw. (6.10) φ aus $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ wählt, auch die Faltungen $u * v$ und $v * u$ einer Distribution $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ mit einer Distribution $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ definieren. Man sieht nämlich wieder mit den üblichen Argumenten, daß für jedes $\chi \in \mathcal{D}$ der Operator

$$\widetilde{C_u\chi} : \mathcal{S} \to \mathcal{S},\ \varphi \mapsto C_u(\chi\varphi) = u * (\chi\varphi)$$

stetig ist, und daß $\operatorname{supp}(C_u\chi)\varphi \subset \operatorname{supp} u + \operatorname{supp}\chi$ in einem von χ (und u) abhängigen Kompaktum liegt, so daß nach Lemma 5.8 der lineare Operator $C_u : \mathcal{D} \to \mathcal{D},\ \varphi \mapsto u * \varphi$, $\mathcal{D}$-Nullfolgen-stetig ist im Sinne von (c0). Ferner gilt

Satz 6.5 *Die Aussagen von Satz 6.4 bleiben gültig, wenn man $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ durch $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ersetzt und $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ durch $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.*

Korollar 6.6 *Sei $\delta = \delta_0$, und sei $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$u = \delta * u = u * \delta,$$

und allgemeiner ist

$$D^\alpha u = (D^\alpha\delta) * u = u * (D^\alpha\delta) \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{N}^n. \tag{6.11}$$

Beweis. Für $\varphi \in \mathcal{D}$ ist

$$\langle\check{\delta}, \varphi\rangle = \langle\delta, \check{\varphi}\rangle = \check{\varphi}(0) = \varphi(0) = \langle\delta, \varphi\rangle,$$

d.h. es ist $\check{\delta} = \delta$. Ferner ist

$$\delta * \varphi(x) = \langle\delta, \lambda_x\check{\varphi}\rangle = \check{\varphi}(0 - x) = \varphi(x),$$

d.h. es ist $\delta * \varphi = \varphi$. Es folgt

$$\langle \delta * u, \varphi\rangle = \langle u, \check{\delta} * \varphi\rangle = \langle u, \delta * \varphi\rangle = \langle u, \varphi\rangle,$$

also $\delta * u = u$.
Die restlichen Aussagen folgen aus Satz 6.5.

Q.E.D.

Nach (6.11) kann man also die Ableitung D^α durch die Faltung mit der Distribution $D^\alpha\delta$ darstellen!

6.4 Klassische Ableitung versus verallgemeinerte Ableitung

Der nachfolgende Satz, welcher eine Variante eines klassischen Lemmas von du Bois Raymond aus der Variationsrechnung darstellt, zeigt insbesondere, daß die verallgemeinerte Ableitung im Distributionensinne in der Tat den klassischen Ableitungsbegriff für Funktionen verallgemeinert.

Satz 6.7 *Seien $u, f \in C(\Omega)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$.*

(a) Ist $D_j u = f$ im klassischen Sinne, so gilt auch $D_j u = f$ im Distributionensinne.

(b) Gilt $D_j u = f$ im Distributionensinne, so ist u im klassischen Sinne partiell nach x_j differenzierbar, und es gilt auch $D_j u = f$ im klassischen Sinne.

Beweis. (a) Ist $D_j u = f$ im klassischen Sinne, so ist u stetig partiell nach x_j differenzierbar. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ folgt daher mittels partieller Integration

$$\begin{aligned} -\langle u, D_j\varphi\rangle &= -\int u(x) D_j\varphi(x)\,dx \\ &= \int D_j u(x)\varphi(x)\,dx = \langle f, \varphi\rangle. \end{aligned}$$

Es folgt $D_j u = f$ im Distributionensinn.

Um (b) zu zeigen nehmen wir an, daß $D_j u = f$ im Distributionensinne in $\mathcal{D}'(\Omega)$ gilt. Ist $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$, so gilt auch für χu die Produktregel

$$D_j(\chi u) = (D_j\chi)u + \chi(D_j u) \tag{6.12}$$

(Übung). Laut Voraussetzung ist die rechte Seite eine stetige Funktion, und χu hat kompakten Träger in Ω. Dies zeigt, daß es genügt, die Aussage für $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ zu beweisen. Ferner dürfen wir dann o.B.d.A. $\Omega = \mathbb{R}^n$ annehmen.

Es sei also $u \in C_0(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Wir wählen eine Dirac-Folge $\{\varphi_k\}_k$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, und setzen $u_k := u * \varphi_k$, $f_k := f * \varphi_k$. Dann gilt nach Satz 5.10 und (5.12)

$$D_j u_k = (D_j u) * \varphi_k = f * \varphi_k = f_k,$$

wobei u_k und f_k in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ liegen. Ferner konvergieren nach Theorem 2.13 (b) für $k \to \infty$ die Funktionen u_k gleichmäßig gegen u und die Funktionen $D_j u_k = f_k$ gleichmäßig gegen f. Hieraus folgert man mittels eines Standardarguments, daß u partiell nach x_j differenzierbar ist, und daß $D_j u = f$ im klassischen Sinne gilt.

Q.E.D.

6.5 Paley-Wiener-Sätze

Wir wollen in diesem Abschnitt Eigenschaften der Fourier-Laplace-Transformierten von Funktionen bzw. Distributionen mit kompaktem Träger untersuchen. Die Ergebnisse sind z.B. für die Anwendungen in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen von Bedeutung.

Definitionen. (a) Eine *stetige* Funktion f auf einer offenen Teilmenge U von $\mathbb{C}^n$ heiße **holomorph** in U, wenn sie in jeder Variablen separat holomorph ist, d.h. wenn für jedes $j = 1, \ldots, n$ und jedes $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in U$ die Funktion

$$f_j : w \mapsto f(\zeta_1, \ldots, \zeta_{j-1},\ w,\ \zeta_{j+1}, \ldots, \zeta_n)$$

holomorph ist in einer Umgebung von ζ_j in $\mathbb{C}$.
Eine in ganz $\mathbb{C}^n$ holomorphe Funktion heiße **ganze** Funktion.

(b) Ist $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$, und ist $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$, mit $\xi_j, \eta_j \in \mathbb{R}$, so setzen wir $\xi := (\xi_1, \ldots, \xi_n), \eta := (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$, und schreiben $\zeta = \xi + i\eta$. Die Vektoren

$$\xi =: \operatorname{Re}\zeta \quad \text{und} \quad \eta =: \operatorname{Im}\zeta$$

heißen der **Real-** und **Imaginärteil** von ζ. Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ als die Menge aller $\zeta \in \mathbb{C}^n$ mit $\operatorname{Im}\zeta = 0$. Ferner setzen wir

$$\begin{aligned} |\zeta| &:= (|\zeta_1|^2 + \cdots + |\zeta_n|^2)^{1/2}, \\ \zeta^\alpha &:= \zeta_1^{\alpha_1} \cdots \zeta_n^{\alpha_n}, \quad \alpha \in \mathbb{N}^n. \end{aligned}$$

Es sei daran erinnert, daß wir für $\zeta \in \mathbb{C}^n$ definiert hatten

$$e_\zeta(x) := e^{i\zeta \cdot x}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Satz 6.8 *Sei $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ eine Distribution mit kompaktem Träger. Dann ist ihre Fourier-Laplace-Transformierte*

$$\mathcal{FL}u(\zeta) := u(e_{-\zeta}), \quad \zeta \in \mathbb{C}^n,$$

eine ganze Funktion auf $\mathbb{C}^n$. Ferner ist $\mathcal{FL}u\,|_{\mathbb{R}^n} = \hat{u}$.

Beweis. Sei $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ eine Dirac-Familie in $\mathcal{D}$, und setze $u_\varepsilon := u * \varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}$. Für die Funktion u_ε ist die Fourier-Laplace-Transformierte gegeben durch das Integral

$$\mathcal{FL}u_\varepsilon(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^n} u_\varepsilon(x) e^{-i\zeta\cdot x} dx.$$

Da für jedes feste x der Integrand offenbar holomorph in ζ ist, sieht man mit Hilfe des Satzes von Morera, angewandt auf jede der Variablen $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, daß $\mathcal{FL}u_\varepsilon$ eine ganze Funktion ist. Auf der anderen Seite ist wegen $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

$$\mathcal{FL}u_\varepsilon(\zeta) = (u * \varphi_\varepsilon)(e_{-\zeta}) = u(e_{-\zeta} * \check{\varphi}_\varepsilon),$$

wobei

$$\begin{aligned} e_{-\zeta} * \check{\varphi}_\varepsilon(x) &= \check{\varphi}_\varepsilon * e_{-\zeta}(x) \\ &= \int \varphi_\varepsilon(-y) e^{-i\zeta\cdot(x-y)}\, dy = \int \varphi_\varepsilon(y) e^{-i\zeta\cdot y}\, dy\, e^{-i\zeta\cdot x} \\ &= \int \varphi(y) e^{-i\varepsilon\zeta\cdot y}\, dy\ e^{-i\zeta\cdot x} \end{aligned}$$

ist. Es folgt

$$\mathcal{FL}u_\varepsilon(\zeta) = \mathcal{FL}\varphi(\varepsilon\zeta)\, \mathcal{FL}u(\zeta). \tag{6.13}$$

Da $\mathcal{FL}\varphi$ stetig ist, gilt $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{FL}\varphi(\varepsilon\zeta) = \hat{\varphi}(0) = 1$, und zwar gleichmäßig auf jedem Kompaktum in $\mathbb{C}^n$. Nach (6.13) ist also für jedes z und genügend kleines $\varepsilon > 0$

$$\mathcal{FL}u(\zeta) = \frac{\mathcal{FL}u_\varepsilon(\zeta)}{\mathcal{FL}\varphi(\varepsilon\zeta)},$$

und somit ist $\mathcal{FL}u$ holomorph.

Für $\zeta = \xi \in \mathbb{R}^n$ ist ferner $\mathcal{FL}u_\varepsilon(\xi) = \widehat{u_\varepsilon}(\xi)$, also nach (6.13)

$$\widehat{u_\varepsilon}(\xi) = \hat{\varphi}(\varepsilon\xi)\, \mathcal{FL}u(\xi).$$

Für $\psi \in \mathcal{D}$ folgt damit

$$\langle \hat{u}_\varepsilon, \psi \rangle = \int \hat{\varphi}(\varepsilon\xi) \mathcal{FL}u(\xi) \psi(\xi)\, d\xi. \tag{6.14}$$

Ferner ist nach Satz 4.19

$$u = \lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon \quad \text{in } \mathcal{S}',$$

also auch

$$\hat{u} = \lim_{\varepsilon\to 0} \widehat{u_\varepsilon} \quad \text{in } \mathcal{S}'.$$

Im Grenzwert für $\varepsilon \to 0$ folgt zusammen mit (6.14)

$$\langle \hat{u}, \psi \rangle = \int \mathcal{F}\mathcal{L}u(\xi)\psi(\xi)\, d\xi = \langle \mathcal{F}\mathcal{L}u|_{\mathbb{R}^n}, \psi \rangle,$$

und somit ist in der Tat $\mathcal{F}\mathcal{L}u|_{\mathbb{R}^n} = \hat{u}$.

Q.E.D.

Beispiel 6.9 Es gilt $\mathcal{F}\mathcal{L}(D^\alpha \delta_y)(\zeta) = \zeta^\alpha e^{-i\zeta \cdot y}$.

Für $r \geq 0$ sei nun $\overline{B}_r := \overline{B}_r(0)$.

Theorem 6.10 *(a) Zu jedem $N \in \mathbb{N}$ gibt es eine Konstante $C_N \geq 0$ so, daß für alle $r \geq 0$ gilt:*

Ist $\varphi \in \mathcal{D}$ in der Kugel $\overline{B}_r$ getragen, so ist

$$|\mathcal{F}\mathcal{L}\varphi(\zeta)| \leq C_N r^n \|\varphi\|_N \,(1 + |\zeta|)^{-N} e^{r|\mathrm{Im}\,\zeta|}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^n. \tag{6.15}$$

(b) Ist umgekehrt f eine ganze Funktion auf $\mathbb{C}^n$, und gibt es zu jedem $N \in \mathbb{N}$ eine Konstante $C_N \geq 0$ so, daß

$$|f(\zeta)| \leq C_N(1 + |\zeta|)^{-N} e^{r|\mathrm{Im}\,\zeta|} \quad \text{für alle } \zeta \in \mathbb{C}^n, \tag{6.16}$$

so gibt es eine eindeutige Funktion $\varphi \in \mathcal{D}$ mit Träger in $\overline{B}_r$ so, daß $f = \mathcal{F}\mathcal{L}\varphi$.

