1 Fourierreihen 2π-periodischer Funktionen

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion, dh gilt

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f(x + 2\pi) = f(x),$$

so ist f eindeutig bestimmt durch $f|_{[0,2\pi)}$. Man kann f auch auffassen als Funktion $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, wobei

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} = \{x + 2\pi\mathbb{Z} : x \in \mathbb{R}\} = \{x + 2\pi\mathbb{Z} : x \in [0, 2\pi)\}.$$

Bemerkung: $(\mathbb{R}, +)$ ist abelsche Gruppe und $2\pi\mathbb{Z}$ ist Untergruppe. Die Abbildung $t \mapsto e^{it}$ ist ein surjektiver Homomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ nach $(\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \cdot)$ mit Kern $2\pi\mathbb{Z}$, also ist

$$(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \cdot), \quad [t] \mapsto e^{it}$$

ein Isomorphismus. $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ heißt (eindimensionaler) *Torus*, Bez: $\mathbb{T}$. Wir verwenden meist $[0, 2\pi)$ als Modell für $\mathbb{T}$. Wir verwenden das Lebeguemaß auf $\mathbb{T}$ und schreiben $\int_{\mathbb{T}} \ldots = \int_0^{2\pi} \ldots$.

1.1. Definition: Ein *trigonometrisches Polynom* ist ein Ausdruck der Form

$$P(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikt}, \tag{1}$$

wobei $N \in \mathbb{N}$ und $c_k \in \mathbb{C}$. Die auftretenden k heißen *Frequenzen* und die c_k die *Koeffizienten* von P. $\max\{k \in \mathbb{N}_0 : |a_k| + |a_{-k}| > 0\}$ heißt *Grad von P*. Die zugehörigen Funktionen $\mathbb{T} \to \mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ werden ebenfalls mit P bezeichnet.

1.2. Bemerkung: Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikt}\, dt = \begin{cases} 1 & , k = 0 \\ 0 & , k \neq 0 \end{cases}.$$

Somit gilt für ein trigonometrisches Polynom wie in (1):

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(t) e^{-int}\, dt = \sum_{k=-N}^{N} c_k \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t}\, dt = \begin{cases} c_n & , |n| \leq N \\ 0 & , |n| > N \end{cases}.$$

Problem: Für trigonometrische Reihen $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$ stellen sich die Fragen nach Konvergenz, nach der repräsentierten Funktion und nach der Bestimmung der Koeffizienten c_k aus der repräsentierten Funktion.

1.3. Definition: Für $f \in L^1(\mathbb{T})$ und $n \in \mathbb{Z}$ heißt

$$\hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{int} \, dt$$

der *n-te Fourierkoeffizient von f*, und

$$S[f] \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int} \quad \text{(formal!)}$$

heißt *Fourierreihe von f*.

Frage: Wie ist die Beziehung zwischen $S[f]$ und f?

1.4. Lemma: (a) Die Abbildung $f \mapsto (\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ ist linear und stetig $L^1(\mathbb{T}) \to l^\infty(\mathbb{Z})$ mit

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| \leq \|f\|_1 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| \, dt.$$

(b) Für $f \in L^1(\mathbb{T})$ und $\tau \in \mathbb{T}$ sei $f_\tau \in L^1(\mathbb{T})$ definiert durch

$$f_\tau(t) := f(t - \tau), \quad t \in \mathbb{T}.$$

Dann gilt

$$\widehat{f_\tau}(n) = e^{-in\tau} \hat{f}(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. (a) Linearität ist klar. Für $n \in \mathbb{Z}$ ist

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| \underbrace{|e^{-int}|}_{=1} \, dt = \|f\|_1.$$

(b) Es gilt mittels der Substitution $t = s + \tau$:

$$\begin{aligned} \widehat{f_\tau}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t - \tau) e^{-int} \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) e^{-ins} e^{-in\tau} \, ds \\ &= e^{-in\tau} \hat{f}(n). \end{aligned}$$

□ Ende 1.Vorl.

1.5. Satz: Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$ mit $\hat{f}(0) = 0$. Dann definiert $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \int_0^t f(s) \, ds$ eine 2π-periodische stetige Funktion, dh $F : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ist stetig, und es gilt

$$\hat{F}(n) = \frac{1}{in} \hat{f}(n), \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Zum Beweis benötigen wir ein Lemma, das im folgenden Einschub bereitgestellt wird.

— Einschub über absolutstetige Funktionen —

Definition (ad hoc): Eine Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt *absolutstetig* auf $[a,b]$, falls es $f \in L^1[a,b]$ gibt mit

$$F(d) - F(c) = \int_c^d f(t)\,dt \quad \text{für alle } [c,d] \subseteq [a,b].$$

Lemma: Seien $F, G : [a,b] \to \mathbb{C}$ absolutstetig auf $[a,b]$ mit zugehörigen $f, g \in L^1[a,b]$, dh für alle $x \in [a,b]$ ist

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt, \quad G(x) = G(a) + \int_a^x g(t)\,dt.$$

Dann gilt

$$\int_a^b Fg\,dt = FG|_a^b - \int_a^b fG\,dt$$

(partielle Integration).

Beweis. Wähle $f_n, g_n \in C[a,b]$ mit $f_n \to f$, $g_n \to g$ bzgl. $\|\cdot\|_1$ und setze

$$F_n(x) := F(a) + \int_a^x f_n(t)\,dt, \quad G_n(x) = G(a) + \int_a^x g_n(t)\,dt.$$

Dann sind $F_n, G_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar mit $F_n' = f_n$, $G_n' = g_n$ und $F_n \to F$, $G_n \to G$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$. Mit partieller Integration gilt

$$\int_a^b F_n g_n\,dt = F_n G_n|_a^b - \int_a^b f_n G_n\,dt.$$

Für $n \to \infty$ folgt daraus die Behauptung, da $F_n G_n \to FG$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ und $F_n g_n \to Fg$, $f_n G_n \to fG$ bzgl. $\|\cdot\|_1$. $\square$

— Ende des Einschubs über absolutstetige Funktionen —

Beweis von Satz 1.5. Stetigkeit von F ist klar. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$F(t+2\pi) - F(t) = \int_t^{t+2\pi} f(s)\,ds = \int_0^{2\pi} f(s)\,ds = 2\pi \hat{f}(0) = 0,$$

also ist F 2π-periodisch. Weiter ist für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$:

$$\hat{F}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t) e^{-int}\,dt = F(t) \frac{1}{-in} e^{-int}|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{1}{-in} e^{-int}\,dt = \frac{1}{in} \hat{f}(n).$$

$\square$

1.6. Definition und Satz: Seien $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Für fast jedes $t \in \mathbb{T}$ ist die Funktion $\tau \mapsto f(t-\tau)g(\tau)$ integrierbar über $\mathbb{T}$, und für

$$h(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau, \quad t \in \mathbb{T},$$

gilt $h \in L^1(\mathbb{T})$, $\|h\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$, sowie

$$\hat{h}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Die Funktion h heißt *Faltung von f und g* und wird mit $f * g$ bezeichnet. Es gilt also

$$\begin{aligned} * \quad &: \quad L^1(\mathbb{T}) \times L^1(\mathbb{T}) \to L^1(\mathbb{T}) \\ & \quad\;\; \|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1 \\ \forall n \in \mathbb{Z} \quad &: \quad \widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n). \end{aligned}$$

Beweis. Die Abbildungen $(t,\tau) \mapsto f(t-\tau)$ und $(t,\tau) \mapsto g(\tau)$ sind messbar, also ist auch

$$(t,\tau) \mapsto F(t,\tau) := f(t-\tau)g(\tau)$$

messbar. Für fast jedes τ ist $t \mapsto F(t,\tau)$ Vielfaches von f_τ, also integrierbar. Weiter gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int \Big(\frac{1}{2\pi}\int |F(t,\tau)|\,dt\Big)\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\int |g(\tau)|\|f_\tau\|_1\,d\tau = \|g\|_1\|f\|_1 < \infty.$$

Nach Fubini-Tonelli ist $(t,\tau) \mapsto F(t,\tau)$ integrierbar und $h \in L^1(\mathbb{T})$, $\|h\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$. Für $n \in \mathbb{Z}$ ist nun

$$\begin{aligned} \hat{h}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int \frac{1}{2\pi}\int f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau\, e^{-int}\,dt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int\int f(t-\tau)e^{-in(t-\tau)}\,g(\tau)e^{-in\tau}\,dt\,d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi}\int f(t-\tau)e^{-in(t-\tau)}\,dt \cdot \frac{1}{2\pi}\int g(\tau)e^{-in\tau}\,d\tau \\ &= \hat{f}(n)\hat{g}(n), \end{aligned}$$

wobei wir beim letzten Gleichheitszeichen die Translationsinvarianz des Integrals benutzt haben. □

1.7. Satz: Die Faltung $* : L^1(\mathbb{T}) \times L^1(\mathbb{T}) \to L^1(\mathbb{T})$ ist bilinear, stetig, kommutativ und assoziativ.

Beweis. Kommutativität folgt mittels einfacher Substitution. Für die Assoziativität muss man außerdem noch Fubini verwenden. □

1.8. Lemma: Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$.

(a) Ist $n \in \mathbb{Z}$ und $\varphi(t) = e^{int}$, $t \in \mathbb{T}$, so gilt

$$\varphi * f(t) = \hat{f}(n)e^{int}, \quad t \in \mathbb{T}.$$

(b) Ist $k(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikt}$, $t \in \mathbb{T}$, ein trigonometrisches Polynom, so gilt

$$k * f(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k \hat{f}(k) e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Beweis. (b) folgt aus (a) mit Linearität. Zu (a):

$$\varphi * f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau = e^{int} \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau) e^{-in\tau}\, d\tau}_{=\hat{f}(n)}.$$

$\square$ Ende 2.Vorl.

2 Summierbarkeit von Fourierreihen

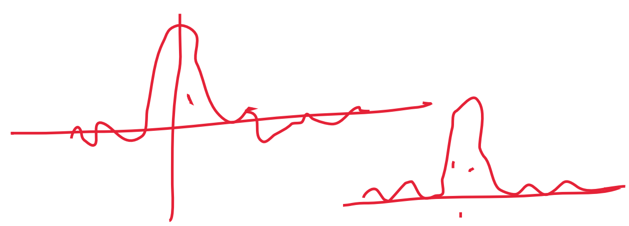
Idee: Verwende den Zusammenhang von Lemma 1.8(b) und die Faltung.

2.1. Definition: Eine *Dirac-Folge* (stetiger Funktionen) auf $\mathbb{T}$ ist eine Folge (k_n) stetiger 2π-periodischer Funktionen mit

(D1) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_n(t)\, dt = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(D2) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |k_n(t)|\, dt < \infty$,

(D3) $\forall \delta \in (0,\pi) : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta} |k_n(t)|\, dt = 0$.



Gilt außerdem $k_n(t) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{T}$, so heißt (k_n) eine *positive Dirac-Folge* auf $\mathbb{T}$ (in diesem Fall folgt (D2) aus (D1)).

Ziel: $k_n * f \to f$ in $\|\cdot\|_1$ für jedes $f \in L^1(\mathbb{T})$.

Beispiel: Sei $k : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ stetig mit $\int k(t)\, dt = 1$ und $k(t) = 0$ für $|t| \geq \pi$. Setze für jedes $n \in \mathbb{N}$: $k_n(t) := nk(nt)$, $t \in \mathbb{T}$. Dann ist (k_n) eine Dirac-Folge. Es ist nämlich $k_n(t) = 0$ für $|t| \geq \pi/n$ und mittels einer einfachen Substitution:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_n(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k(t)\, dt = 1, \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |k_n(t)|\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |k(t)|\, dt.$$

Also gelten (D1) und (D2). Ist $\delta > 0$, so gilt $\int_\delta^{2\pi-\delta} |k_n(t)|\,dt = 0$ für $n > \pi/\delta$. Somit genügt (k_n) auch der Bedingung (D3).