Beweis. (a) Für $x \in \overline{B}_r$ ist

$$|e^{-i\zeta \cdot x}| = e^{\mathrm{Im}\,\zeta \cdot x} \leq e^{|\mathrm{Im}\,\zeta|\,|x|} \leq e^{r|\mathrm{Im}\,\zeta|}.$$

Sei $\varphi \in \mathcal{D}_{\overline{B}_r}$, und setze $f := \mathcal{F}\mathcal{L}\varphi$. Dann ist

$$f(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-i\zeta \cdot x} dx,$$

und durch partielle Integrationen erhalten wir

$$\zeta^\alpha f(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha \varphi)(x) e^{-i\zeta \cdot x}\, dx, \quad \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Es folgt für $|\alpha| \leq N$

$$\begin{aligned} |\zeta^\alpha f(\zeta)| &\leq \int_{\overline{B}_r} \|\varphi\|_N \, e^{r|\mathrm{Im}\,\zeta|}\, dx \\ &= C r^n \|\varphi\|_N e^{r|\mathrm{Im}\,\zeta|}, \end{aligned}$$

und somit auch

$$(1+|\zeta|)^N |f(\zeta)| \le C_N r^n \|\varphi\|_N \, e^{r|\mathrm{Im}\,\zeta|},$$

also (6.15).

(b) Die ganze Funktion f erfülle nun umgekehrt (6.16). Wir definieren dann φ durch

$$\varphi(x) := (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{ix\cdot\xi} \, d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann zeigt (6.16) zusammen mit Satz 2.18, daß $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist. Wir behaupten nun, daß für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ das Integral

$$F(\eta_1) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi_1 + i\eta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) e^{i(x_1(\xi+i\eta)+x_2\zeta_2+\cdots+x_n\zeta_n)} \, d\xi_1$$

unabhängig von $\eta_1 \in \mathbb{R}$ ist.

Wir betrachten dazu für $R > 0$ als Integrationsweg in der $(\xi_1 + i\eta_1)$-Ebene den geschlossenen Streckenzug Γ_R, welcher die Punkte $-R, R, R + i\eta_1, -R + i\eta_1$ und wieder $-R$ miteinander verbindet.

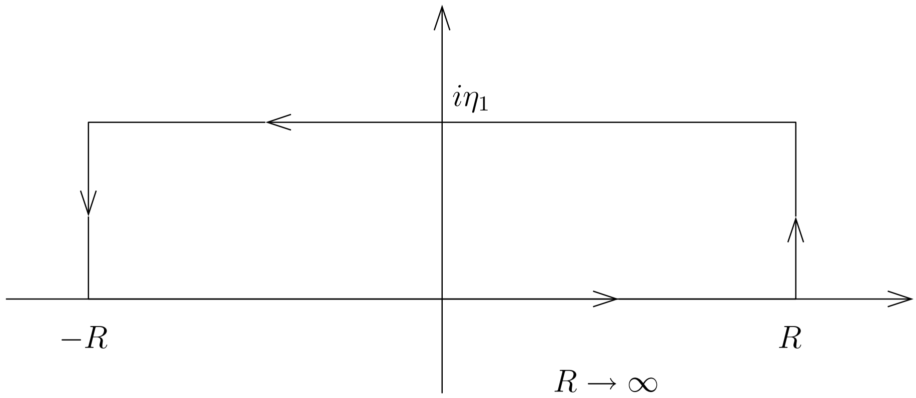

Abbildung 6.1: Integrationsweg

Setzen wir $h(\zeta_1) := f(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) e^{i(x_1\zeta_1+x_2\zeta_2+\cdots+x_n\zeta_n)}$, so ist nach dem Cauchyschen Integralsatz $\int_{\Gamma_R} h(\zeta_1) \, d\zeta_1 = 0$.

Ferner ist für feste $\eta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ und $x \in \mathbb{R}^n$ nach (6.16)

$$|h(\pm R + is)| \le C(1+R)^{-N}, \quad \text{falls } |s| \le |\eta_1|,$$

d.h. für $R \to \infty$ streben die Integrale entlang der vertikalen Kanten von Γ_R gegen 0. Es folgt im Grenzwert für $R \to \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi_1) \, d\xi_1 = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi_1 + i\eta_1) \, d\xi_1,$$

d.h. $F(0) = F(\eta_1)$, für jedes $\eta_1 \in \mathbb{R}$.
Verfahren wir analog mit den übrigen Koordinaten, so sehen wir, daß

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi + i\eta) e^{ix\cdot(\xi+i\eta)}\, d\xi$$

ist für jedes $\eta \in \mathbb{R}^n$.
Sei nun $x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0$, und wähle $\eta := \lambda \frac{x}{|x|}$, mit $\lambda > 0$. Dann ist $x\cdot\eta = \lambda|x|,\ |\eta| = \lambda$, und somit gilt nach (6.16)

$$|f(\xi + i\eta)e^{ix\cdot(\xi+i\eta)}| \leq C_N(1 + |\xi|)^{-N} e^{\lambda(r-|x|)}.$$

Für $N > n$ folgt damit für alle $\lambda > 0$

$$|\varphi(x)| \leq C\ e^{\lambda(r-|x|)}.$$

Lassen wir λ nach ∞ streben, so folgt $\varphi(x) = 0$, falls $|x| > r$, und somit ist $\operatorname{supp}\varphi \subset \overline{B}_r$, also $\varphi \in \mathcal{D}_{\overline{B}_r} \subset L^1$.

Schließlich ist aufgrund der Fourier-Umkehrformel $\hat{\varphi} = f|_{\mathbb{R}^n}$, d.h. $g := \mathcal{F}\mathcal{L}\varphi$ und f sind ganze Funktionen, welche auf $\mathbb{R}^n$ übereinstimmen.
Nach dem Identitätssatz ist dann $g(\zeta_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = f(\zeta_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ für alle $\zeta_1 \in \mathbb{C},\ \xi_2, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}$, und wiederholte Anwendung des Identitätssatzes auf die übrigen Koordinaten liefert $g = f$.

Q.E.D.

Theorem 6.11 *Eine ganze Funktion f auf $\mathbb{C}^n$ ist die Fourier-Laplace-Transformierte einer Distribution mit Träger in der Kugel $\overline{B}_r$ dann und nur dann, wenn es Konstanten $C \geq 0$ und $N \in \mathbb{N}$ gibt so, daß*

$$|f(\zeta)| \leq C(1 + |\zeta|)^N e^{r|\operatorname{Im}\zeta|} \quad \textit{für alle } \zeta \in \mathbb{C}^n. \tag{6.17}$$

Beweis. Wir beweisen zuerst die Notwendigkeit der Bedingung (6.17). Sei dazu $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} u \subset \overline{B}_r$, und sei N die Ordnung von u. Setze ferner $f(\zeta) := \mathcal{F}\mathcal{L}u(\zeta)$. Nach Satz 6.1 gibt es eine Konstante $A \geq 0$ so, daß

$$|u(\varphi)| \leq A \max_{|\alpha|\leq N} \sup_{|x|\leq r+1} |D^\alpha \varphi(x)|, \qquad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Sei nun $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ so, daß $h(t) = 1$, falls $t \leq 1/2$, und $h(t) = 0$ für $t \geq 1$.

Dann liegt für $\zeta \in \mathbb{C}^n,\ \zeta \neq 0$, die Funktion

$$\varphi_\zeta(x) := e^{-i\zeta\cdot x} h(|\zeta|(|x| - r)), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

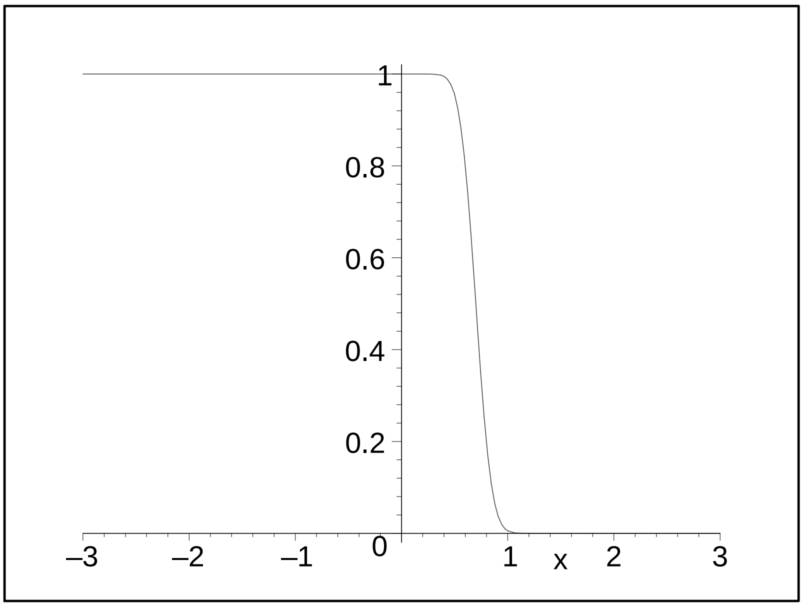

Abbildung 6.2: Graph von h

in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, und es gilt

$$\varphi_\zeta(x) = \begin{cases} e^{-i\zeta\cdot x}, & \text{falls } |x| < r + \frac{1}{2|\zeta|}, \\ 0, & \text{falls } |x| > r + \frac{1}{|\zeta|}. \end{cases} \tag{6.18}$$

Insbesondere stimmt φ_ζ auf einer Umgebung von $\overline{B}_r$ mit $e_{-\zeta}$ überein, und somit ist

$$f(\zeta) = u(e_{-\zeta}) = u(\varphi_\zeta).$$

Damit folgt

$$|f(\zeta)| \leq A \max_{|\alpha|\leq N} \sup_x |D^\alpha \varphi_\zeta(x)|.$$

Nun ist $x \mapsto q(x) := |x|$ eine glatte Funktion auf einer Umgebung der Menge $r + \frac{1}{2|\zeta|} \leq |x| \leq r + \frac{1}{|\zeta|}$, und es gilt

$$D_j \varphi_\zeta(x) = -\zeta_j \varphi_\zeta(x) + |\zeta| D_j q(x) e^{-i\zeta\cdot x} h'(|\zeta|(|x| - r)),$$

wobei der zweite Summand in der Menge $r + \frac{1}{2|\zeta|} \leq |x| \leq r + \frac{1}{|\zeta|}$ getragen ist, auf welcher $D_j q$ beschränkt ist. Es folgt leicht mittels (6.18), daß

$$|D_j \varphi_\zeta(x)| \leq C_\alpha (1 + |\zeta|) \sup_{|x'|\leq r + \frac{1}{|\zeta|}} |e^{-i\zeta\cdot x'}|.$$

Ganz ähnlich kann man auch mit den höheren Ableitungen von φ_ζ verfahren und erhält allgemeiner

$$|D^\alpha \varphi_\zeta(x)| \leq C_\alpha (1+|\zeta|)^{|\alpha|} \sup_{|x'|\leq r+\frac{1}{|\zeta|}} |e^{-i\zeta\cdot x'}|.$$

Für $|x'| \leq r + \frac{1}{|\zeta|}$ ist jedoch

$$|e^{-i\zeta\cdot x'}| = e^{(\operatorname{Im}\zeta)\cdot x'} \leq e^{|\operatorname{Im}\zeta|\,|x'|} \leq e^{r|\operatorname{Im}\zeta|+1},$$

so daß

$$\sup_x |D^\alpha \varphi_\zeta(x)| \leq C'_\alpha (1+|\zeta|)^{|\alpha|} e^{r|\operatorname{Im}\zeta|}.$$

Insgesamt folgt hiermit (6.17).

Sei nun umgekehrt f eine ganze Funktion auf $\mathbb{C}^n$, welche der Ungleichung (6.17) genügt.
Da $g := f|_{\mathbb{R}^n}$ polynomiales Wachstum hat, also eine temperierte Funktion ist, ist $u := (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}g \in \mathcal{S}'$, und es gilt nach Satz 4.14 $\hat{u} = g$.
Wir wählen eine Dirac-Familie $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ so, daß $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon \subset \overline{B}_\varepsilon$, und setzen

$$f_\varepsilon(\zeta) := f(\zeta)\,\mathcal{FL}\varphi_\varepsilon(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{C}^n.$$

f_ε genügt nach Theorem 6.10 (a) und (6.17) der Abschätzung (6.16), mit $r+\varepsilon$ anstelle von r. Somit gibt es nach Theorem 6.10 (b) eindeutige Funktionen $u_\varepsilon \in \mathcal{D}$ mit Träger in $\overline{B}_{r+\varepsilon}$ so, daß $f_\varepsilon = \mathcal{FL}u_\varepsilon$.
Sei $\psi \in \mathcal{D}$ so, daß $\operatorname{supp}\psi \cap \overline{B}_r = \emptyset$. Wir setzen $\phi := \mathcal{F}^{-1}\psi \in \mathcal{S}$. Dann ist $\psi = \hat{\phi}$, und für genügend kleine $\varepsilon > 0$ gilt offenbar $\psi u_\varepsilon = 0$. Ferner ist offenbar $\phi g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, und für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ gilt $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \widehat{\varphi_\varepsilon}(\xi) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \hat{\varphi}(\varepsilon\xi) = 1$, wobei $\|\widehat{\varphi_\varepsilon}\|_\infty \leq \|\hat{\varphi}\|_\infty$. Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz erhalten wir daher

$$\begin{aligned}
\langle u, \psi\rangle &= \langle u, \hat{\phi}\rangle = \langle \hat{u}, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\phi(\xi)\,d\xi \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(\xi)\phi(\xi)\,d\xi = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}_\varepsilon(\xi)\phi(\xi)\,d\xi \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} u_\varepsilon(\xi)\hat{\phi}(\xi)\,d\xi = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} u_\varepsilon(\xi)\psi(\xi)\,d\xi = 0.
\end{aligned}$$

Somit folgt $\operatorname{supp} u \subset \overline{B}_r$.

Schließlich sind damit $\mathcal{FL}u$ und f ganze Funktionen, welche auf dem $\mathbb{R}^n$ übereinstimmen. Mit dem Identitätssatz folgt $\mathcal{FL}u = f$.

Q.E.D.

In den folgenden Kapiteln wollen wir exemplarisch einige interessante Anwendungen der Fourieranalysis und Distributionentheorie in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen besprechen.
Interessierte Leser, welche mehr über Distributionen erfahren möchten, seien z.B. auf die Standardwerke [15],[14] und [4],[5], sowie die neueren Bücher [2] und [17], verwiesen.

Kapitel 7

Fundamentallösungen

7.1 Lösungen linearer partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten mittels Fundamentallösungen

Sei $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha D^\alpha$ ein linearer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten $a_\alpha \in \mathbb{C}$.

Definition. Eine Distribution $K \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ heiße **Fundamentallösung** von $P(D)$, falls

$$P(D)K = \delta.$$

Theorem 7.1 *Ist $K \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ eine Fundamentallösung von $P(D)$, und ist $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (bzw. $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, falls $K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$), so löst $u := K * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ die Differentialgleichung*

$$P(D)u = \varphi \tag{7.1}$$

im klassischen Sinne.

Beweis. Wir beweisen den Fall $K \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$; für $K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ verläuft der Beweis analog. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist aber nach Satz 5.10

$$\begin{aligned} P(D)u &= P(D)(K * \varphi) = (P(D)K) * \varphi \\ &= \delta * \varphi = \varphi, \end{aligned}$$

wobei $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Q.E.D.

Bemerkungen 7.2 (a) Falls die Distribution $K * v$ wohldefiniert ist, so löst $u := K * v$ auch für allgemeinere Distributionen v die Differentialgleichung $P(D)u = v$

(im Distributionensinne). Z.B. gilt dies nach Satz 6.5 für $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, d.h. wenn v kompakten Träger hat.

(b) Die Differentialgleichung $P(D)u = \varphi$ besitzt i.a. unendlich viele Lösungen u.

Beispiel 7.3 $P(D) = \frac{d}{dx} - a$ auf $\mathbb{R}$, mit $a \in \mathbb{C}$. Für $a = 0$ ist offenbar die Heaviside-Funktion $H := \mathbf{1}_{[0,\infty[}$ eine Fundamentallösung (vergl. Beispiel 4.13 (i)), und somit auch $c + H$, für jede Konstante $c \in \mathbb{C}$. Ist umgekehrt K eine beliebige Fundamentallösung zu $\frac{d}{dx}$, so erfüllt $u := K - H$ die Gleichung

$$\frac{du}{dx} = \frac{dK}{dx} - \frac{dH}{dx} = \delta - \delta = 0,$$

und somit ist u eine konstante Funktion (vergl. Aufg. 9.1).
Für allgemeines $a \in \mathbb{C}$ setze $\gamma_a(x) := e^{ax},\ x \in \mathbb{R}$. Nach der Produktregel gilt dann für $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\left(\frac{d}{dx} - a\right)(\gamma_a u) = \gamma_a' u + \gamma_a u' - a\gamma_a u = \gamma_a \frac{du}{dx}.$$

Da ferner $\gamma_a \delta_0 = \delta_0$ ist, sehen wir, daß

$$H_a(x) := (\gamma_a H)(x) = e^{ax} H(x)$$

eine Fundamentallösung zu $\frac{d}{dx} - a$ ist.
Man überlege sich, wie eine allgemeine Fundamentallösung hierzu aussieht! Beachte auch, daß H_a in $\mathcal{S}'$ liegt genau dann, wenn $\operatorname{Re} a \leq 0$. Gibt es dennoch stets eine temperierte Fundamentallösung? (Übung)

Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ist also

$$\begin{aligned} u(x) := H_a * \varphi(x) &= \langle H_a, \lambda_x \check{\varphi} \rangle = \int_0^\infty e^{ay} \varphi(x-y) dy \\ &= \int_{-\infty}^x e^{ax} e^{-ay} \varphi(y) dy \end{aligned}$$

eine Lösung von $\frac{du}{dx} - u = \varphi$. Dies prüft man natürlich auch leicht direkt nach. Man vergleiche diese Formel mit Duhamels Formel aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Wir wollen im folgenden exemplarisch noch Fundamentallösungen für zwei bedeutende partielle Differentialoperatoren, nämlich den Wärmeleitungsoperator und den Laplaceoperator, explizit bestimmen.

7.2 Die Wärmeleitungsgleichung im $\mathbb{R}^n$

Der **Wärmeleitungsoperator**

$$\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial {x_j}^2} = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x$$

auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, mit Koordinaten (t, x), $x = (x_1, \ldots, x_n)$, besitzt die folgende physikalische Interpretation:
Die Temperatur $u(t, x)$ am Ort $x \in \mathbb{R}^n$ zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ in einem „homogenen isotropen Medium mit thermischem Leitkoeffizienten = 1, ohne äußere Wärmezufuhr“ genügt der Wärmeleitungsgleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x \right) u = 0.$$

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_x u &= 0 \ \text{ auf } \mathbb{R}^{n+1}_+, \\ u(0, x) &= f(x), \end{aligned} \tag{7.2}$$

wobei $\mathbb{R}^{n+1}_+$ den oberen Halbraum $\mathbb{R}^{n+1}_+ := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ bezeichne. Dieses Problem ist physikalisch sinnvoll:
Gegeben die Wärmeverteilung f zum Zeitpunkt $t = 0$, finde die Wärmeverteilung zu einem späteren Zeitpunkt $t > 0$.
Sei zunächst $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Wir lösen (7.2) mittels partieller Fouriertransformation in x, wobei wir zunächst formal argumentieren. Dazu setzen wir

$$u(t, \hat{\xi}) := \int_{\mathbb{R}^n} u(t, x) e^{-i\xi \cdot x} dx.$$

(7.2) geht dann über in

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(t, \hat{\xi}) + |\xi|^2 u(t, \hat{\xi}) &= 0, \quad t > 0, \\ u(0, \hat{\xi}) &= \hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Löst man diese Anfangswertprobleme für festes $\xi \in \mathbb{R}^n$ in t, so ergibt sich sofort

$$u(t, \hat{\xi}) = \hat{f}(\xi) e^{-t|\xi|^2}, \quad t > 0.$$

.

Mit Hilfe von Lemma 2.24 und Satz 2.1 sieht man jedoch rasch, daß

$$e^{-t|\xi|^2} = \widehat{W_t}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{7.3}$$

ist, mit

$$W_t(x) := (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0.$$

Man bezeichnet W_t als den **Wärmeleitungskern** (oder auch Gauß- Weierstraß-Kern). Durch Fourierrücktransformation in ξ erhalten wir schließlich

$$u(t, x) = f * W_t(x), \quad t > 0. \tag{7.4}$$

Man kann nun umgekehrt rasch zeigen, daß z.B. für $f \in \mathcal{S}$ die durch (7.4) definierte Funktion u der Wärmeleitungsgleichung genügt. Da $W_t \in \mathcal{S}$ ist für $t > 0$, ist dann nämlich $u(t, \cdot) \in \mathcal{S}$ für alle $t > 0$, so daß alle formalen Rechnungen, die wir durchgeführt haben, nachträglich gerechtfertigt sind. Ferner erfüllt dieses u die Anfangswertbedingung in folgendem Sinne:

$$\lim_{t \searrow 0} \|f - u(t, \cdot)\|_\infty = 0, \quad f \in \mathcal{S}, \tag{7.5}$$

d.h. für $t \to 0$ konvergieren die Funktionen $u(t, \cdot)$ gleichmäßig gegen den Anfangswert f. Dazu beobachten wir, daß W_t positiv ist, daß $\|W_t\|_1 = \int W_t(x)\, dx = \widehat{W_t}(0) = 1$ und daß

$$W_t(x) = t^{-n/2} W_1(t^{-1/2} x), \quad t > 0. \tag{7.6}$$

Somit ist $\{W_t\}_{t>0}$ eine Dirac-Familie in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, so daß (7.5) aus Theorem 2.13 folgt.

Bemerkung 7.4 Aus $\widehat{W_s}\widehat{W_t} = \widehat{W_{s+t}}$ folgt

$$W_s * W_t = W_{s+t}, \quad s, t > 0. \tag{7.7}$$

Ferner gilt

$$\|f * W_t\|_p \leq \|f\|_p \|W_t\|_1 = \|f\|_p$$

für $1 \leq p \leq \infty$. Damit bilden die Operatoren $\{T_t\}_{t>0}$ mit $T_t f := f * W_t$ eine sogenannte „Kontraktionshalbgruppe“ auf $L^p(\mathbb{R}^n)$, für $1 \leq p \leq \infty$, die sogenannte **Wärmeleitungshalbgruppe**.

Wir wollen nun eine Fundamentallösung zum Wärmeleitungsoperator konstruieren. Dazu setzen wir für $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$W(t, x) := \begin{cases} W_t(x), & \text{falls } t > 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $W \geq 0$, und für $N > 0$ ist

$$\int_{|t|\leq N} \int_{|x|\leq N} |W(t,x)| dx\, dt \leq \int_0^N \int_{\mathbb{R}^n} W_t(x) dx\, dt = N,$$

so daß W eine temperierte Funktion auf $\mathbb{R}^{n+1}$ ist. Da $W(t,x)$ auf der Hyperebene $\{t = 0\}$ außerhalb des Ursprungs $(0,0)$ von unendlicher Ordnung verschwindet, gilt ferner

$$W|_{\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}). \tag{7.8}$$

Theorem 7.5 *W ist eine Fundamentallösung von $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x$ auf $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Beweis. Wir setzen für $\varepsilon > 0$

$$W^\varepsilon(t,x) := \begin{cases} W(t,x), & \text{falls } t > \varepsilon \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach dem Satz über majorisierte Konvergenz ist dann

$$W = \lim_{\varepsilon\to 0} W^\varepsilon \quad \text{in } \mathcal{D}'.$$

Daher genügt es zu zeigen, daß

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right) W^\varepsilon = \delta_0 \quad \text{in } \mathcal{D}'.$$

Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$. Partielle Integrationen liefern

$$\begin{aligned} \langle \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right) W^\varepsilon, \varphi\rangle &= \langle W^\varepsilon, -\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_x\right) \varphi\rangle \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} \int_\varepsilon^\infty W(t,x) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_x\right) \varphi(t,x) dt\ dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} W(\varepsilon,x)\varphi(\varepsilon,x) dx \\ &\quad + \int_\varepsilon^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right) W(t,x)\varphi(t,x) dx\, dt. \end{aligned}$$

Nun genügt für $t > 0$ aber $W(t,x)$ offenbar der Wärmeleitungsgleichung, d.h. $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta x\right) W(t,x) = 0$. Es folgt

$$\langle \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right) W^\varepsilon, \varphi\rangle = \int W_\varepsilon(x)\varphi(\varepsilon,x)\, dx,$$

und da φ gleichmäßig stetig ist und $\{W_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ eine approximierende Eins bildet folgert man leicht, daß $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0} \int W_\varepsilon(x)\varphi(\varepsilon,x)\, dx = \varphi(0,0)$. Damit erhalten wir

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \langle \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right) W^\varepsilon, \varphi\rangle = \langle \delta_{(0,0)}, \varphi\rangle.$$

Q.E.D.