Bezeichnung: Mit $C(\mathbb{T})$ bezeichnen wir den Raum aller stetigen und 2π-periodischen Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

2.2. Lemma: Sei X ein Banachraum, $\varphi : \mathbb{R} \to X$ stetig und 2π-periodisch und (k_n) eine Dirac-Folge auf $\mathbb{T}$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} k_n(t)\varphi(t)\,dt = \varphi(0).$$

— Einschub: Riemann-Integral für $g \in C([a,b], X)$, X Banachraum —

Wir definieren

$$\int_a^b g(t)\,dt := \lim_{\max_j |t_j - t_{j-1}| \to 0} \sum_{j=1}^n g(\xi_j)(t_j - t_{j-1}),$$

wobei $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ und $\xi_j \in [t_{j-1}, t_j]$ für alle j.

Dieser Limes existiert, da g auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ gleichmäßig stetig ist:

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ so, dass $|g(t) - g(s)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ für alle t, s mit $|t - s| < \delta$. Sind Z_1, Z_2 dann Zerlegungen mit Feinheit $< \delta/2$, so wähle man eine gemeinsame Verfeinerung $\widetilde{Z}$. Bezeichne die Zwischenpunkte von Z_1 mit ξ_j und die von Z_2 mit η_j, wobei j die Intervalle von $\widetilde{Z}$ durchnummeriere (ξ_j liegt dann nicht unbedingt im j-ten Intervall von $\widetilde{Z}$, sondern in dem Intervall von Z_1, welches Obermenge des j-ten Intervalls von Z_1 ist etc; wird ein Teilintervall von Z_1 durch $\widetilde{Z}$ in k kleinere Teilintervalle geteilt, kommt der entsprechende Zwischenwert genau k-mal unter den ξ_j vor). Wir bezeichnen $\widetilde{Z}$ versehen mit den ξ_j als $\widetilde{Z}_1$ und versehen mit den η_j als $\widetilde{Z}_2$. Für ein gegebenes Teilintervall $[t_{j-1}, t_j]$ von $\widetilde{Z}$ ist der Abstand von ξ_j und η_j dann kleiner als δ, denn die Abstände von ξ und η zu t_{j-1} und t_j sind jeweils kleiner als $\delta/2$. Somit gilt

$$\|S(g, Z_1) - S(g, Z_2)\| = \|S(g, \widetilde{Z}_1) - S(g, \widetilde{Z}_2)\| \leq \sum_j \underbrace{\|g(\xi_j) - g(\eta_j)\|}_{<\varepsilon/(b-a)}(t_j - t_{j-1}) < \varepsilon.$$

Das so definierte Integral $C([a,b], X) \to X$ ist linear und es gilt:

- $\forall c \in (a,b)$: $\int_a^b g(t)\,dt = \int_a^c g(t)\,dt + \int_c^b g(t)\,dt$,
- $\| \int_a^b g(t)\,dt\| \leq \int_a^b \|g(t)\|\,dt$,
- Ist Y ein weiterer Banachraum und $T : X \to Y$ linear und stetig, so ist

$$T\Big(\int_a^b g(t)\,dt\Big) = \int_a^b T(g(t))\,dt.$$

— Einschubende —

Beweis von Lemma 2.2. Für jedes $\delta > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} & |\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k_n(t)\varphi(t)\,dt - \varphi(0)| \stackrel{(D1)}{=} |\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k_n(t)(\varphi(t)-\varphi(0))\,dt| \\ \leq\ & \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leq\delta} |k_n(t)||\varphi(t)-\varphi(0)|\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi} |k_n(t)|\,dt \cdot 2\|\varphi\|_\infty \\ \stackrel{(D2)}{\leq}\ & C\cdot\sup_{|t|\leq\delta}|\varphi(t)-\varphi(0)| + 2\|\varphi\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}|k_n(t)|\,dt, \end{aligned}$$

wobei $C := \sup_n \|k_n\|_1$.
Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir $\delta > 0$ mit $|\varphi(t)-\varphi(0)| \leq \varepsilon/C$ für $|t| \leq \delta$ und dann $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_0 : \frac{2\|\varphi\|_\infty}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}|k_n(t)|\,dt < \varepsilon$$

(nach (D3)!). Dann gilt

$$\Big|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k_n(t)\varphi(t)\,dt - \varphi(0)\Big| \leq 2\varepsilon$$

für jedes $n \geq n_0$. □

2.3. Lemma: Für jedes $f \in L^1(\mathbb{T})$ und jedes $\tau_0 \in \mathbb{T}$ gilt

$$\lim_{\tau\to\tau_0}\|f_\tau - f_{\tau_0}\|_{L^1} = 0.$$

Beweis. Wegen

$$\|f_\tau - f_{\tau_0}\|_{L^1} = \|(f_{\tau-\tau_0} - f)_{\tau_0}\|_{L^1} = \|f_{\tau-\tau_0} - f\|_{L^1}$$

reicht ein Beweis für $\tau_0 = 0$.

Schritt 1: g stetig. Es gilt

$$\begin{aligned} \|g_\tau - g\|_{L^1} &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|g(t-\tau)-g(t)|\,dt \leq \sup_{t\in\mathbb{R}}|g(t-\tau)-g(t)| \\ &\leq \sup_{\xi,\eta\in\mathbb{R}:|\xi-\eta|\leq|\tau|}|g(\xi)-g(\eta)| \to 0\ (\tau\to 0), \end{aligned}$$

da g als stetige 2π-periodische Funktion auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

Schritt 2: $f \in L^1(\mathbb{T})$ beliebig. Sei $\varepsilon > 0$. Wir finden $g \in C(\mathbb{T})$ mit $\|f-g\|_{L^1} < \varepsilon/3$ und zu g nach Schritt 1 ein $\delta > 0$ mit $\|g_\tau - g\|_{L^1} < \varepsilon/3$ für $|t| < \delta$. Für jedes $|\tau| < \delta$ gilt dann

$$\|f_\tau - f\|_{L^1} \leq \underbrace{\|f_\tau - g_\tau\|_{L^1}}_{=\|f-g\|_{L^1}} + \|g_\tau - g\|_{L^1} + \|g-f\|_{L^1} < \varepsilon.$$

□

2.4. Lemma: Für $k \in C(\mathbb{T})$ und $f \in L^1(\mathbb{T})$ gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k(\tau) f_\tau \, d\tau = k * f.$$

Beweis. Schritt 1: $f = g$ ist stetig. Dann ist $\tau \mapsto g_\tau$ als Abbildung $\mathbb{T} \to C(\mathbb{T})$ stetig. Für festes $t \in \mathbb{T}$ ist die Abbildung $C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$, $h \mapsto h(t)$ linear und stetig, also gilt

$$\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k(\tau) g_\tau \, d\tau\Big)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k(\tau) \underbrace{g_\tau(t)}_{=g(t-\tau)} \, d\tau = k * g(t).$$

Schritt 2: Nach §1 ist $L^1(\mathbb{T}) \to L^1(\mathbb{T})$, $f \mapsto k * f$ linear und stetig. Außerdem gilt

$$\|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k(\tau) f_\tau \, d\tau\|_{L^1} \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |k(\tau)| \underbrace{\|f_\tau\|_{L^1}}_{=\|f\|_{L^1}} \, d\tau \leq \|k\|_\infty \|f\|_{L^1},$$

dh die Abbildung $f \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k(\tau) f_\tau \, d\tau$ ist linear und stetig $L^1(\mathbb{T}) \to L^1(\mathbb{T})$.
Da $C(\mathbb{T})$ dicht in $L^1(\mathbb{T})$ ist, stimmen die Abbildungen auf $L^1(\mathbb{T})$ überein. □

2.5. Satz: Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$ und (k_n) eine Dirac-Folge auf $\mathbb{T}$. Dann gilt bzgl. $\|\cdot\|_{L^1}$:

$$f = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k_n(\tau) f_\tau \, d\tau = \lim_{n\to\infty} k_n * f.$$

Beweis. Lemma 2.3, Lemma 2.2 und Lemma 2.4. □

Bemerkung: Nach Lemma 1.8(b) gilt für $f \in L^1(\mathbb{T})$ und jedes $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e^{ikt} = D_N * f(t), \quad t \in \mathbb{T},$$

wobei

$$D_N(t) := \sum_{k=-N}^{N} e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{T},$$

Dirichlet-Kern heißt.

Frage: Ist (D_N) eine Dirac-Folge?

Die Antwort ist leider negativ. Ende 3.Vorl.

2.6. Lemma: (a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$D_n(t) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)}.$$

(b) Es gilt $\|D_n\|_{L^1} \to \infty (n \to \infty)$, genauer $\|D_n\|_{L^1} \geq c \operatorname{Log} n + d$.

Somit ist (D_n) keine Dirac-Folge, da (D2) wegen (b) nicht gilt!

Beweis. zu (a): Es gilt

$$\begin{aligned}2i\sin(t/2)\Big(\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}\Big) &= \Big(e^{it/2} - e^{-it/2}\Big)\Big(\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}\Big) \\ &= \sum_{k=-n}^{n} \Big(e^{i(k+1/2)t} - e^{i(k-1/2)t}\Big) \\ &= e^{i(n+1/2)t} - e^{-i(n+1/2)t} = 2i\sin((n+\frac{1}{2})t).\end{aligned}$$

zu (b): Zunächst stellen wir fest, dass für $s \in [0, \pi/2]$ gilt:

$$\frac{2}{\pi}s \leq \sin s \leq s.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt dann nach (a):

$$\begin{aligned}\|D_n\|_{L^1} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big|\frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)}\Big|\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Big|\frac{\sin(m\tau)}{\sin\tau}\Big|\,d\tau, \text{ wobei } m = 2n+1. \\ &\geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m-1}\int_{k\pi/m}^{(2k+1)\pi/(2m)} \Big|\frac{\sin(m\tau)}{\sin\tau}\Big|\,d\tau \\ &= \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m-1}\int_0^{\pi/(2m)} \frac{\sin(mt)}{\sin(t+k\pi/m)}\,dt \\ &\geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m-1}\int_0^{\pi/(2m)} \frac{\frac{2mt}{\pi}}{t+\frac{k\pi}{m}}\,dt \\ &\geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\frac{2m}{\pi}}{\frac{\pi}{2m}+\frac{k\pi}{m}}\underbrace{\int_0^{\pi/(2m)} t\,dt}_{=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{4m^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{2k+1} \longrightarrow \infty \ (n\to\infty),\end{aligned}$$

da $m = 2n+1$. $\square$

Erinnerung an Analysis I (übliche Übungsaufgabe): Gilt $a_n \to a$ $(n \to \infty)$, so folgt $b_n := \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \to a$ $(n \to \infty)$. Dabei ist (b_n) die Folge der arithmetischen Mittel. Die

Umkehrung ist i.a. falsch, wie das Beispiel $a_n = (-1)^n$ zeigt: Hier gilt $|b_n| \leq 1/n$, also $b_n \to 0$, aber (a_n) konvergiert nicht.

Wir werden diese Beobachtung anwenden auf Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, dh auf die Folge der Partialsummen $(s_n) = (\sum_{k=1}^{n} a_k)$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *Cesaro-summierbar* mit Wert s, falls die Folge der *Cesaro-Mittel* $(\sigma_n) = (\frac{s_1+s_2+\ldots+s_n}{n})$ gegen s konvergiert.