7.3 Der Laplace-Operator Δ und Potenzen Δ^m

Sei

$$\Delta := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

der Laplace-Operator auf dem $\mathbb{R}^n$. Eine Distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ heiße **harmonisch**, falls

$$\Delta u = 0. \tag{7.9}$$

Z.B. ist jede „stationäre", d.h. zeitunabhängige Lösung der Wärmeleitungsgleichung, harmonisch als Funktion von x. Harmonische Funktionen treten aber auch in vielen anderen Zusammenhängen auf, z.B. als elektrische Potentiale, oder als Gravitationspotentiale in der Mechanik. Wir wollen eine Fundamentallösung für Δ berechnen. Hierzu gibt es verschiedene Methoden. Unser Zugang wird die vorangehenden Ergebnisse über Wärmeleitungskerne nutzen und es gleichzeitig gestatten, Fundamentallösungen von Potenzen Δ^m, $m \in \mathbb{N}^\times$, zu bestimmen. Dabei verwenden wir folgende Idee:
Ist $\Delta^m K = \delta$, so folgt für die Fouriertransformierte $(-|\xi|^2)^m \hat{K}(\xi) = 1$, d.h. formal ist durch $\hat{K}(\xi) := (-1)^m |\xi|^{-2m}$ eine Fundamentallösung K definiert, vorausgesetzt, $|\cdot|^{-2m}$ macht Sinn als temperierte Distribution. Offenbar ist dies der Fall genau dann, wenn $2m < n$ ist, also z.B. für $m = 1$, falls $n \geq 3$. Es liegt daher nahe, zunächst allgemeine Potenzen $|\xi|^{-\alpha}$ zu betrachten. Beachte, daß $|\cdot|^{-\alpha}$ eine temperierte Funktion auf dem $\mathbb{R}^n$ ist, falls $\operatorname{Re}\alpha < n$. Wir definieren daher für $\operatorname{Re}\alpha < n$ die temperierte Distribution $R_\alpha \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ durch

$$\widehat{R_\alpha}(\xi) := |\xi|^{-\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re}\alpha < n.$$

Um nun R_α zu berechnen, betrachten wir für $\operatorname{Re}\alpha > 0$ das Integral

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-t|\xi|^2} t^{\alpha/2-1} dt &= |\xi|^{-\alpha} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha/2-1} dt \\ &= |\xi|^{-\alpha} \Gamma(\alpha/2). \end{aligned}$$

Hierin ist Γ die **Gamma-Funktion**, welche für $\operatorname{Re} z > 0$ gegeben ist durch

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Diese genügt bekanntlich der Funktionalgleichung

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \operatorname{Re} z > 0, \tag{7.10}$$

d.h. es ist $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$. Durch Iteration folgt

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+m)}{z(z+1)\cdots(z+m-1)}, \quad \operatorname{Re} z > 0, \tag{7.11}$$

für jedes $m \in \mathbb{N}^\times$. Die rechte Seite von (7.11) besitzt offenbar eine meromorphe Fortsetzung auf die Halbebene $\{\mathrm{Re}\, z > -m\}$. Da $m \in \mathbb{N}$ beliebig ist, zeigt dies, daß Γ eine meromorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$ besitzt, mit Polen 1. Ordnung in den Punkten $z = -m$, $m \in \mathbb{N}$. Damit ist Γ auf ganz $\mathbb{C}$ als meromorphe Funktion definiert. Es gilt ferner (Übung)

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi / \sin \pi z, \tag{7.12}$$

so daß folglich Γ keine Nullstelle in $\mathbb{C}$ besitzt, und somit $1/\Gamma$ eine ganze holomorphe Funktion ist.
Für $\xi \neq 0$ gilt, wie wir gesehen haben, folgende Identität:

$$|\xi|^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\infty e^{-t|\xi|^2} t^{\alpha/2-1} dt, \quad \mathrm{Re}\, \alpha > 0, \tag{7.13}$$

Lemma 7.6 *Für* $0 < \mathrm{Re}\, \alpha < n$ *gilt*

$$R_\alpha(x) = \pi^{-n/2} 2^{-\alpha} \frac{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} |x|^{\alpha-n}. \tag{7.14}$$

Beweis. Sei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für $0 < \mathrm{Re}\, \alpha < n$

$$\langle R_\alpha, \varphi \rangle = \langle \hat{R}_\alpha, (2\pi)^{-n} \overline{\mathcal{F}} \varphi \rangle,$$

folglich, da das Integral in (7.13) absolut konvergent ist,

$$\begin{aligned} \langle R_\alpha, \varphi \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^n \Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty e^{-t|\xi|^2} t^{\alpha/2-1} dt \; \overline{\mathcal{F}} \varphi(\xi)\, d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n \Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} e^{-t|\xi|^2} \overline{\mathcal{F}} \varphi(\xi)\, d\xi\, t^{\alpha/2-1} dt. \end{aligned}$$

Nach (7.3) ist das innere Integral gegeben durch

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{W_t}(\xi) \overline{\mathcal{F}} \varphi(\xi) d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} W_t(x) \; \mathcal{F} \overline{\mathcal{F}} \varphi(x) dx \\ &= (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} W_t(x) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\langle R_\alpha, \varphi \rangle = \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} t^{\alpha/2-1} \varphi(x) dx\, dt. \tag{7.15}$$

Aber,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\frac{|x|^2}{4t}} t^{\frac{\alpha-n}{2}-1} dt &= \int_0^\infty e^{-t\frac{|x|^2}{4}} t^{\frac{n-\alpha}{2}-1} dt \\ &= \left(\frac{4}{|x|^2}\right)^{\frac{n-\alpha}{2}} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{n-\alpha}{2}-1} dt = 2^{n-\alpha}\Gamma(\tfrac{n-\alpha}{2})|x|^{\alpha-n},\end{aligned}$$

wobei das Integral absolut konvergent ist. Da auch $|\cdot|^{\alpha-n}$ lokal integrierbar ist, darf damit in (7.15) der Satz von Fubini angewendet werden, und es folgt

$$\langle R_\alpha, \varphi\rangle = \pi^{-n/2} 2^{-\alpha} \frac{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha-n}\varphi(x)\, dx.$$

Q.E.D.

Man bezeichnet die Funktionen R_α, $0 < \operatorname{Re}\alpha < n$, auch als **Riesz-Potentiale**. Diese hängen im folgenden Sinne analytisch vom Parameter α ab:

Definition. Sei $G \neq \emptyset$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$, und sei $\{u_\alpha\}_{\alpha\in G}$ eine Familie von Distributionen $u_\alpha \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (bzw. $u_\alpha \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$). Ist für jede Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ (bzw. $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) die Funktion $\alpha \mapsto \langle u_\alpha, \varphi\rangle$ holomorph auf G, so bezeichnet man die Familie $\{u_\alpha\}_{\alpha\in G}$ als eine **analytische Familie von Distributionen (bzw. temperierter Distribution)**.

Die Familie der Riesz-Potentiale $\{R_\alpha\}_{0<\operatorname{Re}\alpha<n,}$ ist eine analytische Familie temperierter Distributionen. Die Koeffizientenfunktion

$$\gamma_n(\alpha) := \pi^{-n/2} 2^{-\alpha} \frac{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

ist nämlich für $0 < \operatorname{Re}\alpha < n$ analytisch. Ferner gilt für $0 < a < \operatorname{Re}\alpha < b < n$

$$\big|\, |x|^{\alpha-n} \big| \le F_{a,b}(x),$$

wobei $F_{a,b}$ die temperierte Funktion

$$F_{a,b}(x) := \begin{cases} |x|^{a-n}, & \text{falls } |x| \le 1 \\ |x|^{b-n}, & \text{falls } |x| > 1, \end{cases}$$

bezeichne. Für jedes $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist damit die Funktion

$$f_\varphi : \alpha \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha-n}\varphi(x)\, dx$$

auf diesem Streifen in der komplexen Ebene wohldefiniert und stetig. Sie ist sogar holomorph, denn für jeden geschlossenen Integrationsweg σ in diesem Streifen gilt nach dem Satz von Fubini

$$\oint_\sigma \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha-n}\varphi(x)\,dx\,d\alpha = \int_{\mathbb{R}^n} \oint_\sigma e^{(\alpha-n)\log|x|}\varphi(x)\,d\alpha\,dx = 0,$$

da nach dem Cauchyschen Integralsatz für $x \neq 0$ das innere Integral stets verschwindet. Die Holomorphie von f_φ folgt daher nach dem Satz von Morera.

Wir wollen als nächstes diese Familie analytisch fortsetzen. Dazu beobachten wir zunächst, daß die Koeffizientenfunktion $\gamma_n(\alpha)$ meromorph auf $\mathbb{C}$ ist, mit Polen erster Ordnung in den Punkten der **„Ausnahmemenge“**

$$E := \{n + 2k : \ k \in \mathbb{N}\},$$

(beachte, daß $\Gamma(x) > 0$ für $x > 0$, so daß $1/\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \neq 0$ für $\alpha \in E$).

Lemma 7.7 *Die Familie der Riesz-Potentiale $\{R_\alpha\}_{0<\mathrm{Re}\,\alpha<n}$ läßt sich eindeutig zu einer analytischen Familie temperierter Distributionen $\{R_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{C}\setminus E}$ fortsetzen. Für $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$ ist dabei R_α gegeben durch die temperierte Funktion $R_\alpha(x) = \gamma_n(\alpha)|x|^{\alpha-n}$, und es ist $R_0 = \delta$.*
Dabei ist die Familie der Distributionen $\{|\cdot|^{\alpha-n}\}_\alpha$ analytisch auf der Halbebene $H := \{\alpha \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\alpha > 0\}$, also insbesondere auch in den Punkten aus E.

Beweis. Für $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$ definieren wir R_α durch $R_\alpha(x) = \gamma_n(\alpha)|x|^{\alpha-n}$. Unsere obigen Argumente für den Bereich $0 < \mathrm{Re}\,\alpha < n$ bleiben auch für $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$ gültig und zeigen, daß die Familie $\{|\cdot|^{\alpha-n}\}_\alpha$ analytisch auf H ist. Damit ist die Familie $\{R_\alpha\}$ analytisch auf $H \setminus E$ und besitzt Pole erster Ordnung in den Punkten aus E. Ferner gilt für jede Schwartzfunktion φ

$$\langle R_\alpha, \varphi\rangle = \langle |\cdot|^{-\alpha}, (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}\varphi\rangle, \quad 0 < \mathrm{Re}\,\alpha < n, \tag{7.16}$$

und nach dem bereits Gesagten ist die Familie der temperierten Distributionen $\{|\cdot|^{-\alpha}\}_{\mathrm{Re}\,\alpha<n}$ ebenfalls analytisch. Wir hatten bereits für $\mathrm{Re}\,\alpha < n$ die Distributionen R_α durch $\widehat{R_\alpha} = |\cdot|^{-\alpha}$, d.h. durch

$$\langle R_\alpha, \varphi\rangle := \langle |\cdot|^{-\alpha}, (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}\varphi\rangle, \quad \mathrm{Re}\,\alpha < n,$$

definiert. Damit ist offenbar eine analytische Fortsetzung der Familie der R_α auch auf den Bereich $\mathrm{Re}\,\alpha < n$ gegeben. Insgesamt haben wir damit $\{R_\alpha\}_\alpha$ auf ganz $\mathbb{C}\setminus E$ als analytische Familie temperierter Distributionen definiert.
Unsere Fortsetzung ist eindeutig, denn für jede weitere Fortsetzung $\{\tilde{R}_\alpha\}_\alpha$ gilt für jedes $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\langle R_\alpha, \varphi\rangle = \langle \tilde{R}_\alpha, \varphi\rangle$$

für $0 < \operatorname{Re}\alpha < n$, so daß nach dem Identitätssatz $\langle R_\alpha, \varphi\rangle = \langle \tilde{R}_\alpha, \varphi\rangle$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}\backslash E$ gilt.
Schließlich ist $\widehat{R_0} = |\cdot|^0 = 1$, also $R_0 = \delta$.

Q.E.D.

Damit können wir nun folgendes Theorem beweisen.

Theorem 7.8 *Sei $m \in \mathbb{N}^\times$, und setze*

$$K_m(x) := \begin{cases} (-1)^m \pi^{-n/2} 2^{-2m} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-m\right)}{\Gamma(m)} |x|^{2m-n}, & \text{falls } 2m-n \notin 2\mathbb{N}, \\ \frac{(-1)^{1-\frac{n}{2}} \pi^{-n/2} 2^{1-2m}}{\Gamma(m+1-\frac{n}{2})\Gamma(m)} |x|^{2m-n} \log|x|, & \text{falls } 2m-n \in 2\mathbb{N}. \end{cases}$$

Dann ist $K_m \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ eine Fundamentallösung von Δ^m, d.h. $\Delta^m K_m = \delta$.