Wir führen die folgenden **Bezeichnungen** ein: Für $f \in L^1(\mathbb{T})$ und $N \in \mathbb{N}_0$ sei

$$\begin{aligned} S_N(f)(t) \;&:=\; S_N(f,t) := \sum_{k=-N}^{N} S_k(f,t), \quad t \in \mathbb{T} \\ \sigma_N(f)(t) \;&:=\; \sigma_N(f,t) := \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n(f,t), \quad t \in \mathbb{T}. \end{aligned}$$

Es gilt dann (wegen Lemma 1.8(b)):

$$\sigma_N(f,t) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=-N}^{N}(N+1-|k|)\hat{f}(k)e^{ikt} = \sum_{k=-N}^{N}\Big(1-\frac{|k|}{N+1}\Big)\hat{f}(k)e^{ikt} = F_N * f(t),$$

wobei

$$F_N(t) := \sum_{k=-N}^{N}\Big(1-\frac{|k|}{N+1}\Big)e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{T}, N \in \mathbb{N}_0,$$

der *Fejér-Kern* ist.

Frage: Ist (F_n) eine Dirac-Folge auf $\mathbb{T}$?

Nach Konstruktion gilt $F_n = \frac{1}{n+1}(D_0 + D_1 + \ldots + D_n)$, also genügt die Folge (F_n) der Bedingung (D1).

2.7. Lemma: (a) Für $n \in \mathbb{N}_0$, $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$F_n(t) = \frac{1}{n+1}\Big(\frac{\sin(\frac{n+1}{2}t)}{\sin(t/2)}\Big)^2.$$

(b) (F_n) ist eine positive Dirac-Folge.

Beweis. zu (a): Es gilt

$$\sin^2(t/2) = \frac{1}{2}(1-\cos t) = -\frac{1}{4}e^{-it} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{it}$$

und weiter

$$
\begin{aligned}
&\Big(-\frac{1}{4}e^{-it}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{it}\Big)\sum_{k=-n}^{n}\Big(1-\frac{|k|}{n+1}\Big)e^{ikt}\\
=\;& \sum_{k=-n}^{n} -\Big(1-\frac{|k|}{n+1}\Big)\frac{e^{i(k-1)t}}{4}+\sum_{k=-n}^{n}\Big(1-\frac{|k|}{n+1}\Big)\frac{e^{ikt}}{2}+\sum_{k=-n}^{n}-\Big(1-\frac{|k|}{n+1}\Big)\frac{e^{i(k+1)t}}{4}\\
=\;& \sum_{k=-(n+1)}^{n} -\Big(1-\frac{|k+1|}{n+1}\Big)\frac{e^{ikt}}{4}+\sum_{k=-n}^{n}\Big(1-\frac{|k|}{n+1}\Big)\frac{e^{ikt}}{2}+\sum_{k=-n}^{n+1}-\Big(1-\frac{|k-1|}{n+1}\Big)\frac{e^{ikt}}{4}\\
=\;& \frac{1}{n+1}\Big(-\frac{1}{4}e^{-i(n+1)t}-\frac{1}{4}e^{i(n+1)t}+\frac{1}{2}\Big),
\end{aligned}
$$

denn für $|k|\le n$ gilt

$$
\frac{|k+1|-2|k|+|k-1|}{4(n+1)}=\begin{cases}\frac{1}{2(n+1)} & ,k=0\\ 0 & ,1\le |k|\le n\end{cases}.
$$

zu (b): Wie oben gesehen, genügt (F_n) der Bedingung (D1). Nach (a) ist $F_n(t)\ge 0$ für alle $n\in\mathbb{N}_0$, $t\in\mathbb{T}$, also genügt (F_n) der Bedingung (D2). Zum Beweis von (D3) sei $\delta\in(0,\pi)$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta}|F_n(t)|\,dt &= \frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta}\frac{1}{n+1}\Big(\frac{\sin(\frac{n+1}{2}t)}{\sin(t/2)}\Big)^2dt\\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta}dt\cdot\frac{1}{(n+1)\sin(\delta/2)}\longrightarrow 0\ (n\to\infty).
\end{aligned}
$$

□

2.8. Satz: Sei $f\in L^1(\mathbb{T})$. Dann gilt

$$
\|\sigma_n(f)-f\|_{L^1(\mathbb{T})}\longrightarrow 0\ (n\to\infty).
$$

Beweis. Satz 2.5, Lemma 2.7 und die Darstellung $\sigma_n(f)=F_n*f$. □

2.9. Folgerung: Ist $f\in L^1(\mathbb{T})$ mit $\hat f(n)=0$ für alle $n\in\mathbb{Z}$, so ist $f=0$ fast überall.

Beweis. $\sigma_n(f)=0$ und Satz 2.8. □

2.10. Satz (Riemann-Lebesgue-Lemma): Für jedes $f\in L^1(\mathbb{T})$ gilt

$$
\hat f(n)\to 0\quad (|n|\to\infty).
$$

Beweis. Sei $\varepsilon>0$. Wähle $n_0\in\mathbb{N}$ mit $\|\sigma_{n_0}(f)-f\|_{L^1}<\varepsilon$. Dann gilt für alle $n\ge n_0$:

$$
|\hat f(n)|=|(\widehat{f-\sigma_{n_0}(f)})(n)|\le\|f-\sigma_{n_0}(f)\|_{L^1}<\varepsilon.
$$

□

Homogene Banachräume

2.11. Definition: Ein *homogener Banachraum auf* $\mathbb{T}$ ist ein Teilraum B von $L^1(\mathbb{T})$ mit Norm $\|\cdot\|_B \geq \|\cdot\|_{L^1}$ so, dass $(B, \|\cdot\|_B)$ ein Banachraum ist und dass gilt:

(H1) Für alle $f \in B$ und $\tau \in \mathbb{T}$ ist $f_\tau \in B$ und $\|f_\tau\|_B = \|f\|_B$.

(H2) Für alle $f \in B$ und $\tau_0 \in \mathbb{T}$ gilt $\lim_{\tau \to \tau_0} \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_B = 0$.

Ende 4.Vorl.

Bemerkung: (a) $L^1(\mathbb{T})$ ist ein homogener Banachraum (nach Lemma 2.3).

(b) Es reicht, dass $\|\cdot\|_{L^1} \leq c_0 \|\cdot\|_B$ für eine Konstante c_0 und dass für jedes $f \in B$ die Abbildung $\tau \to f_\tau$ wohldefiniert und stetig $\mathbb{T} \to B$ ist (Übungsaufgabe).

2.12. Beispiele: (a) $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$. (H2) folgt aus der gleichmäßigen Stetigkeit von $f \in C(\mathbb{T})$.

(b) $C^n(\mathbb{T})$, der Raum aller n-mal stetig differenzierbaren 2π-periodischen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, ist ein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$ bzgl. der Norm $\|f\|_{C^n(\mathbb{T})} = \sum_{k=0}^n \|f^{(k)}\|_\infty$.

(c) Für $1 \leq p < \infty$ ist $L^p(\mathbb{T}) = \{f \in L^1(\mathbb{T}) : \|f\|_{L^p} := \left(\frac{1}{2\pi}\int_\mathbb{T} |f(t)|^p \, dt\right)^{1/p} < \infty\}$ ein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$. Die Eigenschaft (H2) gilt für $f \in C(\mathbb{T})$ und $C(\mathbb{T})$ ist dicht in $L^p(\mathbb{T})$.

(d) Der Raum $(L^\infty(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ ist kein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$, da für $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ gilt:

$$\tau \mapsto f_\tau \text{ ist stetig bzgl. } \|\cdot\|_\infty \iff f \text{ ist gleichmäßig stetig.}$$

2.13. Lemma: Sei $B \subseteq L^1(\mathbb{T})$ ein homogener Banachraum, der (H1) genügt. Sei

$$B_c := \{f \in B : \ \tau \mapsto f_\tau \text{ ist stetig } \mathbb{T} \to B \ \}.$$

Dann ist B_c ein abgeschlossener Teilraum von $(B, \|\cdot\|_B)$ und ein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$.

Das folgende Theorem verallgemeinert Satz 2.5.

2.14. Theorem: Sei B ein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$. Ist $f \in B$ und (k_n) eine Dirac-Folge auf $\mathbb{T}$, so gilt

$$\|k_n * f - f\|_B \longrightarrow 0 \ (n \to \infty).$$

2.15. Folgerung: (a) Ist B homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$, so ist

$$\mathbb{P}_B := \{p \in B : \ p \text{ ist trigonometrisches Polynom } \}$$

dicht in B.

(b) Jede stetige 2π-periodische Funktion kann gleichmäßig durch trigonometrische Polynome approximiert werden (Weierstraß).

Beweis. (a) Bzgl. $\|\cdot\|_B$ gilt nach Theorem 2.14:

$$\sigma_n(f) = F_n * f \longrightarrow f.$$

(b) Beispiel 2.12(a) und Theorem 2.14. $\square$

Beweis von Theorem 2.14. Wie wir im Beweis zeigen, gilt:

Ist $f \in B$ und $k \in C(\mathbb{T})$, so gilt $k * f \in B$ und

$$\|k * f\|_B \leq \|k\|_{L^1} \|f\|_B.$$

Sei $f \in B$. Dann ist $\tau \mapsto f_\tau$ stetig als Abbildung $\mathbb{T} \to B$ und nach Lemma 2.2 gilt:

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} k_n(\tau) f_\tau \, d\tau}_{\in B} \longrightarrow f \ (n \to \infty) \text{ bzgl. } \|\cdot\|_B.$$

Wegen $B \subseteq L^1(\mathbb{T})$ ist $f \in L^1(\mathbb{T})$ und $\tau \mapsto f_\tau$ ist stetig als Abbildung $\mathbb{T} \to L^1(\mathbb{T})$. Somit existiert

$$\frac{1}{2\pi} \|\cdot\|_{L^1}\text{-}\int_{\mathbb{T}} k_n(\tau) f_\tau \, d\tau \stackrel{2.4}{=} k_n * f.$$

Wegen $\|\cdot\|_B \geq \|\cdot\|_{L^1}$ gilt $\|\cdot\|_{L^1}\text{-}\int \ldots = \|\cdot\|_B\text{-}\int \ldots$ (betrachte die Konvergenz entsprechender Riemann-Summen). Also gilt $k_n * f \in B$ und $k_n * f \longrightarrow f$ bzgl. $\|\cdot\|_B$. Die Abschätzung ergibt sich folgendermaßen:

$$\|k * f\|_B = \|\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} k(\tau) f_\tau \, d\tau\|_B \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |k(t)| \|f_\tau\|_B \, d\tau = \|k\|_{L^1} \|f\|_B.$$

$\square$

2.16. Weitere Dirac-Folgen: (a) Der *de la Vallée-Poussin-Kern* ($\to$ Übungsaufgabe)

$$V_n(t) := 2F_{2n+1}(t) - F_n(t).$$

(b) Der *Poisson-Kern*: Definiere für $r \in [0, 1)$:

$$P(r, t) := 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos(kt), \quad t \in \mathbb{T}.$$

Hier betrachtet man $r \to 1-$ statt $n \to \infty$. Die Reihe konvergiert absolut in $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{T}$. Es ist $\cos(kt) = \operatorname{Re}(e^{ikt})$. Somit gilt

$$\begin{aligned} P(r,t) &= 1 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} (re^{it})^k \\ &= 1 + 2 \operatorname{Re} \frac{re^{it}}{1 - re^{it}} \\ &= \operatorname{Re} \Big(\frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}} \Big) = \operatorname{Re} \Big(\frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}} \frac{1 - re^{it}}{1 - re^{it}} \Big) \\ &= \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2}, \end{aligned}$$

wie man durch Rechnung bestätigt. Insbesondere ist $P(r,\cdot)$ monoton fallend auf $[0,\pi]$.

zu (D1): Es gilt (wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} P(r,t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} dt + \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 1.$$

zu (D2): Nach obiger Darstellung ist $P(r,t) \geq 0$, da $1-r^2 > 0$ und $1-2r\cos t + r^2 \geq 1-2r+r^2 > 0$. Somit folgt (D2) aus (D1).

zu (D3): Für $\delta \in (0,\pi)$ gilt:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta} P(r,t)\,dt \leq \frac{2(\pi-\delta)}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta+r^2} \longrightarrow \frac{2(\pi-\delta)}{2\pi}\frac{0}{2(1-\cos\delta)} \ (r \to 1-).$$

Nach Theorem 2.14 gilt somit

$$P(r,\cdot) * f \longrightarrow f \ (r \to 1-) \text{ bzgl. } \|\cdot\|_B,$$

falls $f \in B$ und B homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$ ist. Dabei ist

$$P(r,t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} r^k \underbrace{\cos(kt)}_{(e^{ikt}+e^{-ikt})/2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ikt}$$

und wegen der gleichmäßigen Konvergenz folglich

$$(P(r,\cdot) * f)(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}\hat{f}(n)e^{int}, \ t \in \mathbb{T}.$$

Die rechte Seite bezeichnet man als *Abel-Mittel* der Reihe $\sum_n \hat{f}(n)e^{int}$. Die Konvergenzaussage bedeutet dann, dass die Fourierreihe $\sum_n \hat{f}(n)e^{in(\cdot)}$ in B *Abel-summierbar* ist mit Wert f.

Ende 5.Vorl.

— Bonus —

Definition: Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt *Abel-summierbar* mit Wert $s \in \mathbb{R}$, falls für jedes $r \in [0,1)$ das *Abel-Mittel* $A(r) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ konvergiert und $\lim_{r\to 1-} A(r) = s$ gilt.

Dabei gilt: Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ Cesáro-summierbar mit Wert s, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ Abel-summierbar mit Wert s.

Beweis. Setze $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ und $\sigma_n := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k$. Es gelte $\sigma_n \to s$. Für $r \in [0,1)$ ist

$$A(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(s_k - s_{k-1})r^k = (1-r)\sum_{k=0}^{\infty} s_k r^k = (1-r)^2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\sigma_k r^k$$

und $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)r^k = (1-r)^{-2}$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Wir finden $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|\sigma_k - s| < \varepsilon$ für $k \geq n_0$. Dann gilt für $r \in [0,1)$:

$$\begin{aligned} |A(r)-s| &= |(1-r)^2 \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(\sigma_k - s)r^k| \\ &\leq \underbrace{(1-r)^2 \sum_{k=0}^{n_0}(k+1)|\sigma_k - s|r^k}_{\to 0\ (r\to 1-)} + \underbrace{(1-r)^2 \sum_{k>n_0}(k+1)\varepsilon r^k}_{\leq \varepsilon}. \end{aligned}$$

□

— Ende des Bonus —

3 Fourierreihen in $L^2(\mathbb{T})$ und in Dualräumen

3.1. Erinnerung: (a) Der Raum $L^2(\mathbb{T})$ ist gegeben durch

$$L^2(\mathbb{T}) = \{f \in L^1(\mathbb{T}) : \|f\|_{L^2} := \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2\,dt\Big)^{1/2} < \infty\}.$$

Der Raum $L^2(\mathbb{T})$ ist ein Hilbertraum bzgl. des Skalarproduktes

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

Es ist $\|f\|_{L^2} = \sqrt{\langle f, f\rangle}$.
Zwei Funktionen $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ heißen *orthogonal*, geschrieben $f \perp g$, wenn $\langle f, g\rangle = 0$ ist.
(b) Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und $\Lambda \neq 0$. Eine Familie $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ heißt *Orthonormalsystem* (ONS), falls gilt

$$\forall \lambda, \mu \in \Lambda : \langle f_\lambda, f_\mu\rangle = \delta_{\lambda\mu}.$$

Ein ONS $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ heißt *vollständig*, falls für alle $f \in H$ gilt:

$$\Big(\forall \lambda \in \Lambda : \langle f, f_\lambda\rangle = 0\Big) \Longrightarrow f = 0.$$

Ein vollständiges ONS kann also nicht echt vergrößert werden.
(c) Ist $(\varphi_j)_{j=1}^N$ ein ONS und sind $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{C}$, so gilt

$$\|\sum_{j=1}^N a_j\varphi_j\|^2 = \sum_{j=1}^N |a_j|^2$$

(vgl. Lineare Algebra).

(d) Ist $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ein ONS, $f \in H$ und $(a_j) := (\langle f, \varphi_j\rangle)$, so gilt für jedes $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 0 &\le \|f - \sum_{j=1}^{N} a_j\varphi_j\|^2 = \langle f - \sum a_j\varphi_j, f - \sum a_j\varphi_j\rangle \\ &= \|f\|^2 - \sum_j a_j\langle \varphi_j, f\rangle - \sum_j \overline{a_j}\langle f, \varphi_j\rangle + \sum_j |a_j|^2 \\ &= \|f\|^2 - \sum_{j=1}^{N} |a_j|^2. \end{aligned}$$

Also ist

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 \le \|f\|^2 \quad \text{(Besselsche Ungleichung).}$$

(e) **Satz:** Sei $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ein ONS im Hilbertraum H. Dann sind äquivalent:

(i) $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ist vollständig.

(ii) $\forall f \in H$: $f = \sum_{j=1}^{\infty}\langle f, \varphi_j\rangle\varphi_j$.

(iii) $\forall f \in H$: $\|f\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_j\rangle|^2$.

(iv) $\forall f, g \in H$: $\langle f, g\rangle = \sum_{j=1}^{\infty}\langle f, \varphi_j\rangle\overline{\langle g, \varphi_j\rangle}$.

Die Eigenschaften (iii) und (iv) heißen *Parsevalsche* Gleichungen.

(f) **Satz:** Ist $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein vollständiges ONS, so ist die Abbildung

$$H \to l^2(\mathbb{N}),\ f \mapsto (\langle f, \varphi_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$$

eine lineare und isometrische Bijektion.

3.2. Satz: Im Hilbertraum $(L^2(\mathbb{T}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ bilden die Funktionen $(e^{in(\cdot)})_{n\in\mathbb{Z}}$ ein vollständiges ONS.

Beweis. Wegen

$$\langle e^{in(\cdot)}, e^{im(\cdot)}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{int}\overline{e^{imt}}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{i(n-m)t}\,dt = \delta_{nm}$$

ist die Folge ein ONS. Ist $f \in L^2(\mathbb{T})$ mit

$$0 = \langle f, e^{in(\cdot)}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-int}\,dt = \hat{f}(n)$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$, so folgt $f = 0$ fast überall nach Folgerung 2.9 (beachte $f \in L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$). $\square$

3.3. Folgerung: Für alle $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ gilt:

(a) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 \, dt$,

(b) $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)\overline{g(t)} \, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}$,

(c) $f = \| \cdot \|_{L^2} - \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{in(\cdot)}}_{=S_N(f)}$.

(d) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$, so gibt es genau ein $h \in L^2(\mathbb{T})$ mit $\hat{h}(n) = a_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, nämlich

$$f = \| \cdot \|_{L^2} - \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{in(\cdot)}.$$

Bemerkung: Folgerung 3.3(c) besagt, dass Fourierreihen sich in $L^2(\mathbb{T})$ besser verhalten, als wir dies nach Satz 2.8 wissen.

Frage: Wie ist das für homogene Banachräume $B \neq L^2(\mathbb{T})$?

3.4. Satz: Sei B ein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$. Dann sind äquivalent:

(i) Für alle $f \in B$ gilt $\|S_n(f) - f\|_B \to 0$ $(n \to \infty)$.

(ii) Es gibt ein $C > 0$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $f \in B$ gilt: $\|S_n(f)\|_B \leq C\|f\|_B$.

Eigenschaft (ii) ist gleichbedeutend mit $\sup_n \|S_n\|_{B\to B} < \infty$.

Beweis. Nach Folgerung 2.15(a) ist $\mathbb{P}_B$ dicht in B. Für $p \in \mathbb{P}_B$ gilt $S_n(p) = p$, wenn $n \geq \operatorname{Grad} p$. Die Aussage gilt somit nach Banach-Steinhaus ($\to$ Funktionalanalysis). □

Bemerkung: In der Situation von Satz 3.4 ist nach Theorem 2.14:

$$\|S_n(f)\|_B = \|D_n * f\|_B \leq \|D_n\|_{L^1} \|f\|_B,$$

also $\|S_n\|_{B\to B} \leq \|D_n\|_{L^1}$.

3.5. Beispiele: (a) Es ist $\|S_n\|_{L^2\to L^2} = 1$ (nach 3.3(a) und 3.1(d)).

(b) $B = L^1(\mathbb{T})$: Für den Fejér-Kern gilt $\|F_N\|_{L^1} = 1$ für jedes $N \in \mathbb{N}$. Für festes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\|S_n(F_N)\|_{L^1} = \|D_n * F_N\|_{L^1} = \|F_N * D_n\|_{L^1} \to \|D_n\|_{L^1} \ (N \to \infty).$$

Somit ist $\|S_n\|_{L^1\to L^1} = \|D_n\|_{L^1} \to \infty$ $(n \to \infty)$ nach Lemma 2.6.

(c) $B = C(\mathbb{T})$: Sei $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Sei $\psi_n \in C(\mathbb{T})$ mit $\|\psi_n\|_\infty = 1$ und $\psi_n(-t) = \operatorname{sgn}(D_n(t))$ für $t \in \mathbb{T} \setminus M$, wobei $\frac{1}{2\pi}\int_M |D_n(t)|\,dt < \varepsilon/2$ (M ist eine "kleine" Obermenge der Sprungstellen von $\operatorname{sgn} D_n$). Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|S_n(\psi_n)\|_\infty &\geq |S_n(\psi_n, 0)| = \frac{1}{2\pi}\Big|\int_{\mathbb{T}} D_n(t)\psi_n(-t)\,dt\Big| \\
&\geq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}\setminus M} |D_n(t)|\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_M |D_n(t)|\,dt \\
&\geq \|D_n\|_{L^1} - 2\cdot\frac{1}{2\pi}\int_M |D_n(t)|\,dt \geq \|D_n\|_{L^1} - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Somit ist auch hier $\|S_n\|_{C(\mathbb{T})\to C(\mathbb{T})} = \|D_n\|_{L^1} \to \infty$ $(n \to \infty)$.

Fazit: Es gibt $f \in L^1(\mathbb{T})$ und $g \in C(\mathbb{T})$ mit

$$S_n(f) \not\to f \text{ bzgl. } \|\cdot\|_{L^1}, \quad S_n(g) \not\to g \text{ bzgl. } \|\cdot\|_\infty.$$

Fourierreihen linearer Funktionale

3.6. Definition: Sei B ein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$ mit $e^{in(\cdot)} \in B$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Sei

$$B' := \{\mu : B \to \mathbb{C} : \ \mu \text{ ist stetig}\}$$

der *Dualraum von B* mit Norm

$$\|\mu\|_{B'} := \sup_{\|f\|_B \leq 1} |\mu(f)|.$$

Für $\mu \in B'$ und $n \in \mathbb{Z}$ heißt

$$\hat{\mu}(n) := \mu(e^{-in(\cdot)})$$

der *n-te Fourierkoeffizient von μ* und

$$S[\mu] \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\mu}(n) e^{in(\cdot)} \quad \text{(formal!)}$$

die *Fourierreihe von μ*.

3.7. Bemerkung: Sei B ein homogener Banachraum mit $\overline{f} \in B$ und $\|\overline{f}\|_B = \|f\|_B$ für alle $f \in B$. Setze $B^* := B'$. Für $f \in B$, $\mu \in B^*$ schreiben wir

$$\langle f, \mu\rangle := \overline{\mu(\overline{f})}, \quad \langle \mu, f\rangle := \overline{\langle f, \mu\rangle} = \mu(\overline{f})$$

in Analogie zum L^2-Skalarprodukt: Für $B = L^2(\mathbb{T})$ ist

$$L^2(\mathbb{T}) \to B^*, \quad g \mapsto \langle \cdot, g\rangle_{L^2}$$

eine bijektive Isometrie, die aber nicht linear, sondern antilinear ist.