(Beachte, daß für $2m - n = 2k \in 2\mathbb{N}$ die Funktion $x \mapsto |x|^{2m-n}$ ein Polynom vom Grade $2k < 2m$ ist, so daß $\Delta^m(|\cdot|^{2m-n}) \equiv 0$.)

Beweis. Offenbar ist stets K_m lokal integrierbar und temperiert, d.h. $K_m \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

(a) Wir beginnen mit dem Fall $2m - n \notin 2\mathbb{N}$, d.h. $2m \notin E$.
Dann ist nach Lemma 7.7 offenbar $K_m = (-1)^m R_{2m}$, und wegen Lemma 7.6 gilt für $0 < \operatorname{Re}\alpha < n$

$$(\Delta^m R_\alpha)^\wedge(\xi) = (-|\xi|^2)^m \hat{R}_\alpha(\xi) = (-1)^m |\xi|^{2m-\alpha},$$

d.h. es ist $(\Delta^m R_\alpha)^\wedge = (-1)^m |\cdot|^{-(\alpha-2m)}$, bzw.

$$\Delta^m R_\alpha = (-1)^m R_{\alpha-2m}. \tag{7.17}$$

Die linke Seite von (7.17) ist aber holomorph als Familie von Distributionen auf ganz $\mathbb{C} \setminus E$, und die rechte Seite ist offenbar wohldefiniert und holomorph auf $\mathbb{C} \setminus (2m + E) \subset \mathbb{C} \setminus E$. Nach dem Identitätssatz bleibt somit (7.17) gültig für alle $\alpha \in \mathbb{C} \setminus E$, also insbesondere für $\alpha = 2m$. Damit folgt

$$\Delta^m K_m = (-1)^m \Delta^m R_{2m} = R_0 = \delta.$$

(b) Es bleibt der Fall $2m - n \in 2\mathbb{N}$, d.h. $2m = n + 2k \in E$, mit $k \in \mathbb{N}$. Beachte, daß hier n gerade ist.
Dieser ist komplizierter, da hier die Funktion γ_n im Punkt $\alpha = 2m$ einen Pol erster Ordnung besitzt, den wir in einem ersten Schritt aufheben wollen. Definieren wir dazu β durch

$$\alpha =: 2m + \beta = n + 2k + \beta,$$

so ist nach (7.11) für kleines β

$$\gamma_n(\alpha) = \pi^{-n/2} 2^{-n-2k-\beta} \frac{\Gamma\left(-k-\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(m+\frac{\beta}{2}\right)} = \frac{\pi^{-n/2} 2^{-n-2k-\beta} \Gamma\left(1-\frac{\beta}{2}\right)}{-\frac{\beta}{2}\left(-\frac{\beta}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{\beta}{2}-k\right)\Gamma\left(m+\frac{\beta}{2}\right)},$$

d.h. die Funktion

$$\varrho(\alpha) := (\alpha - 2m)\gamma_n(\alpha) = \beta\gamma_n(\alpha)$$

ist holomorph in $\alpha = 2m$, und

$$\varrho(2m) = \frac{\pi^{-n/2} 2^{1-n-2k}}{(-1)^{k+1} k! \Gamma(m)} = \frac{\pi^{-n/2} 2^{1-2m} (-1)^{1+m-\frac{n}{2}}}{\Gamma(m+1-\frac{n}{2})\Gamma(m)} \tag{7.18}$$

(beachte, daß $m \geq 1$, und daß $\Gamma(k+1) = k!$).
Setzen wir nun

$$Q_\alpha(x) := (\alpha - 2m) R_\alpha(x) = \varrho(\alpha)|x|^{\alpha-n}, \quad \alpha \in (H \setminus E) \cup \{2m\},$$

so ist nach Lemma 7.7 die Familie $\{Q_\alpha\}_\alpha$ analytisch auf $(H \setminus E) \cup \{2m\}$, und nach (7.17) gilt

$$\Delta^m Q_\alpha = (-1)^m (\alpha - 2m) R_{\alpha-2m} \tag{7.19}$$

auf $(H \setminus E) \cup \{2m\}$, also insbesondere auf der Kreisscheibe $U := \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - 2m| < 1\}$.
Da die Funktion $\alpha \mapsto \langle R_{\alpha-2m}, \varphi\rangle$ analytisch auf U ist, dürfen wir (7.19) in $\alpha = 2m$ nach α differenzieren und erhalten

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\alpha}\Big|_{\alpha=2m} \langle \Delta^m Q_\alpha, \varphi\rangle \\ &\quad = (-1)^m \langle R_0, \varphi\rangle + (-1)^m\,(2m-2m) \frac{d}{d\alpha}\Big|_{\alpha=2m} \langle R_{\alpha-2m}, \varphi\rangle \\ &\quad = (-1)^m \langle \delta, \varphi\rangle. \end{aligned} \tag{7.20}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha}\Big|_{\alpha=2m} \langle \Delta^m Q_\alpha, \varphi\rangle &= \frac{d}{d\alpha}\Big|_{\alpha=2m} \left\{\rho(\alpha) \int |x|^{\alpha-n} \Delta^m \varphi(x)\, dx\right\} \\ &= \varrho'(2m) \int |x|^{2k} \Delta^m \varphi(x)\, dx \\ &\quad + \varrho(2m) \int |x|^{2m-n} \log|x|\, \Delta^m \varphi(x)\, dx. \end{aligned}$$

Da jedoch $2k < 2m$ ist, ist $\Delta^m(|\cdot|^{2k}) = 0$, und somit folgt mittels partieller Integration

$$\int |x|^{2k} \Delta^m \varphi(x)\, dx = \int \Delta^m(|\cdot|^{2k}) \varphi\, dx = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{S}.$$

Damit gilt

$$\frac{d}{d\alpha}\Big|_{\alpha=2m}\langle \Delta^m Q_\alpha, \varphi\rangle = (-1)^m \int K_m \Delta^m \varphi \, dx = (-1)^m \langle \Delta^m K_m, \varphi\rangle.$$

Zusammen mit (7.20) ergibt sich $\Delta^m K_m = \delta$.

Q.E.D.

Definiert man insbesondere für $m = 1$ den **Newton-Kern** $N = N_n$ auf dem $\mathbb{R}^n$ durch

$$N(x) := \begin{cases} -\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{4\pi^{n/2}}|x|^{2-n}, & \text{falls } n \neq 2 \\ \frac{1}{2\pi}\log|x|, & \text{falls } n = 2, \end{cases}$$

so ist N eine Fundamentallösung von Δ, d.h.

$$\Delta N = \delta. \tag{7.21}$$

Wegen

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-1/2} dt = 2\int_0^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\pi} \tag{7.22}$$

ist übrigens

$$-\frac{\Gamma(-1/2)}{4\pi^{1/2}} = \frac{2\Gamma(1/2)}{4\pi^{1/2}} = \frac{1}{2},$$

und somit ist für $n = 1$

$$N(x) = N_1(x) = \frac{1}{2}|x|.$$

Natürlich sieht man auch direkt, daß

$$\Delta N_1 = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{2}|x|\right) = \delta.$$

7.4 Distributionen als Ableitungen von Funktionen

Mittels Theorem 7.8 zeigen wir nun noch, daß sich jede Distribution lokal als Summe von Ableitungen stetiger Funktionen darstellen läßt (vergl. dazu auch [13, Theorem 6.26]). Damit ist $\mathcal{D}'(\Omega)$ in gewissem Sinne der kleinste Raum, der alle stetigen Funktionen auf Ω enthält, und in dem man (im verallgemeinerten Sinne) beliebig oft differenzieren kann.

Satz 7.9 *Sei $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Dann existieren eine stetige Funktion $f \in C(\mathbb{R}^n)$ und ein $m \in \mathbb{N}$ so, daß*

$$u = \Delta^m f.$$

Beweis. Sei N die Ordnung von u, und wähle $m \in \mathbb{N}$ so, daß $2m \geq N+n+1$. Wir nehmen zudem an, daß $2m-n$ ungerade ist - der andere Fall läßt sich mit minimalem Mehraufwand ähnlich behandeln. Sei $K = K_m \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ die Fundamentallösung zu Δ^m aus Theorem 7.8, d.h.

$$\Delta^m K = \delta.$$

K besitzt dann die Gestalt $K(x) = c|x|^{2m-n}$. Diese Funktion ist homogen vom Grade $2m-n$ (d.h. $K(rx) = r^{2m-n}K(x)$ für alle $r > 0$), glatt außerhalb des Ursprungs und stetig auf ganz $\mathbb{R}^n$, wobei $K(0) = 0$. Jede partielle Ableitung D_jK ist daher außerhalb des Ursprungs ebenfalls glatt, und homogen vom Grade $2m-n-1$. Hieraus folgert man leicht, daß es eine Konstante C_j gibt so, daß $|D_jK(x)| \leq C_j|x|^{2m-n-1}$ für alle $x \neq 0$. Ferner sieht man sofort, daß $D_jK(0) = 0$. Insgesamt erhalten wir damit, daß die Funktion D_jK stetig auf ganz $\mathbb{R}^n$ ist, im Ursprung verschwindet, glatt außerhalb des Ursprungs ist und homogen vom Grade $2m-n-1$ ist. Iterieren wir dieses Argument, so folgern wir per Induktion ganz analog, daß die Funktion K N-mal stetig differenzierbar ist, wobei für jedes $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \leq N$ stets $D^\alpha K(0) = 0$ gilt, $D^\alpha K$ außerhalb des Ursprungs glatt ist, und homogen vom Grade $2m-n-|\alpha|$ ist.

Im folgenden benutzen wir nur, daß $K \in C^N(\mathbb{R}^n)$.

Sei nun $f := u * K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Nach Satz 6.4 ist dann

$$\Delta^m f = u * (\Delta^m K) = u * \delta = u,$$

so daß nur noch zu zeigen bleibt, daß f eine stetige Funktion ist. Sei dazu $\{\varphi_j\}_j$ eine Dirac-Folge in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, und sei $f_j := f * \varphi_j = u * K_j$, mit

$$K_j := K * \varphi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Da auch f_j in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ liegt, genügt es zu zeigen, daß die Folge $\{f_j\}_j$ lokal gleichmäßig konvergent ist. Ist dann nämlich $\tilde{f}$ die stetige Grenzfunktion, so gilt natürlich auch $\tilde{f} = \lim_{j\to\infty} f_j$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Andererseits ist nach Satz 4.19 $f = \lim_{j\to\infty} f_j$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, so daß $\tilde{f} = f$.

Insgesamt haben wir damit das Problem darauf reduziert zu zeigen, daß die Folge $\{f_j\}$ auf jedem Kompaktum $A \subset \mathbb{R}^n$ eine gleichmäßige Cauchy-Folge bildet. Ist nun B eine kompakte Umgebung des Trägers von u, so gibt es nach (6.1) eine Konstante $C \geq 0$ so, daß

$$|u(\psi)| \leq C \max_{|\alpha|\leq N} \sup_{y\in B} |D^\alpha\psi(y)| \quad \text{für alle } \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann folgt also für $x \in A$ und $j, k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |f_j(x) - f_k(x)| &= |u(\lambda_x(\check{K}_j - \check{K}_k))| \\ &\leq C \max_{|\alpha|\leq N} \sup_{y\in B} |D^\alpha(K_j - K_k)(x-y)|, \end{aligned}$$

d.h. es ist

$$\sup_{x\in A}|f_j(x)-f_k(x)| \leq C \max_{|\alpha|\leq N} \sup_{z\in A-B} |D^\alpha(K_j-K_k)(z)|. \tag{7.23}$$

Für $|\alpha| \leq N$ ist jedoch

$$D^\alpha K_j = K * (D^\alpha \varphi_j) = (D^\alpha K) * \varphi_j,$$

denn K ist N-mal stetig differenzierbar, so daß die letzte Identität mittels partieller Integrationen im entsprechenden Faltungsintegral folgt. Ferner ist $D^\alpha K \in C(\mathbb{R}^n)$. Nach Theorem 2.13 (b) konvergiert daher die Folge $(D^\alpha K) * \varphi_j$ für $j \to \infty$ gleichmäßig auf dem Kompaktum $A-B$ gegen $D^\alpha K$, und somit bildet nach (7.23) die Folge $\{f_j|_A\}_j$ eine gleichmäßige Cauchy-Folge auf A.

Q.E.D.

Korollar 7.10 *Sei $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, und sei $K \subset \Omega$ ein Kompaktum. Dann existieren eine offene Umgebung V von K in Ω, ein $m = m(K) \in \mathbb{N}$ sowie eine stetige Funktion $f \in C(V)$ so, daß*

$$u|_V = \Delta^m f \text{ auf } V.$$

Beweis. Wende Satz 7.9 auf χu an, wobei $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ auf einer Umgebung von K identisch 1 sei.

Q.E.D.

7.5 Der Satz von Malgrange und Ehrenpreis

Um 1956 bewiesen B. Malgrange und L. Ehrenpreis unabhängig voneinander, daß jeder nicht-triviale lineare Differentialoperator

$$P(D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha \tag{7.24}$$

mit konstanten Koeffizienten $a_\alpha \in \mathbb{C}$ eine Fundamentallösung $K \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ besitzt. Ein naheliegender Gedanke, eine solche Fundamentallösung zu definieren, ist der folgende:
Aus $P(D)K = \delta$ folgt für die Fouriertransformierten $P(\xi)\hat{K}(\xi) = 1$ (vorausgesetzt, $K \in \mathcal{S}'$), so daß auf formaler Ebene K mittels der Fourierumkehrformel gegeben sein sollte durch

$$K(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{P(\xi)} e^{ix\cdot\xi}\, d\xi. \tag{7.25}$$

Leider verhindern jedoch die Nullstellen von $P(\xi)$ im allgemeinen, daß $1/P$ überhaupt lokal integrierbar ist, so daß gar nicht klar ist, wie man „$1/P$“ als Distribution definieren kann; dies hatten wir bereits für Potenzen des Laplace-Operators gesehen. Damit wird (7.25) i.a. keinen Sinn machen, selbst dann nicht, wenn man die inverse Fouriertransformation in (7.25) im Distributionensinne interpretiert, d.h. als

$$\langle K, \varphi \rangle = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{P(\xi)} \hat{\varphi}(-\xi)\, d\xi, \quad \varphi \in \mathcal{D}. \tag{7.26}$$

Die Idee, dieses Problem zu beheben, besteht nun darin, mit dem „reellen Integrationsweg" in (7.26) ins Komplexe auszuweichen und einen Weg zu wählen, welcher die Nullstellen von P vermeidet. Ich möchte hier eine vereinfachte Methode hierzu angeben, welche auf einer Idee von L. Nirenberg beruht.

Sei dazu m die Ordnung von $P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha$, d.h. es existiert ein $\beta \in \mathbb{N}^n$ mit $|\beta| = m$ und $a_\beta \neq 0$. Sei

$$P_m(\xi) := \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha\, \xi^\alpha$$

der sogenannte **Hauptteil** des Symbols $P(\xi)$. Da $P_m \neq 0$, gibt es einen Einheitsvektor $\eta \in \mathbb{R}^n$ mit $P_m(\eta) \neq 0$. Mittels einer Rotation des Koordinatensystems dürfen wir $\eta = (0, \ldots, 0, 1)$ annehmen. Wegen

$$P_m(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha\, \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \xi_n^{\alpha_n}$$

ist dann $P_m(\eta) = a_{(0,\ldots,0,m)}$, und, indem wir P durch $\frac{1}{a_{(0,\ldots,0,m)}} P$ ersetzen, dürfen wir o.B.d.A. $a_{(0,\ldots,0,m)} = 1$ voraussetzen. Damit läßt sich P dann schreiben als

$$P(\xi) = P(\xi', \xi_n) = \xi_n^m + \sum_{k=0}^{m-1} Q_k(\xi') \xi_n^k, \tag{7.27}$$

mit $\xi' := (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, und Polynomen $Q_k(\xi')$ der Ordnung $\leq m - k$. Für festes ξ' ist also P ein Polynom vom Grade m in der einen Variablen ξ_n, und wir bezeichnen mit

$$\lambda_1(\xi'), \ldots, \lambda_m(\xi') \in \mathbb{C}$$

seine komplexen Nullstellen, aufgelistet mit ihren Vielfachheiten, d.h. $P(\xi', \lambda_j(\xi')) = 0, \quad j = 1, \ldots, m$. Wir nehmen ferner an, daß diese stets lexikographisch geordnet seien. Dabei sei die **lexikographische Ordnung** auf $\mathbb{C}$ so definiert, daß $z < w$ ist, falls $\operatorname{Im} z < \operatorname{Im} w$ oder $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w$ und $\operatorname{Re} z < \operatorname{Re} w$.

Lemma 7.11 *Für jedes $j = 1, \ldots, m$ ist die Funktion $\xi' \to \operatorname{Im} \lambda_j(\xi')$ stetig auf $\mathbb{R}^{n-1}$.*

Beweis. Sei $\xi_0' \in \mathbb{R}^{n-1}$, und sei $\varepsilon > 0$. Wir setzen $B_j := B_\varepsilon(\lambda_j(\xi_0')),\ j = 1, \ldots, m$. Indem wir ε gegebenenfalls verkleinern, dürfen wir o.B.d.A. annehmen, daß die Kreisscheiben $\overline{B}_i$ und $\overline{B}_j$ disjunkt sind, falls $\lambda_i(\xi_0') \neq \lambda_j(\xi_0')$ ist. Sei nun $\lambda_j(\xi') = \alpha_j(\xi') + i\beta_j(\xi'),\ \alpha_j(\xi'),\ \beta_j(\xi') \in \mathbb{R}$. Da $\beta_j \leq \beta_{j+1}$ ist, können wir

$$1 = j_1 < j_2 < \cdots < j_\ell = m + 1$$

wählen so, daß $\beta_{j_1}(\xi_0') < \beta_{j_2}(\xi_0') < \cdots < \beta_{j_{\ell-1}}(\xi_0')$ und $\beta_j(\xi_0') = \beta_{j_s}(\xi_0')$ für $j = j_s, \ldots, j_{s+1} - 1$ ($s = 1, \ldots, \ell - 1$). Indem wir ε eventuell weiter verkleinern, dürfen wir voraussetzen, daß auch die Intervalle $[\beta_{j_s}(\xi_0') - \varepsilon,\ \beta_{j_s}(\xi_0') + \varepsilon],\ s = 1, \ldots, \ell - 1$, paarweise disjunkt sind.
Wir betrachten nun die holomorphe Funktion $f : z \mapsto P(\xi_0', z)$ auf $\mathbb{C}$. Offenbar ist $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \bigcup\limits_{j=1}^{m} \partial B_j$, und da P stetig auf $\mathbb{C}^n$ ist, gibt es somit ein $\delta > 0$ so, daß

$$|P(\xi', z) - f(z)| < |f(z)| \quad \text{für alle } z \in \bigcup_{j=1}^{m} \partial B_j,$$

falls $|\xi' - \xi_0'| < \delta$. Nach dem Satz von Rouché besitzt daher für jedes $\xi' \in B_\delta(\xi_0')$ die Funktion $z \mapsto P(\xi', z)$ in jeder Kreisscheibe B_j genauso viele Nullstellen (mit Vielfachheiten gezählt) wie $f(z) = P(\xi_0', z)$.
Aufgrund der Wahl von ε muß es dann aber $j_2 - j_1$ Nullstellen $\lambda_j(\xi')$ mit $\beta_j(\xi') \in [\beta_{j_1}(\xi_0') - \varepsilon,\ \beta_{j_1}(\xi_0') + \varepsilon]$ geben, $j_3 - j_2$ Nullstellen mit $\beta_j(\xi') \in [\beta_{j_2}(\xi_0') - \varepsilon,\ \beta_{j_2}(\xi_0') + \varepsilon]$ usw., d.h. für $j = j_s, \ldots, j_{s+1} - 1$ ist stets $\beta_j(\xi') \in [\beta_{j_s}(\xi_0') - \varepsilon,\ \beta_{j_s}(\xi_0') + \varepsilon]$. Insbesondere ist

$$|\beta_j(\xi') - \beta_j(\xi_0')| < \varepsilon, \text{ falls } j = j_s, \ldots, j_{s+1} - 1,$$

und somit $|\operatorname{Im} \lambda_j(\xi') - \operatorname{Im} \lambda_j(\xi_0')| < \varepsilon,\ j = 1, \ldots, m$, falls $|\xi' - \xi_0'| < \delta$, d.h. $\operatorname{Im} \lambda_j$ ist stetig im Punkt ξ_0', für jedes j.

Q.E.D.

Vorsicht: Die Funktionen λ_j selbst können unstetig sein (vergleiche die nachfolgende Skizze)!

Lemma 7.12 *Es gibt eine Borel-meßbare Funktion*

$$\phi : \mathbb{R}^{n-1} \to [-m, m]$$

so, daß für alle $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ gilt

$$\min_{j=1,\ldots,m} |\phi(\xi') - \operatorname{Im} \lambda_j(\xi')| \geq 1.$$

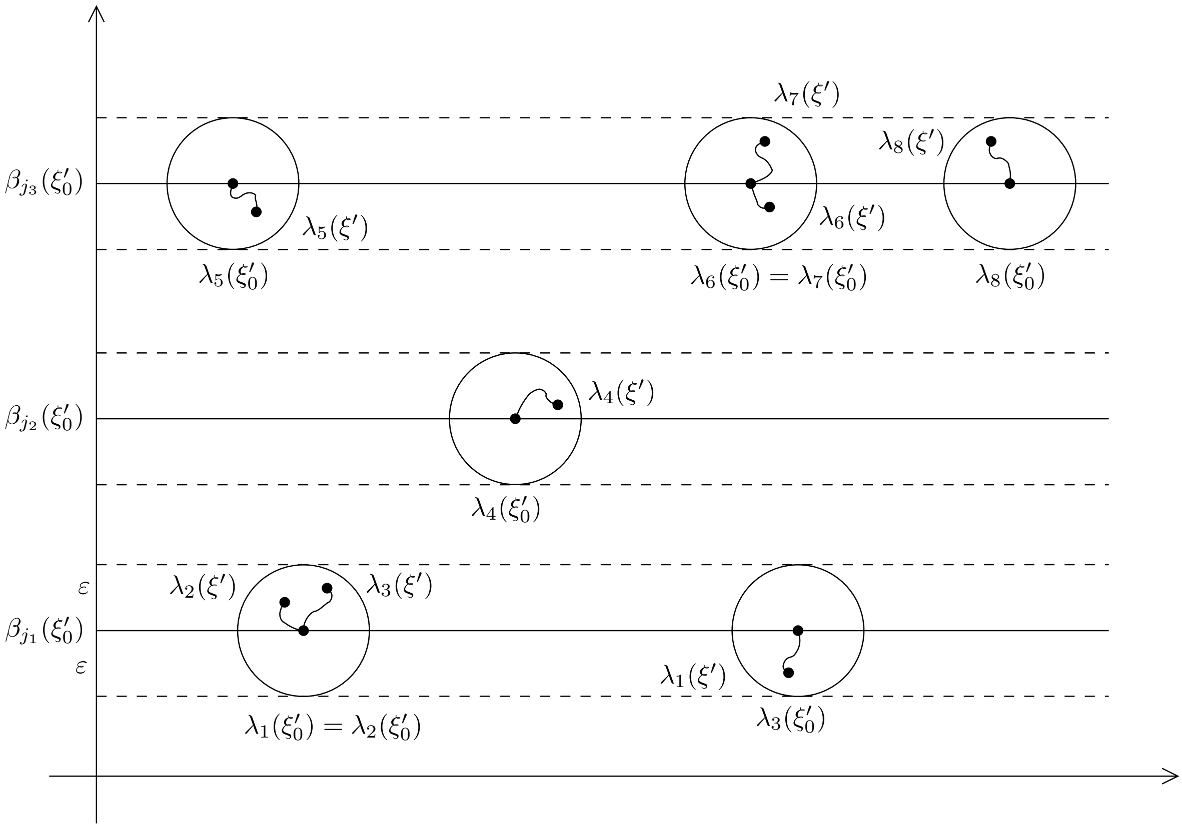

Abbildung 7.1: Wurzeln von $z \mapsto P(\xi', z)$

Beweis. Die zugrunde liegende Idee ist einfach: das Intervall $[-m-1, m+1]$ besitzt die Länge $2m+2$. Somit muß es zu jedem $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ ein offenes Teilintervall der Länge 2 geben, welches keinen der m Punkte $\operatorname{Im}\lambda_1(\xi'), \ldots, \operatorname{Im}\lambda_m(\xi')$ enthält, und wir können für $\phi(\xi')$ den Mittelpunkt dieses Intervalls wählen. Wir müssen nur zeigen, daß dies auf meßbare Art und Weise bzgl. ξ' gemacht werden kann. Dazu setzen wir

$$\begin{aligned} \mu_0(\xi') &:= -m-1,\ \mu_{m+1}(\xi') := m+1, \\ \mu_j(\xi') &:= \max\left(\{\min\left(\operatorname{Im}\lambda_j(\xi'), m+1\right)\}, -m-1\right), \quad j = 1, \ldots, m, \end{aligned}$$

d.h. es ist $\mu_j(\xi') = \operatorname{Im}\lambda_j(\xi')$, falls $\operatorname{Im}\lambda_j(\xi') \in [-m-1, m+1]$, $\mu_j(\xi') = m+1$, falls $\operatorname{Im}\lambda_j(\xi') > m+1$, und $\mu_j(\xi') = -m-1$, falls $\operatorname{Im}\lambda_j(\xi') < -m-1$. Die Funktionen μ_j sind nach Lemma 7.11 stetig, so daß die Mengen

$$V_j := \{\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} :\ \mu_{j+1}(\xi') - \mu_j(\xi') \geq 2\}, \quad j = 0, \ldots, m,$$