Beachte: Mit obiger Definition ist für $f \in B$, $\mu, \nu \in B^*$ und $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$\langle f, \alpha\mu + \nu \rangle = \overline{\alpha}\langle f, \mu \rangle + \langle f, \nu \rangle$$

wie bei $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$.

Beachte weiter, dass nach Voraussetzung an B gilt

$$\|\mu\|_{B'} = \sup_{\|f\|_B \le 1} |\mu(f)| = \sup_{\|f\|_B \le 1} |\overline{\mu(\overline{f})}| = \sup_{\|f\|_B \le 1} |\langle \mu, f \rangle| =: \|\mu\|_{B^*}.$$

Somit ist auch

$$\hat{\mu}(n) = \mu(\overline{e^{-in(\cdot)}}) = \langle \mu, e^{in(\cdot)} \rangle$$

und

$$|\hat{\mu}(n)| \le \|\mu\|_{B^*} \|e^{in(\cdot)}\|_B$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $\mu \in B^*$.

Ende 6.Vorl.

3.8. Satz: Sei B ein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$ mit $e^{in(\cdot)} \in B$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ so, dass für alle $f \in B$ gilt $\overline{f} \in B$ und $\|\overline{f}\|_B = \|f\|_B$. Für $f \in B$, $\mu \in B^*$ gilt

$$\langle f, \mu \rangle = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \Big(1 - \frac{k}{N+1}\Big) \hat{f}(n)\overline{\hat{\mu}(n)},$$

dh die Cesáro-Mittel von $\sum_n \hat{f}(n)\overline{\hat{\mu}(n)}$ konvergieren gegen $\langle f, \mu \rangle$, vgl. Parseval. Im Sinne der Funktionalanalysis bedeutet die Aussage, dass die Cesáro-Mittel der Fourierreihe schwach*-konvergent gegen μ sind. Beachte dazu, dass

$$\langle f, \sum_{n=-N}^{N} \hat{\mu}(n) e^{in(\cdot)} \rangle = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)\overline{\hat{\mu}(n)}$$

gilt.

Beweis. Ist $p(t) = \sum_{|k|\le l} \hat{p}(k) e^{ik(\cdot)}$ ein trigonometrisches Polynom, so folgt

$$\langle p, \mu \rangle = \sum_{|k|\le l} \hat{p}(k) \langle e^{ik(\cdot)}, \mu \rangle = \sum_{|k|\le l} \hat{p}(k)\overline{\hat{\mu}(k)}.$$

Ist $f \in B$, so gilt nach Theorem 2.14 $\sigma_N(f) \to f$ bzgl. $\|\cdot\|_B$. Da μ stetig ist, folgt

$$\langle f, \mu \rangle = \lim_{N\to\infty} \langle \sigma_N(f), \mu \rangle = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \widehat{\sigma_N(f)}(n)\overline{\hat{\mu}(n)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \Big(1 - \frac{|n|}{N+1}\Big) \hat{f}(n)\overline{\hat{\mu}(n)}.$$

□

3.9. Folgerung: In der Situation von Satz 3.8 gilt: Ist $\mu \in B^*$ mit $\hat{\mu}(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, so ist $\mu = 0$.

Beweis. Nach Satz 3.8 ist nämlich $\langle f, \mu \rangle = 0$ für alle $f \in B$. □

3.10. Bemerkung: Für $T : B \to B$ ist $T' : B' \to B'$ definiert durch $(T'\phi)(f) = \phi(Tf)$ für alle $\phi \in B'$, $f \in B$, also durch $T'\phi = \phi \circ T$. Wir definieren $T^* : B^* \to B^*$ durch $\langle f, T^*\phi \rangle = \langle Tf, \phi \rangle$ für alle $\phi \in B^*$, $f \in B$.

Es ist somit $T^*\phi(\overline{f}) = \phi(\overline{Tf})$, dh $T^*\phi = \phi \circ q \circ T \circ q$, wobei $q : B \to B$, $f \mapsto \overline{f}$.

Beispiel: Für $T = i \operatorname{Id}_B$ ist $T' = i \operatorname{Id}_{B'}$ und $T^* = -i \operatorname{Id}_{B'}$.

Beispiel: Wie oben gesehen, gilt

$$\langle S_n(f), \mu \rangle = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\overline{\hat{\mu}(k)} = \langle f, \sum_{k=-n}^{n} \hat{\mu}(k) e^{ik(\cdot)} \rangle,$$

also ist

$$S_n^*(\mu) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{\mu}(k) e^{ik(\cdot)} =: S_n(\mu).$$

Dabei gilt

$$\|S_n\|_{B* \to B^*} = \|S_n^*\|_{B^* \to B^*} = \|S_n\|_{B \to B}.$$

3.11. Beispiel: $B = (C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$. Wir setzen $B^* =: M(\mathbb{T})$.

$M(\mathbb{T})$ ist der Raum der endlichen Borel-Maße auf $\mathbb{T}$, dann

$$\langle f, \mu \rangle = \int_{\mathbb{T}} f \, d\overline{\mu}.$$

Alternativ kann man die Elemente von $M(\mathbb{T})$ durch Stieltjes-Integrale beschreiben

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{T}} f \, d\overline{g},$$

wobei $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ von endlicher Variation auf $\mathbb{T}$ ist und

$$\int_{\mathbb{T}} f \, d\overline{g} = \lim \sum_j f(\xi_j)(\overline{g}(t_j) - \overline{g}(t_{j-1})),$$

ähnlich wie beim Riemann-Integral.

Die Abbildung

$$I : L^1(\mathbb{T}) \to M(\mathbb{T}), \quad h \mapsto I_h : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}, \; f \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) h(t) \, dt$$

ist linear und stetig, und es gilt $\|I_h\|_{M(\mathbb{T})} = \|h\|_{L^1(\mathbb{T})}$ [$\leq$ ist klar, $=$ zeige man zunächst für stetige h, die dicht in $L^1(\mathbb{T})$ liegen]. I ist aber nicht surjektiv:

$$\delta_0 : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto f(0),$$

gehört zu $M(\mathbb{T})$, aber nicht zu $I(L^1(\mathbb{T}))$. Es ist nämlich

$$\langle f, \delta_0 \rangle = \overline{\delta_0(\overline{f})} = f(0),$$

und $\hat{\delta_0}(n) = \delta_0(e^{-in(\cdot)}) = 1$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Für alle $h \in L^1(\mathbb{T})$ gilt aber $\hat{h}(n) \to 0$ $(|n| \to \infty)$ und

$$\widehat{I_h}(n) = I_h(e^{-in(\cdot)}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{-int} h(t)\, dt = \hat{h}(n).$$

Definition: Wir nennen $\mu \in M(\mathbb{T})$ *positiv*, falls $\mu(f) \geq 0$ für alle $f \in C(\mathbb{T})$ mit $f \geq 0$ gilt.

Bemerkung: Falls $\mu = I_h$ mit $h \in L^1(\mathbb{T})$ ist, so gilt $\mu \geq 0$ genau dann, wenn $h \geq 0$ fast überall.

3.12. Lemma: Sei $a := (a_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ eine komplexe Folge. Dann sind äquivalent:

(i) Es gibt $\mu \in M(\mathbb{T})$ mit $\mu \geq 0$ und $\hat{\mu}(n) = a_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sigma_n(a) := \sum_{k=-n}^{n} \Big(1 - \frac{|k|}{n+1}\Big) a_k e^{ikt} \geq 0, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $\mu \in M(\mathbb{T})$ mit $\mu \geq 0$ und $\hat{\mu}(n) = a_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Sei $f \in C(\mathbb{T})$ mit $f \geq 0$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \overline{\sum_{k=-n}^{n} \Big(1 - \frac{|k|}{n+1}\Big) a_k e^{ikt}}\, dt = \sum_{k=-n}^{n} \Big(1 - \frac{|k|}{n+1}\Big) \hat{f}(k) \overline{\hat{\mu}(k)} = \langle \sigma_n(f), \mu \rangle = \langle F_n * f, \mu \rangle \geq 0,$$

da $F_n \geq 0$, $f \geq 0$, $\mu \geq 0$. Da f beliebig war, folgt $\sigma_n(a) \geq 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Es gelte $\sigma_n(a) \geq 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$\|\sigma_n(a)\|_{M(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \sigma_n(a)(t)\, dt = a_0$$

für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Für ein trigonometrisches Polynom $p = \sum_{|k| \leq l} \hat{p}(k) e^{ik(\cdot)}$ und $n \geq l$ gilt:

$$\langle p, \sigma_n(a) \rangle = \sum_{|k| \leq l} \Big(1 - \frac{|k|}{n+1}\Big) \hat{p}(k) \overline{a_k} \to \sum_{|k| \leq l} \hat{p}(k) \overline{a_k} \ (n \to \infty).$$

Nach Banach-Steinhaus existiert ein $\mu \in M(\mathbb{T})$ mit $\langle f, \sigma_n(a)\rangle \to \langle f, \mu\rangle$ für alle $f \in C(\mathbb{T})$. Insbesondere folgt $\mu \geq 0$ wegen $\sigma_n(a) \geq 0$ und

$$\hat{\mu}(k) = \langle \mu, e^{ik(\cdot)}\rangle = \lim_{n\to\infty} \widehat{\sigma_n(a)}(k) = a_k$$

für jedes $k \in \mathbb{Z}$. □

Das folgende Theorem erlaubt, die Eigenschaft $\mu \geq 0$ an den Fourierkoeffizienten von $\mu \in M(\mathbb{T})$ abzulesen.

3.13. Theorem (Herglotz): Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine komplexe Folge. Dann sind äquivalent:

(i) Es gibt $\mu \in M(\mathbb{T})$ mit $\mu \geq 0$ und $\hat{\mu}(n) = a_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) Die Folge (a_n) ist *positiv definit*, dh für alle $N \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}^{2N+1}$ gilt

$$\sum_{|n|,|m|\leq N} a_{n-m} z_n \overline{z_m} \geq 0.$$

Ende 7.Vorl.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Es gelte (i). Dann ist

$$\begin{aligned}\sum_{|n|,|m|\leq N} a_{n-m} z_n \overline{z_m} &= \sum_{n,m} \mu(e^{-in(\cdot)} e^{im(\cdot)} z_n \overline{z_m}) \\ &= \mu\underbrace{\Big(\Big| \sum_{|n|\leq N} e^{-in(\cdot)} z_n \Big|^2 \Big)}_{\geq 0} \geq 0.\end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei (a_n) positiv definit und $N \in \mathbb{N}_0$, $t \in \mathbb{T}$. Wähle $z_n = \begin{cases} e^{int} & , |n| \leq N \\ 0 & , |n| > N \end{cases}$. Dann gilt:

$$0 \leq \sum_{|n|,|m|\leq N} a_{n-m} z_n \overline{z_m} = \sum_{|j|\leq 2N} c_{j,N} e^{ijt},$$

wobei

$$c_{j,N} = |\{(n,m) : |n|, |m| \leq N, n-m = j\}| = 2N + 1 - |j|.$$

Somit ist

$$(\sigma_{2N}(a))(t) = \frac{1}{2N+1} \sum_{|j|\leq 2N} c_{j,N} a_j e^{ijt} \geq 0$$

für alle $t \in \mathbb{T}$ und $N \in \mathbb{N}_0$. Die Behauptung folgt aus Lemma 3.12. □

Im folgenden erklären wir die Faltung von $\mu \in M(\mathbb{T})$ und $g \in C(\mathbb{T})$.

3.14. Definition und Bemerkung: Für $g \in C(\mathbb{T})$ sei durch $\sigma g(t) := g(-t)$ die *Spiegelung* σg von g erklärt. Für $\mu \in M(\mathbb{T})$ und $g \in C(\mathbb{T})$ sei $\mu * g$ definiert durch

$$\mu * g(\tau) := \mu((\sigma g)_\tau) = \mu(t \mapsto g(\tau - t)).$$

Es gilt $\mu * g \in C(\mathbb{T})$, da $\tau \mapsto (\sigma g)_\tau$ als Abbildung $\mathbb{T} \to C(\mathbb{T})$ stetig ist. Außerdem ist $(\mu, g) \mapsto \mu * g$ bilinear und

$$\|\mu * g\|_\infty \leq \|\mu\|_{M(\mathbb{T})} \sup_{\tau \in \mathbb{T}} \|(\sigma g)_\tau\|_\infty = \|\mu\|_{M(\mathbb{T})} \|g\|_\infty.$$

Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\begin{aligned}
\widehat{g * \mu}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \mu((\sigma g)_\tau) e^{-in\tau}\, d\tau \\
&= \mu(t \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{-in\tau} g(\tau - t)\, d\tau) \\
&= \mu(t \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{-int} e^{-in\rho} g(\rho)\, d\rho) \\
&= \mu(e^{-in(\cdot)}) \hat{g}(n) = \hat{\mu}(n) \hat{g}(n).
\end{aligned}$$

Wir haben so eine Fortsetzung der Faltung

$$L^1(\mathbb{T}) \times C(\mathbb{T}) \to C(\mathbb{T}), \quad (f, g) \mapsto f * g(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f g(\tau - \cdot)\, d\tau$$

zu einer Abbildung $* : M(\mathbb{T}) \times C(\mathbb{T}) \to C(\mathbb{T})$ erklärt (vergleiche die Einbettung $I : L^1(\mathbb{T}) \to M(\mathbb{T})$ aus Beispiel 3.11).

Mit etwas Maßtheorie kann man die Faltung $* : M(\mathbb{T}) \times B \to B$ für jeden homogenen Banachraum B erklären: Wir verweisen auf die Bemerkung am Ende von Abschnitt 4.

4 Translationsinvariante Operatoren auf $\mathbb{T}$

4.1. Definition: Sei B ein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$. Ein stetiger linearer Operator $T : B \to B$ heißt *translationsinvariant*, wenn für alle $\tau \in \mathbb{T}$ und $f \in B$ gilt

$$T(f_\tau) = (Tf)_\tau \; [= (Tf)(\cdot - \tau)].$$

4.2. Lemma: Sei B ein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$ mit $e^{in(\cdot)} \in B$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $T : B \to B$ translationsinvariant. Dann gibt es genau eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ mit

$$\forall n \in \mathbb{Z}\, \forall f \in B : \widehat{Tf}(n) = a_n \hat{f}(n).$$

Beweis. Zunächst gilt für jedes $n \in \mathbb{Z}$ und $\tau \in \mathbb{T}$:

$$e^{-in\tau}T(e^{in(\cdot)}) = T(e^{in(\cdot-\tau)}) = T(e^{in(\cdot)})(\cdot - \tau).$$

Wir werden diese Funktion an der Stelle τ betrachten und setzen $a_n := T(e^{in(\cdot)})(0)$, $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt für alle $k, n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
\widehat{T(e^{ik(\cdot)})}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} T(e^{ik(\cdot)})(t)e^{-int}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \underbrace{T(e^{ik(\cdot)})(t)e^{-ikt}}_{=T(e^{ik(\cdot)})=a_k} e^{-i(n-k)t}\,dt \\
&= a_k\delta_{kn}.
\end{aligned}$$

Für jedes trigonometrische Polynom ist somit

$$\widehat{T(p)}(n) = \sum_k \hat{p}(k)\widehat{T(e^{ik(\cdot)})}(n) = a_n\hat{p}(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Beliebige $f \in B$ approximiere man durch trigonometrische Polynome. $\square$

In der Situation von Lemma 4.2 haben wir

$$T(e^{in(\cdot)}) = a_n e^{in(\cdot)}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Man kann auch umgekehrt vorgehen und zu einer gegebenen Folge $m := (m(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ einen Operator T so zu finden versuchen, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
f & \xrightarrow{T} & Tf \\
\mathscr{F}\downarrow & & \downarrow\mathscr{F} \\
(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} & \xrightarrow{m} & (m(n)\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}
\end{array}$$

kommutiert. Ein solcher Operator heißt *Fouriermultiplikationsoperator*. Wir schreiben dann $T = T_m$.

4.3. Definition: Sei B ein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$. Eine Folge $m = (m(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ heißt *Fouriermultiplikator* für B, falls es einen stetigen linearen Operator $T : B \to B$ gibt mit $T = T_m$.

Bemerkung: Ist m ein Fouriermultiplikator, so ist $T(e^{in(\cdot)}) = m(n)e^{in(\cdot)}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, und T ist dadurch eindeutig bestimmt.

Ist m beliebig, so gilt für jedes trigonometrische Polynom p:

$$T_m(p) = \sum_n m(n)\hat{p}(n)e^{in(\cdot)}.$$

Für die Stetigkeit reicht es, ein $C > 0$ zu finden mit

$$\|T_m(p)\|_B \leq C\|p\|_B, \quad p \in \mathbb{P}_B.$$

Wir zeigen kurz noch, dass T_m auf den trigonometrischen Polynomen translationsinvariant ist:

$$T_m(p_\tau) = \sum_n m(n)\widehat{p_\tau}(n)e^{in(\cdot)} = \sum_n m(n)\hat{p}(n)\underbrace{e^{-in\tau}e^{in(\cdot)}}_{=e^{in(\cdot-\tau)}} = (T_m(p))(\cdot - \tau).$$

4.4. Beispiel: Eine Folge m ist genau dann ein Fouriermultiplikator für $L^2(\mathbb{T})$, falls $m \in L^\infty(\mathbb{Z})$ gilt. Das liegt daran, dass $f \mapsto (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ eine bijektive Isometrie $L^2(\mathbb{T}) \to l^2(\mathbb{Z})$ ist und beschränkte Multiplikationsoperatoren $l^2(\mathbb{Z}) \to l^2(\mathbb{Z})$ genau durch beschränkte Folgen induziert werden. Wir haben also das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{T}) & \to & L^2(\mathbb{T}) \\ \mathscr{F}\downarrow & & \downarrow\mathscr{F} \\ l^2(\mathbb{Z}) & \stackrel{m}{\to} & l^2(\mathbb{Z}). \end{array}$$

4.5. Theorem: Sei B ein homogener Banachraum auf $\mathbb{T}$. Für jedes $\mu \in M(\mathbb{T})$ ist $m := \hat{\mu} := (\hat{\mu}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ ein Fouriermultiplikator für B und $\|T_m\|_{B\to B} \leq \|\mu\|_{M(\mathbb{T})}$.

Wir erinnern daran, dass für $\mu \in M(\mathbb{T})$ die Folge $\hat{\mu}$ wegen

$$|\hat{\mu}(n)| = |\mu(e^{-in(\cdot)})| \leq \|\mu\|_{M(\mathbb{T})}\|e^{-in(\cdot)}\|_\infty = \|\mu\|_{M(\mathbb{T})}$$

zu $l^\infty(\mathbb{Z})$ gehört.

Beweis. (i) Ist $\mu = \frac{1}{2\pi}\int_\mathbb{T} \cdot g(t)\,dt$ mit $g \in C(\mathbb{T})$, so gilt nach Lemma 1.8(b) und nach der Bemerkung hinter 4.3, dass

$$T_m p = g * p, \quad p \in \mathbb{P}_B.$$

(ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$g_n := \sigma_n(\mu) = \sum_{|k|\leq n}\Big(1 - \frac{|k|}{n+1}\Big)\hat{\mu}(k)e^{ik(\cdot)}.$$

Dann gilt für $p \in \mathbb{P}_B$: Ende 8.Vorl.

$$g_n * p = \sum_{|k|\leq n}\Big(1 - \frac{|k|}{n+1}\Big)\hat{\mu}(k)\hat{p}(k)e^{ik(\cdot)} \to T_m p \ (n \to \infty).$$

Dabei ist

$$\|g_n * p\|_B \leq \|g_n\|_{L^1}\|p\|_B = \|\sigma_n(\mu)\|_{M(\mathbb{T})}\|p\|_B \leq \|\mu\|_{M(\mathbb{T})}\|p\|_B,$$

denn für $h \in C(\mathbb{T})$ gilt nach Bemerkung 3.10:

$$|\langle\sigma_n(\mu), h\rangle| = |\langle\frac{1}{n+1}(S_0 + \ldots + S_n)(\mu), h\rangle| = |\langle\mu, \sigma_n(h)\rangle| \leq \|\mu\|_{M(\mathbb{T})}\|\sigma_n(h)\|_\infty$$

und
$$\|\sigma_n(h)\|_\infty = \|F_n * h\|_\infty \le \underbrace{\|F_n\|_{L^1}}_{=1} \|h\|_\infty,$$
und folglich $\|\sigma_n(\mu)\|_{M(\mathbb{T})} \le \|\mu\|_{M(\mathbb{T})}$.

(iii) Für $p \in \mathbb{P}_B$ gilt nach (ii):
$$\|T_m p\|_B = \lim_{n\to\infty} \|g_n * p\|_B \le \|\mu\|_{M(\mathbb{T})}\|p\|_B,$$
und die Behauptung folgt aus der Bemerkung nach 4.3. □

4.6. Beispiele: (a) Eine Folge m ist Fouriermultiplikator für $B = C(\mathbb{T})$ genau dann, wenn es $\mu \in M(\mathbb{T})$ gibt mit $m = \hat{\mu}$.

Beweis. Eine Richtung ist Theorem 4.5. Die Idee zum Beweis der anderen Richtung ist
$$(T_m g)(t) = \mu * g(t) = \mu(g(t - \cdot)), \quad t \in \mathbb{T},$$
wir erinnern an 3.14. Setze also $\mu(g) := (T_m(\sigma g))(0)$. Dann gilt $\mu \in C(\mathbb{T})' = M(\mathbb{T})$, da $T_m, \sigma : C(\mathbb{T}) \to C(\mathbb{T})$ und $\delta_0 : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ linear und stetig sind.

(i) $T_m g = \mu * g$: Für $g \in C(\mathbb{T})$ und $t \in \mathbb{T}$ gilt nach Definition von μ und wegen der Translationsinvarianz von T:
$$\mu * g(t) = \mu(g(t - \cdot)) = T_m(g(t + \cdot))(0) = T_m(g_{-t})(0) = (T_m g)_{-t}(0) = (T_m g)(t).$$
(ii) Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ und jedes $g \in C(\mathbb{T})$ gilt wegen (i):
$$m(n)\hat{g}(n) = \widehat{T_m(g)}(n) = \widehat{\mu * g}(n) = \hat{\mu}(n)\hat{g}(n),$$
also $m = \hat{\mu}$. □

(b) Eine Folge m ist Fouriermultiplikator für $B = L^1(\mathbb{T})$ genau dann, wenn es $\mu \in M(\mathbb{T})$ gibt mit $m = \hat{\mu}$.