Borel-meßbar sind. Wegen

$$-m-1 = \mu_0(\xi') \leq \mu_1(\xi') \leq \cdots \leq \mu_{m+1}(\xi') = m+1$$

überdecken die V_j ganz $\mathbb{R}^{n-1}$ (vergl. die vorangehende Bemerkung!). Damit können wir disjunkte Borelmengen $W_j \subset V_j$ konstruieren, welche ebenfalls $\mathbb{R}^{n-1}$ überdecken. Dann besitzt offenbar die durch

$$\phi(\xi') := \frac{1}{2}(\mu_{j+1}(\xi') + \mu_j(\xi')), \quad \text{falls } \xi' \in W_j,$$

definierte Funktion die gewünschten Eigenschaften.

Q.E.D.

Theorem 7.13 (Malgrange-Ehrenpreis) *Jeder nicht-triviale lineare Differentialoperator $P(D)$ mit konstanten Koeffizienten besitzt eine Fundamentallösung.*

Beweis. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ bezeichne $\mathcal{FL}\varphi$ die Fourier-Laplace-Transformierte von φ, welche nach Satz 6.8 eine ganze holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}^n$ ist. Wir dürfen annehmen, daß $P(\xi)$ die Gestalt (7.27) besitzt, und wählen eine meßbare Funktion ϕ gemäß Lemma 7.12. Wir definieren dann eine Linearform K auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ durch

$$\langle K, \varphi \rangle := (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_{\operatorname{Im}\zeta_n = \phi(\xi')} \frac{\mathcal{FL}\varphi(-\xi', -\zeta_n)}{P(\xi', \zeta_n)}\, d\zeta_n\, d\xi', \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{7.28}$$

Das Integral (7.28) konvergiert absolut, denn nach (7.27) ist

$$P(\xi', \zeta_n) = (\zeta_n - \lambda_1(\xi')) \cdots (\zeta_n - \lambda_m(\xi')),$$

so daß nach Lemma 7.12

$$|P(\xi', \zeta_n)| \geq \prod_{j=1}^{m} |\operatorname{Im}\zeta_n - \operatorname{Im}\lambda_j(\xi')| \geq 1,$$

falls $\operatorname{Im}\zeta_n = \phi(\xi')$. Für $\varphi \in \mathcal{D}_{\overline{B}_r}$ ist ferner nach dem Paley-Wiener Theorem 6.10 für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$|\mathcal{FL}\varphi(-\xi', -\zeta_n)| \leq C_N r^n \|\varphi\|_N (1 + |(\xi', t)|)^{-N} e^{rm}, \tag{7.29}$$

falls $\zeta_n = t + is,\ t, s \in \mathbb{R}$ mit $|s| \leq m$. Somit folgt

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\mathcal{FL}\varphi(-\xi', -t - i\phi(\xi'))}{P(\xi', t + i\phi(\xi'))} \right| dt\, d\xi' \\
&\quad \leq C_N r^n e^{mr} \|\varphi\|_N \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}} (1 + |(\xi', t)|)^{-N} dt\, d\xi' \\
&\quad \leq C_N' e^{(m+1)r} \|\varphi\|_N,
\end{aligned}$$

falls $N \geq n+1$. Dies zeigt, daß durch (7.28) tatsächlich eine Distribution $K \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ definiert wird. Schließlich ist

$$\begin{aligned} \langle P(D)K, \varphi \rangle &= \langle K, P(-D)\varphi \rangle \\ &= (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_{\operatorname{Im}\zeta_n = \phi(\xi')} \mathcal{F}\mathcal{L}\varphi(-\xi', -\zeta_n)\, d\zeta_n\, d\xi', \end{aligned} \tag{7.30}$$

da

$$\mathcal{F}\mathcal{L}(P(-D)\varphi)(-\zeta) = P(\zeta)\mathcal{F}\mathcal{L}\varphi(-\zeta).$$

Die Ungleichung (7.29) zeigt aber, daß man mittels des Cauchyschen Integralsatzes die Integration über die Gerade $\{\operatorname{Im}\zeta_n = \phi(\xi')\}$ im inneren Integral von (7.30) durch die Integration über die reelle Achse $\{\operatorname{Im}\zeta_n = 0\}$ ersetzen darf. Damit folgt mit der Fourier-Umkehrformel

$$\begin{aligned} \langle P(D)K, \varphi \rangle &= (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(-\xi', -\xi_n)\, d\xi_n d\xi' \\ &= \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

d.h. $P(D)K = \delta$.

Q.E.D.

Bemerkungen 7.14 (a) S. Lojasiewicz [11] und L. Hörmander [7] haben gezeigt, daß man sogar stets eine temperierte Fundamentallösung $K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ zu $P(D)$ finden kann. Die Beweise in diesen Arbeiten benutzen allerdings tiefergehende Methoden.
(b) Es gibt lineare Differentialoperatoren (mit nicht-konstanten Koeffizienten), welche nicht lokal lösbar sind! Das historisch erste Beispiel dieser Art wurde von Hans Lewy 1957 beschrieben. Es handelt sich um das „komplexe Vektorfeld“

$$Z := \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} + \frac{i}{2}(x+iy)\frac{\partial}{\partial t}$$

auf dem $\mathbb{R}^3$, mit Koordinaten (x, y, t) (siehe z.B. [8]).

Kapitel 8

Der singuläre Träger und Hypoelliptizität

Definitionen. (a) Sei $L = \sum\limits_{<\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ ein linearer partieller Differentialoperator mit glatten Koeffizienten $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ in einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. L heiße **hypoelliptisch**, wenn für jede Distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und jede offene Teilmenge V von Ω gilt: Ist $(Lu)|_V \in C^\infty(V)$, so ist $u|_V \in C^\infty(V)$.

(b) Sei $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Der **singuläre Träger** $\operatorname{singsupp} u$ von u besteht aus der Menge aller Punkte von Ω, welche keine offene Umgebung besitzen, in der die Einschränkung von u eine C^∞-Funktion ist. Mit ähnlichen Argumenten wie im Beweis von Lemma 5.6 folgert man, daß $\operatorname{singsupp} u$ das Komplement der größten offenen Teilmenge von Ω ist, auf welcher die Einschränkung von u eine C^∞-Funktion ist. Offenbar ist $\operatorname{singsupp} u$ stets abgeschlossen in Ω, und es gilt

$$\operatorname{singsupp} u \subset \operatorname{supp} u \tag{8.1}$$

Beispiele 8.1 (a) Bezeichnet K_m die Fundamentallösung von Δ^m aus Theorem 7.8, so ist $\operatorname{singsupp} K_m = \{0\}$, aber $\operatorname{supp} K_m = \mathbb{R}^n$.

(b) $\operatorname{singsupp}\,(p.v.\frac{1}{x}) = \{0\}$.

(c) Bezeichnet σ_S das Oberflächenmaß einer glatten kompakten Hyperfläche S im $\mathbb{R}^n$, so ist $\operatorname{singsupp} \sigma_S = S = \operatorname{supp} \sigma_S$.

Lemma 8.2 *Sei $L = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ ein linearer partieller Differentialoperator mit glatten Koeffizienten in Ω. Dann gilt:*

(a) $\operatorname{singsupp}\,(Lu) \subset \operatorname{singsupp} u$ *für alle* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

(b) L ist hypoelliptisch dann und nur dann, wenn gilt

$$\operatorname{singsupp}\,(Lu) = \operatorname{singsupp} u \quad \text{für alle } u \in \mathcal{D}'(\Omega). \tag{8.2}$$

Beweis. (a) ist offensichtlich.
(b) Ist L hypoelliptisch, so betrachten wir für $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ die Menge $V := \Omega \setminus \operatorname{singsupp}(Lu)$. Dann ist $(Lu)|_V \in C^\infty(V)$, und folglich ist $u|_V \in C^\infty(V)$, d.h. es gilt $V \subset \Omega \setminus \operatorname{singsupp} u$. Zusammen mit (a) folgt hieraus (8.2).
Gilt umgekehrt (8.2), und ist $V \subset \Omega$ offen in Ω so, daß $(Lu)|_V \in C^\infty(V)$, so ist $V \subset \Omega \setminus \operatorname{singsupp}(Lu) = \Omega \setminus \operatorname{singsupp} u$. Damit ist $u|_V \in C^\infty(V)$, und folglich ist L hypoelliptisch.

Q.E.D.

Lemma 8.3 *Ist L hypoelliptisch in der offenen Teilmenge Ω des $\mathbb{R}^n$, so ist L auch in jeder offenen Teilmenge von Ω hypoelliptisch.*

Beweis. Sei Ω_1 eine offene Teilmenge von Ω, und sei $u \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ so, daß $Lu|_V$ glatt auf der offenen Teilmenge V von Ω_1 ist. Sei $x_0 \in V$. Wir wählen dann eine Abschneidefunktion $\chi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$, welche auf einer Umgebung U von x_0 in V identisch eins ist, und setzen $\tilde{u} := \chi u$. Dann liegt $\tilde{u}$ in $\mathcal{E}'(\Omega_1) \subset \mathcal{E}'(\Omega)$, und es ist $(L\tilde{u})|_U \in C^\infty(U)$. Wegen der Hypoelliptizität von L in Ω folgt damit $\tilde{u}|_U \in C^\infty(U)$, also auch $u|_U \in C^\infty(U)$. Somit ist u glatt auf V.

Q.E.D.

Wir betrachten ab jetzt wieder nicht-triviale lineare partielle Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten $P(D)$.

Definition. Eine Distribution $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ heiße **Parametrix** für $P(D)$, wenn gilt:

$$P(D)G - \delta \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Beachte, daß dann insbesondere

$$\operatorname{singsupp} P(D)G = \{0\}$$

gilt. Offenbar ist jede Fundamentallösung zu $P(D)$ eine Parametrix. Parametrices sind in der Regel jedoch erheblich leichter zu konstruieren als Fundamentallösungen und spielen, wie der folgende Satz zeigt, für Fragen der Regularität von Lösungen partieller Differentialgleichungen oftmals eine gleichwertige Rolle.

Satz 8.4 *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $P(D)$ *ist hypoelliptisch auf dem* $\mathbb{R}^n$.

(ii) Es gibt eine Parametrix G *für* $P(D)$ *so, daß* $\operatorname{singsupp} G \subset \{0\}$.

(iii) Für jede Parametrix G *für* $P(D)$ *ist* $\operatorname{singsupp} G \subset \{0\}$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (iii). Sei $P(D)$ hypoelliptisch, und sei G eine Parametrix für $P(D)$. Mit Lemma 8.2 folgt dann $\operatorname{singsupp} G = \operatorname{singsupp} P(D)G = \{0\}$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Wähle für G eine Fundamentallösung K von $P(D)$. Eine solche existiert ja nach dem Satz von Malgrange und Ehrenpreis (Theorem 7.13), und nach (iii) ist dann $\operatorname{singsupp} G \subset \{0\}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sei $G \in \mathcal{D}'$ eine Parametrix zu $P(D)$ mit $\operatorname{singsupp} G \subset \{0\}$, und sei $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Wir setzen $f := P(D)u$, und wollen zeigen:

Ist $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, und ist $f|_V \in C^\infty(V)$, so ist $u|_V \in C^\infty(V)$.