Beweis. Eine Richtung ist Theorem 4.5. Die Idee für die andere Richtung ist ebenfalls $T_m = \mu * f$, aber wir approximieren μ durch $\mu_n = \sigma_n(\mu) = \mu * F_n = T_m(F_n)$ und setzen also
$$\mu_n := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \cdot\, T_m(F_n)(t)\,dt.$$
Dann gilt
$$\|\mu_n\|_{M(\mathbb{T})} = \|T_m(F_n)\|_{L^1} \le \|T_m\|\|F_n\|_{L^1} = \|T_m\|,$$
und für jedes trigonometrische Polynom p gilt
$$\langle p, \mu_n\rangle = \sum_{|k|\le n} \hat{p}(k)\overline{\widehat{\mu_n}(k)} = \sum_{|k|\le n} \hat{p}(k)\Big(1 - \frac{|k|}{n+1}\Big)\overline{m(k)} \to \sum_k \hat{p}(k)\overline{m(k)} \ (n\to\infty),$$

denn
$$\widehat{\mu_n}(k) = \widehat{T_m(F_n)}(k) = \sum_{|l|\le n} \Big(1 - \frac{|l|}{n+1}\Big) \underbrace{\widehat{T(e^{il(\cdot)})}(k)}_{=m(l)\delta_{lk}} = \Big(1 - \frac{|k|}{n+1}\Big) m(k).$$
Nach Banach-Steinhaus konvergiert (μ_n) gegen ein $\mu \in M(\mathbb{T}) = C(\mathbb{T})'$ mit $\|\mu\| \le \|T_m\|$. Es gilt für jedes $k \in \mathbb{Z}$:
$$\hat{\mu}(k) = \mu(e^{-ik(\cdot)}) = \lim_n \mu_n(e^{-ik(\cdot)}) = \lim_n \widehat{\mu_n}(k) = m(k).$$
□

Bemerkung: Mit etwas Maßtheorie kann man die Faltung $* : M(\mathbb{T}) \times B \to B$ für jeden homogenen Banachraum B erklären: Für jedes $f \in B$ ist nämlich $\tau \mapsto f_\tau$ von $\mathbb{T}$ nach B stetig, und für $\mu \in M(\mathbb{T})$ existiert
$$\mu * f := \int_{\mathbb{T}} f_\tau \, d\mu(\tau) \in B.$$
Die so definierte Abbildung $* : m(\mathbb{T}) \times B \to B$ ist bilinear und es gilt die Abschätzung
$$\|\mu * f\|_B = \| \int_{\mathbb{T}} f_\tau \, d\mu \|_B \le \int_{\mathbb{T}} \|f_\tau\|_B d|\mu| = \|f\|_B \|\mu\|_{M(\mathbb{T})},$$
wobei $|\mu|$ die Variation von μ ist. Da $g \mapsto \hat{g}(n)$ von B nach $\mathbb{C}$ linear und stetig ist, gilt außerdem
$$\widehat{\mu * f}(n) = \int_{\mathbb{T}} \widehat{f_\tau}(n) \, d\mu = \int_{\mathbb{T}} e^{-in\tau} \, d\mu \cdot \hat{f}(n) = \hat{\mu}(n) \hat{f}(n)$$
für jedes $n \in \mathbb{Z}$. Beachte, dass auch diese Faltung mittels der Einbettung $I : L^1(\mathbb{T}) \to M(\mathbb{T})$ eine Fortsetzung der Faltung $* : L^1(\mathbb{T}) \times B \to B$ ist.

Im Beweis von Theorem 4.5 und in Beispiel 4.6(b) ist $\mu * f$ als $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(\mu) * f$ zu verstehen. Man könnte dies auch als Definition verwenden.

Schlussbemerkung zur Konvergenz von Fourierreihen: In $L^p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$, gilt
$$S_n(f) \overset{\|\cdot\|_p}{\to} f \ (n \to \infty) \quad \text{für jedes } f \in L^p(\mathbb{T}).$$
Der Beweis gliedert sich im zwei Teile, deren erster eine Übungsaufgabe ist. Der zweite Teil folgt später.

5 Fouriertransformation auf dem $\mathbb{R}^n$

Wie auch $(\mathbb{T}, +)$ ist $(\mathbb{R}^n, +)$ eine abelsche Gruppe, $\mathbb{R}^n$ ist zwar nicht kompakt, aber lokalkompakt, und das Lebesguemaß ist translationsinvariant. Wir verwenden die Notation
$$L^p(\mathbb{R}^n) := \{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ messbar} : \|f\|_p := \Big(\int |f(x)|^p \, dx \Big)^{1/p} < \infty \}$$
für $1 \le p < \infty$.

5.1. Definition: Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ sei

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)\, dx,$$

wobei $x\xi = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \ldots + x_n\xi_n$ das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ ist. Die Abbildung $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt *Fouriertransformierte von* f.

5.2. Lemma: (a) Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist $\hat{f}$ beschränkt und gleichmäßig stetig mit

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

Die Abbildung $f \to \hat{f}$ ist linear und stetig $L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(b) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $y \in \mathbb{R}^n$. Für $\tau_y f := f(\cdot - y)$ gilt $\widehat{\tau_y f}(\xi) = e^{-iy\xi}\hat{f}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

(c) Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\lambda > 0$ gilt $\int \hat{f}(\xi) g(\lambda\xi)\, d\xi = \int f(\lambda x)\hat{g}(x)\, dx$.

Beweis. (a) Die Abschätzung ist klar. Für $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi + \eta)| &\leq \int |e^{-ix\xi} - e^{-ix(\xi+\eta)}|\, |f(x)|\, dx \\ &= \int |1 - e^{-ix\eta}|\, |f(x)|\, dx \text{ unabh. von } \xi \end{aligned}$$

Wegen $1 - e^{ix\eta} \to 0$ $(\eta \to 0)$ für festes $x \in \mathbb{R}^n$ und $|1 - e^{-ix\eta}| \leq 2$ konvergiert das Integral gegen Null für $\eta \to 0$ nach dem Satz über majorisierte Konvergenz. Somit ist $\hat{f}$ gleichmäßig stetig.

(b) Es gilt mittels Substitution $x = u + y$

$$\int e^{-ix\xi} f(x - y)\, dx = e^{-iy\xi} \int e^{-iu\xi} f(u)\, du = e^{-iy\xi}\hat{f}(\xi).$$

(c) Mittels der Substitutionen $x = \lambda y$ und $\xi = \lambda\eta$ gilt unter Verwendung von Fubini

$$\int\int e^{-ix\xi} f(x) g(\lambda\xi)\, dx\, d\xi = \int f(\lambda y) \underbrace{\int e^{-iy\eta} g(\eta)\, d\eta}_{=\hat{g}(y)}\, dy.$$

□

5.3. Beispiel: Sei $n = 1$ und $h = 1_{[a,b]}$. Dann gilt $\hat{h}(0) = b - a$ und für $\xi \neq 0$:

$$\hat{h}(\xi) = \int_a^b e^{-ix\xi}\, dx = \frac{e^{-ib\xi} - e^{-ia\xi}}{-i\xi}.$$

Somit ist $\hat{h}(\xi) \to 0$ $(|\xi| \to \infty)$, aber $\hat{h} \notin L^1(\mathbb{R})$!

Für $n > 1$ und $h(x) = 1_{\prod_{j=1}^n [a_j,b_j]}(x) = \prod_{j=1}^n 1_{[a_j,b_j]}(x_j)$ ist

$$\hat{h}(\xi) = \prod_{j=1}^n \widehat{1_{[a_j,b_j]}}(\xi_j), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Somit gilt auch hier $\hat{h}(\xi) \to 0$ für $|\xi| \to \infty$.

5.4. Riemann-Lebesgue-Lemma: Für jedes $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt $\hat{f}(\xi) \to 0$ für $|\xi| \to \infty$.

Beweis. Der Raum

$$C_0(\mathbb{R}^n) := \{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ stetig} : f(x) \to 0 \ (|x| \to \infty) \}$$

ist bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ ein abgeschlossener Teilraum des Banachraumes

$$BUC(\mathbb{R}^n) := \{ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : \ g \text{ ist beschränkt und gleichmäßig stetig} \}.$$

Nach Beispiel 5.3 gilt $\hat{h} \in C_0(\mathbb{R}^n)$ für Funktionen h der Form $h = \sum_k c_k 1_{Q_k}$, wobei die Q_k achsenparallele Quader sind. Die Menge dieser Treppenfunktionen liegt dicht in $L^1(\mathbb{R}^n)$. □

Ende 9.Vorl.

5.5. Rechenregeln: Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

(a) Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist $\mathscr{F}(F(a\cdot))(\xi) = \frac{1}{|a|^n} \hat{f}(\frac{\xi}{a})$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

(b) Für $b \in \mathbb{R}^n$ gilt $\mathscr{F}(e^{ib(\cdot)} f)(\xi) = \hat{f}(\xi - b)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

(c) Ist zusätzlich $x \mapsto x_j f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so ist $\hat{f}$ stetig partiell nach ξ_j differenzierbar und

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \hat{f}(\xi) = \mathscr{F}(x \mapsto (-ix_j) f(x))(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis. (a) zeigt man ähnlich wie 5.2(c). Zum Beweis von (b) schreibt man

$$\int \underbrace{e^{-i\xi x} e^{ibx}}_{=e^{-i(\xi-b)x}} f(x)\, dx = \hat{f}(\xi - b).$$

zu (c): Für $\xi \in \mathbb{R}^n$, $j \in \{1, \dots, n\}$ und $h \neq 0$ gilt

$$\frac{\hat{f}(\xi + he_j) - \hat{f}(\xi)}{h} - \mathscr{F}(x \mapsto (-ix_j) f(x))(\xi) = \int \Big(\frac{e^{-i(\xi + he_j)x} - e^{-i\xi x}}{h} + ix_j e^{-i\xi x} \Big) f(x)\, dx.$$

Der Term in Klammern geht gegen 0 ($h \to 0$) für festes $x \in \mathbb{R}^n$ und ist gleich

$$e^{-i\xi x} \Big(\frac{e^{-ihx_j} - 1}{h} + ix_j \Big) = e^{-i\xi x} \Big(\frac{1}{h} \int_0^h (-ix_j) e^{-itx_j}\, dt + ix_j \Big) = e^{-i\xi x} ix_j \Big(1 - \frac{1}{h} \int_0^h e^{-itx_j}\, dt \Big).$$

Der letzte Term in Klammern ist betragsmäßig ≤ 2. Aus dem Satz über majorisierte Konvergenz folgt die Behauptung. □

5.6. Satz: (Schwache Ableitungen und Fouriertransformation) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und sei $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ derart, dass

$$\int f(x)\partial_j\varphi(x)\,dx = -\int g(x)\varphi(x)\,dx$$

für alle $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ gilt (dh für alle $\varphi \in C^1$ mit $\varphi = 0$ außerhalb einer beschränkten Menge). Dann ist

$$\hat{g}(\xi) = i\xi_j\hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Bemerkung: Die Voraussetzung gilt insbesondere, wenn f stetig partiell differenzierbar ist und $g := \partial_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist.

Beweis. Sei $\xi \in \mathbb{R}^n$. Die Idee ist $\varphi(x) = e^{-ix\xi}$ zu nehmen, aber dann ist $\varphi \notin C_c^1$. Also approximieren wir diese Funktion. Wähle $\psi \in C_c^1$ mit $0 \le \psi \le 1$, sowie $\psi(x) = 1$ für $|x| \le 1$, und setze $\psi_k(x) := \psi(x/k)$ und $\varphi_k(x) := e^{-ix\xi}\psi_k(x)$. Dann ist

$$\int g\varphi_k\,dx = \int g(x)e^{-ix\xi}\psi_k(x)\,dx \to \hat{g}(\xi)$$

wegen $\psi_k(x) \uparrow 1$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ (majorisierte Konvergenz). Außerdem ist wegen $\varphi_k \in C_c^1$:

$$\int g\varphi_k\,dx = -\int f\partial_j\varphi_k\,dx = \underbrace{-\int f(-i\xi_j)\varphi_k\,dx}_{\to i\xi_j\hat{f}(\xi)} - \underbrace{\int f(x)e^{-ix\xi}\partial_j\psi_k(x)\,dx}_{=:A(k)}.$$

Nun ist $\partial_j\psi_k(x) = \frac{1}{k}(\partial_j\psi)(x/k)$ und

$$|A(k)| \le \int_{|x|\ge k} |f(x)|\,dx \cdot \frac{1}{k} \cdot \|\partial_j\psi\|_\infty \to 0 \ (k \to \infty),$$

da $\partial_j\psi$ beschränkt ist. $\square$

5.7. Beispiel: Für $\phi(x) = e^{-|x|^2/2}$, $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\hat{\phi}(\xi) = (2\pi)^{n/2}e^{-|\xi|^2/2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Es reicht, den Fall $n = 1$ zu betrachten, da $\phi(x) = \prod_{j=1}^n e^{-|x_j|^2/2}$ ist. Im Fall $n = 1$ gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$:

$$\phi'(x) = -x\phi(x).$$

Nach 5.5(c) und 5.6 folgt für jedes $\xi \in \mathbb{R}$:

$$i\xi\hat{\phi}(\xi) = \widehat{\phi'}(\xi) = \widehat{-x\phi(x)}(\xi) = -i(\hat{\phi})'(\xi),$$

dh

$$\boxed{(\hat{\phi})'(\xi) = -\xi\hat{\phi}(\xi).}$$

Somit lösen ϕ und $\hat{\phi}$ dieselbe gewöhnliche, lineare homogene Differentialgleichung, und es ist

$$\hat{\phi}(\xi) = \hat{\phi}(0)\phi(\xi) = \sqrt{2\pi}e^{-|\xi|^2/2}, \xi \in \mathbb{R},$$

wegen $\hat{\phi}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}$.