Sei dazu $x_0 \in V$ fest, und wähle $\varepsilon > 0$ so, daß $\overline{B}_{8\varepsilon}(x_0) \subset V$. Es genügt zu zeigen, daß

$$u|_{B_\varepsilon(x_0)} \in C^\infty(B_\varepsilon(x_0)). \tag{8.3}$$

Wähle nun $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ so, daß $\chi \equiv 1$ auf einer Umgebung von $\overline{B}_1(0)$, $\operatorname{supp} \chi \subset B_2(0)$, und setze $\tilde{u} := \chi\left(\frac{\cdot - x_0}{4\varepsilon}\right) u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Dann stimmt $\tilde{u}$ auf einer Umgebung von $\overline{B}_{4\varepsilon}(x_0)$ mit u überein, so daß für $\tilde{f} := P(D)\tilde{u} \in \mathcal{E}'$ gilt:

$$\tilde{f}|_{B_{4\varepsilon}(x_0)} = f|_{B_{4\varepsilon}(x_0)} \in C^\infty(B_{4\varepsilon}(x_0)).$$

Indem wir $\tilde{u}$ anstelle von u betrachten, genügt es also, folgendes zu beweisen:

Ist $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ so, daß $f := P(D)u$ auf $B_{4\varepsilon}(x_0)$ eine glatte Funktion ist, so gilt (8.3).

Dazu dürfen wir annehmen, daß unsere Parametrix G in $\overline{B}_\varepsilon(0)$ getragen ist. Wählt man nämlich $\psi \in \mathcal{D}$ so, daß $\psi \equiv 1$ auf einer Umgebung von 0, und $\operatorname{supp} \psi \subset \overline{B}_\varepsilon(0)$, so sieht man rasch mit Hilfe der Leibnizregel, daß

$$\begin{aligned} P(D)(\psi G) &= \psi\, P(D)G + g \\ &= \psi(\delta + h) + g = \delta + \psi h + g, \end{aligned}$$

mit C^∞-Funktionen g und h. Beachte hierbei, daß jede echte Ableitung von ψ in einer Umgebung von 0 verschwindet, und daß G außerhalb von $\{0\}$ glatt ist.

Somit ist auch ψG eine Parametrix zu $P(D)$, jedoch mit Träger in $\overline{B}_\varepsilon(0)$.
Sei also o.B.d.A. $\operatorname{supp} G \subset \overline{B}_\varepsilon(0)$, und sei $u \in \mathcal{E}'$ so, daß $f := P(D)u$ auf $B_{4\varepsilon}(x_0)$ glatt ist. Dann folgt zunächst

$$\begin{aligned} f * G &= (P(D)u) * G = u * P(D)G \\ &= u * (\delta + h) = u + u * h, \end{aligned}$$

wobei $h \in \mathcal{D}$, also auch $u*h \in \mathcal{D}$ ist. Um (8.3) zu zeigen genügt es also nachzuweisen, daß

$$(f * G)|_{B_\varepsilon(x_0)} \in C^\infty(B_\varepsilon(x_0)). \tag{8.4}$$

Wir zerlegen dazu f in $f = f_1 + f_2$, mit

$$f_1(x) := \chi\left(\frac{x - x_0}{2\varepsilon}\right) f(x), \quad f_2(x) := (1 - \chi)\left(\frac{x - x_0}{2\varepsilon}\right) f(x).$$

Offenbar sind dann $f_1 \in \mathcal{D}$ und $f_2 \in \mathcal{E}'$, wobei allerdings

$$\operatorname{supp} f_2 \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \geq 2\varepsilon\}.$$

Es folgt $f * G = f_1 * G + f_2 * G$, wobei $f_1 * G \in \mathcal{D}$, und

$$\operatorname{supp} f_2 * G \subset \operatorname{supp} f_2 + \operatorname{supp} G \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \geq \varepsilon\}.$$

Damit ist

$$(f * G)|_{B_\varepsilon(x_0)} = (f_1 * G)|_{B_\varepsilon(x_0)} \in C^\infty(B_\varepsilon(x_0)).$$

Q.E.D.

Korollar 8.5 (Weylsches Lemma) *Der Laplace-Operator Δ ist hypoelliptisch. Insbesondere ist jede harmonische Distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ eine glatte Funktion, d.h. ist $\Delta u = 0$ in Ω, so ist $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Beweis. Der Newton-Kern N auf dem $\mathbb{R}^n$ ist, wie wir gesehen haben, eine Fundamentallösung des Laplace-Operators, und offenbar ist $\operatorname{singsupp} N = \{0\}$ (vergl. auch Beispiel 8.1 (a)).
Damit ist Δ nach Satz 8.4 hypoelliptisch auf dem ganzen $\mathbb{R}^n$, insbesondere also auch in jeder offenen Teilmenge Ω.

Q.E.D.

Dieses Beispiel läßt sich erheblich verallgemeinern.

Definition. Sei $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ ein linearer partieller Differentialoperator der Ordnung m, mit konstanten Koeffizienten. Ferner bezeichne

$$P_m(\xi) := \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha \xi^\alpha, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

sein **Hauptsymbol**. $P(D)$ heiße **elliptisch**, falls

$$P_m(\xi) \neq 0 \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \tag{8.5}$$

Theorem 8.6 *Sei $P(D)$ ein elliptischer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten. Dann ist $P(D)$ hypoelliptisch.*

Beweis. Da P_m stetig ist, ist wegen (8.5)

$$a := \inf_{|\xi|=1} |P_m(\xi)| > 0.$$

Somit folgt für beliebiges $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$|P_m(\xi)| = |\xi|^m |P_m\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)| \geq a|\xi|^m. \tag{8.6}$$

Da $P - P_m$ ein Polynom vom Grade $\leq m-1$ ist, gibt es ferner eine Konstante $A \geq 0$ so, daß

$$|P(\xi) - P_m(\xi)| \leq A|\xi|^{m-1}, \quad \text{falls } |\xi| \geq 1.$$

Aus diesen beiden Ungleichungen folgert man leicht, daß ein $R \geq 1$ existiert mit

$$|P(\xi)| \geq \frac{a}{2}|\xi|^m \quad \text{für alle } \xi \text{ mit } |\xi| \geq R. \tag{8.7}$$

Sei nun $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ so, daß $\chi \equiv 1$ auf einer Umgebung von $\overline{B}_R(0)$, und $\operatorname{supp}\chi \subset B_{2R}(0)$. Dann ist nach (8.7) durch

$$g(\xi) := \begin{cases} (1-\chi(\xi))/P(\xi), & \text{falls } |\xi| \geq R, \\ 0, & \text{sonst }, \end{cases}$$

eine beschränkte C^∞-Funktion g auf $\mathbb{R}^n$ definiert. Insbesondere ist $g \in \mathcal{S}'$. Es sei

$$G := \mathcal{F}^{-1} g \in \mathcal{S}'.$$

Dann ist G eine Parametrix zu $P(D)$, denn

$$(P(D)G)^\wedge = Pg = 1 - \chi,$$

d.h.

$$P(D)G = \delta - \mathcal{F}^{-1}\chi,$$

wobei $\mathcal{F}^{-1}\chi \in \mathcal{S}$. Mit Satz 8.4 bleibt nur noch zu zeigen, daß

$$\operatorname{singsupp} G \subset \{0\}. \tag{8.8}$$

Dazu beobachten wir zunächst, daß für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ gilt

$$D^\alpha\left(\frac{1}{P}\right) = \frac{q_\alpha}{P^{|\alpha|+1}},$$

wobei q_α ein Polynom vom Grade $\leq |\alpha|(m-1)$ ist. Dies folgt sofort per Induktion nach der Ordnung der Ableitung $|\alpha|$. Mit (8.7) erhalten wir daher die Abschätzung

$$|D^\alpha\left(\frac{1}{P}\right)(\xi)| \leq C_\alpha \frac{|\xi|^{|\alpha|(m-1)}}{|\xi|^{m(|\alpha|+1)}} = C_\alpha |\xi|^{-m-|\alpha|}, \quad \text{falls } |\xi| \geq R,$$

und damit für jedes $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$D^\alpha g(\xi) = \mathcal{O}(|\xi|^{-m-|\alpha|}), \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{8.9}$$

Insbesondere ist also für $|\alpha| \geq -m+n+1$ offenbar $D^\alpha g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, und für solche α ist die inverse Fouriertransformierte von $D^\alpha g$ punktweise gegeben durch

$$\mathcal{F}^{-1}(D^\alpha g)(x) = (2\pi)^{-n} \int D^\alpha g(\xi) e^{ix\cdot\xi}\, d\xi.$$

Ist allgemeiner $k \in \mathbb{N}$, und ist $|\alpha| \geq -m+n+1+k$, so zeigt der Satz über die Differentiation parameterabhängiger Integrale zusammen mit (8.9) (siehe Satz 2.18) zudem, daß $\mathcal{F}^{-1}(D^\alpha g) \in C^k(\mathbb{R}^n)$ ist, und daß

$$D^\beta(\mathcal{F}^{-1}(D^\alpha g)(x) = (2\pi)^{-n} \int \xi^\beta D^\alpha g(\xi) e^{ix\cdot\xi}\, d\xi, \quad |\beta| \leq k.$$

Ferner gilt im Distributionensinne

$$\mathcal{F}^{-1}(D^\alpha g) = (-1)^{|\alpha|} x^\alpha G,$$

so daß

$$x^\alpha G \in C^k(\mathbb{R}^n), \text{ falls } |\alpha| \geq -m+n+1+k.$$

Insbesondere ist $|\cdot|^{2\ell} G \in C^k(\mathbb{R}^n)$, falls $2\ell \geq -m+n+1+k$. Da $|\cdot|^{2\ell}$ aber glatt ist, erkennen wir also, daß $G|_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \in C^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ ist für jedes $k \in \mathbb{N}$. Somit ist $G|_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}$ glatt, d.h. es gilt (8.8).

Q.E.D.

Bemerkungen 8.7 Theorem 8.5 besitzt vielfältige Verallgemeinerungen. Z.B. lassen sich mit Hilfe des Kalküls der Pseudodifferentialoperatoren auch für lineare Differentialoperatoren mit variablen Koeffizienten verallgemeinerte Parametrices konstruieren und damit die Hypoelliptizität nachweisen. Die Grundidee ist dabei dieselbe wie im Beweis von Theorem 8.5 (siehe z.B. [3]). Für den Fall linearer Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten hat Hörmander zudem eine vollständige Charakterisierung der Hypoelliptizität anhand von Eigenschaften des zugehörigen Symbols gegeben (siehe [8]).

Literaturverzeichnis

[1] Anton Deitmar. *A first course in harmonic analysis*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2002.

[2] J.J. Duistermaat and J.A.C. Kolk. *Distributions: Theory and Applications*. Cornerstone. Birkhäuser, 2010.

[3] Gerald B. Folland. *Harmonic analysis in phase space*, volume 122 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.

[4] I. M. Gelfand and G. E. Shilov. *Generalized functions. Vol. 1.* Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1964 [1977]. Properties and operations, Translated from the Russian by Eugene Saletan.

[5] I. M. Gelfand and G. E. Shilov. *Generalized functions. Vol. 2. Spaces of fundamental and generalized functions.* Translated from the Russian by Morris D. Friedman, Amiel Feinstein and Christian P. Peltzer. Academic Press, New York, 1968.

[6] Loukas Grafakos. *Classical and modern Fourier analysis*. Pearsson Education, Inc., London, 2004.

[7] Lars Hörmander. On the division of distributions by polynomials. *Ark. Mat.*, 3:555–568, 1958.

[8] Lars Hörmander. *Linear partial differential operators*. Springer Verlag, Berlin, 1976.

[9] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. I*, volume 256 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1983. Distribution theory and Fourier analysis.

[10] Yitzhak Katznelson. *An introduction to harmonic analysis*. Dover Publications Inc., New York, corrected edition, 1976.

[11] S. Łojasiewicz. Division d'une distribution par une fonction analytique de variables réelles. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 246:683–686, 1958.

[12] Walter Rudin. *Functional analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1973. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics.

[13] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, second edition, 1974. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics.

[14] L. Schwartz. *Théorie des distributions. Tome I*. Actualités Sci. Ind., no. 1091 = Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg 9. Hermann & Cie., Paris, 1950.

[15] Laurent Schwartz. *Théorie des distributions. Tome II*. Actualités Sci. Ind., no. 1122 = Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg **10**. Hermann & Cie., Paris, 1951.

[16] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. *Fourier analysis*, volume 1 of *Princeton Lectures in Analysis*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003. An introduction.

[17] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. *Functional Analysis: Introduction to Further Topics in Analysis*, volume 4 of *Princeton Lectures in Analysis*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2011.

[18] Elias M. Stein and Guido Weiss. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971. Princeton Mathematical Series, No. 32.