5.8. Fourierinversion: Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C_b(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für jedes $x \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\,d\xi.$$

Beweis. Wegen 5.5(b) reicht es, den Fall $x = 0$ zu betrachten. Setze $h(x) := e^{-|x|^2/2}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt nach 5.2(c) für jedes $a > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)h(a\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(ax)\hat{h}(x)\,dx.$$

Für $a \to 0+$ konvergiert die linke Seite gegen $\int \hat{f}(\xi)\,d\xi$ (majorisierte Konvergenz und die Voraussetzung $\hat{f} \in L^1$). Da f in 0 stetig ist, finden wir zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|f(y) - f(0)| < \varepsilon$ für $|y| < \delta$. Es gilt dann

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\mathbb{R}^n} f(ax)\hat{h}(x)\,dx - (2\pi)^n f(0)\Big| &\overset{5.7}{=} \Big|\int_{\mathbb{R}^n} (f(ax) - f(0))\hat{h}(x)\,dx\Big| \\ &\leq \varepsilon \int_{|x|\leq\delta/a} |\hat{h}(x)|\,dx + 2\|f\|_\infty \int_{|x|\geq\delta/a} |\hat{h}(x)|\,dx.\end{aligned}$$

Das erste Integral im letzen Term bleibt für $a \to 0+$ beschränkt, das zweite Integral geht gegen 0. Da f beschränkt ist, folgt die Behauptung für $x = 0$. □

5.9. Beispiel: $f(x) = e^{-a|x|}$ für $x \in \mathbb{R}$, wobei $a > 0$. Es gilt

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} e^{-a|x|}\,dx$$

und

$$\int_0^\infty e^{-ix\xi}e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a+i\xi}, \quad \int_{-\infty}^0 e^{-ix\xi}e^{ax}\,dx = \int_0^\infty e^{iy\xi}e^{-ay}\,dy = \frac{1}{a-i\xi}.$$

Also ist

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{a+i\xi} + \frac{1}{a-i\xi} = \frac{2a}{a^2+\xi^2}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Die Funktion f ist stetig und beschränkt mit $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Somit ist nach 5.8:

$$\mathscr{F}\Big(x \mapsto \frac{2a}{a^2+x^2}\Big)(\xi) = 2\pi e^{-a|\xi|}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

5.10. Definition und Satz (Faltung): Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Für fast jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ist $y \mapsto f(y)g(x-y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, und für h, gegeben durch

$$h(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,dy \text{ für fast alle } x \in \mathbb{R}^n,$$

gilt $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Die Funktion h heiß *Faltung von f mit g* und wird mit $f * g$ bezeichnet.

Beweis. Die Funktion $F : (x, y) \mapsto f(y)g(x-y)$ ist messbar und

$$\int\int |f(y)g(x-y)|\,dx\,dy = \int |f(y)| \underbrace{\int |g(x-y)|\,dx}_{=\|g\|_1}\,dy = \|f\|_1\|g\|_1.$$

Nach dem Satz von Fubini-Tonelli gilt $F \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $F(x,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für fast jedes $x \in \mathbb{R}^n$ und $x \mapsto \int F(x,y)\,dy \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Daraus folgt die Behauptung. □

5.11. Lemma: Die Faltung $* : L^1(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$ ist bilinear und stetig, kommutativ und assoziativ. Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

Beweis. Wir zeigen nur die Formel. Es ist nach Fubini

$$\begin{aligned}\int e^{-ix\xi} f * g(x)\,dx = \int\int e^{-ix\xi} f(y)g(x-y)\,dx\,dy &= \int e^{-iy\xi} f(y) \underbrace{\int e^{-i(x-y)\xi} g(x-y)\,dx}_{=\hat{g}(\xi)}\,dy \\ &= \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).\end{aligned}$$

□

Ende 10.Vorl.

5.12. Definition: Eine *Dirac-Familie auf* $\mathbb{R}^n$ ist eine Folge $(k_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ (stetiger) Funktionen in $L^1(\mathbb{R}^n)$ (hierbei ist $\Lambda = \mathbb{N}$ oder $\Lambda = (a, \infty)$ mit $a \geq 0$), die folgenden Bedingungen genügt:

(D1) $\forall \lambda \in \Lambda$: $\int_{\mathbb{R}} k_\lambda(x)\,dx = 1$,

(D2) $\limsup_{\lambda \to \infty} \|k_\lambda\|_1 < \infty$,

(D3) $\forall \delta > 0$: $\lim_{\lambda \to \infty} \int_{|x|>\delta} |k_\lambda(x)|\,dx = 0$.

Bemerkung: Die Beschränkung auf stetige Funktionen ist nicht wesentlich. Sie dient nur dazu, die Faltung von k_λ mit Funktionen aus homogenen Banachräumen auf $\mathbb{R}^n$ technisch zu vereinfachen (siehe unten).

5.13. Beispiele: Sei $\rho \in L^1(\mathbb{R}^n)$ stetig mit $\int \rho(x)\,dx = 1$. Dann definiert $\rho_\lambda(x) := \lambda^n \rho(\lambda x)$ eine Dirac-Familie $(\rho_\lambda)_{\lambda>0}$ auf $\mathbb{R}^n$. Wir verwenden die Substitution $x = y/\lambda$, $dx = \lambda^{-n}\,dy$ und erhalten

$$\int \rho_\lambda(x)\,dx = \lambda^n \int \rho(\lambda x)\,dx = \int \rho(y)\,dy = 1,$$

dh (D1) gilt. Genauso folgt

$$\|k_\lambda\|_1 = \int |\rho(y)|\,dy = \|\rho\|_1$$

für jedes $\lambda > 0$, und (D2) gilt. Für jedes $\delta > 0$ ist hingegen

$$\int_{|x|>\delta} |\rho_\lambda(x)|\,dx = \int_{|y|>\lambda\delta} |\rho(y)|\,dy \to 0 \quad (\lambda \to \infty),$$

so dass (D3) gilt. Konkrete Beispiele sind

(a) der *Gauß-Kern*: $G(x) = (2\pi)^{-n/2} e^{-|x|^2/2}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Die Funktion $G \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist stetig mit $G \geq 0$ und $\int G(x)\,dx = \hat{G}(0) = 1$ (siehe 5.7).

(b) der *Poisson-Kern*: $P(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Die Funktion $P \in L^1(\mathbb{R})$ stetig mit $P \geq 0$ und $\int P(x)\,dx = 1$ (Stammfunktion ist $\pi^{-1}\arctan x$).

Häufig hat ρ noch beschränkten Träger, etwa $\rho = 0$ außerhalb von $B(0,1)$. Setzt man $\rho_k := k^n \rho(k\cdot)$, so gilt $\rho_k = 0$ außerhalb von $B(0, 1/k)$.

5.14. Definition: Ein homogener Banachraum auf $\mathbb{R}^n$ ist ein Banachraum $B \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ mit

(H1) Für alle $y \in \mathbb{R}^n$ und $f \in B$ gilt $\tau_y f := f(\cdot - y) \in B$ und $\|\tau_y f\|_B = \|f\|_B$,

(H2) Für alle $f \in B$ ist die Abbildung $\mathbb{R}^n \to B$, $y \mapsto \tau_y f$ stetig.

Beispiele Für $1 \leq p < \infty$ ist $L^p(\mathbb{R}^n)$ ein homogener Banachraum auf $\mathbb{R}^n$. Ebenso sind $C_0(\mathbb{R}^n)$ und $BUC(\mathbb{R}^n)$ homogene Banachräume auf $\mathbb{R}^n$. Hingegen sind $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und

$$C_b(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : \ f \text{ ist stetig und beschränkt}\}$$

bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ keine homogenen Banachräume auf $\mathbb{R}^n$.

5.15. Definition und Satz: (a) Ist $k \in L^1(\mathbb{R}^n)$ stetig, so ist

$$k * f := \int k(y)\tau_y f\,dy \in B$$

für jedes $f \in B$, wobei das Integral ein absolut konvergentes uneigentliches Riemann-Integral mit Werten in B ist. Außerdem gilt

$$\|k * f\|_B \le \|k\|_1 \|f\|_B, \quad f \in B.$$

(b) Ist (k_λ) eine Dirac-Familie auf $\mathbb{R}^n$ und B ein homogener Banachraum auf $\mathbb{R}^n$, so gilt für jedes $f \in B$, dass

$$\|k_\lambda * f - f\|_B \to 0 \quad (\lambda \to \infty).$$

Beweis. zu (a): Wegen

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|k(y)\tau_y f\|_B \, dy = \int |k(y)| \underbrace{\|\tau_y f\|_B}_{=\|f\|_B} = \|k\|_1 \|f\|_B$$

ist das Integral absolut konvergent und die Abschätzung folgt.

zu (b): Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir $\delta > 0$ mit $\|\tau_y f - f\|_B < \varepsilon$ für $|y| \le \delta$ und schreiben wieder

$$\begin{aligned} \|k_\lambda * f - f\|_B &\overset{(D1)}{=} \|\int k_\lambda(y)(\tau_y f - f)\, dy\|_B \le \int |k_\lambda(y)| \|\tau_y f - f\|_B \, dy \\ &\le \varepsilon \int_{|y|\le\delta} |k_\lambda(y)|\, dy + 2\|f\|_B \int_{|y|>\delta} |k_\lambda(y)|\, dy. \end{aligned}$$

Wir erhalten wegen (D3):

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \|k_\lambda * f - f\|_B \le \varepsilon \limsup_{\lambda\to\infty} \|k_\lambda\|_1,$$

woraus wegen (D2) die Behauptung folgt. □

Beispiele: (a) Wie oben sei G der Gauß-Kern. Setzen wir für $t > 0$:

$$G(t, x) := t^{-n/2} G(x/\sqrt{t}) = G_{t^{-1/2}}(x) = (2\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/(2t)},$$

so gilt für jedes $p \in [1, \infty)$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$:

$$\|G(t, \cdot) * f - f\|_p \to 0 \quad (t \to 0+),$$

was im Zusammenhang mit der Wärmeleitungsgleichung interessant ist. Entsprechend hat man

$$\|G(t, \cdot) * f - f\|_\infty \to 0 \quad (t \to 0+),$$

für jedes $f \in BUC(\mathbb{R}^n)$.

(b) Setzt man entsprechend $P(t, x) := t^{-n} P(x/t)$, wobei P den Poisson-Kern bezeichnet, so gilt genauso

$$\|P(t, \cdot) * f - f\|_p \to 0 \quad (t \to 0+)$$

für $f \in L^p(\mathbb{R})$ und $1 \le p < \infty$ und

$$\|P(t, \cdot) * f - f\|_\infty \to 0 \quad (t \to 0+)$$

für jedes $f \in BUC(\mathbb{R})$.