Übungsblatt 4

Fourieranalysis

13.04.2020

Aufgabe 1: Partialbruchzerlegung der Cotangens-Funktion
Es sei $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die periodische Funktion mit

$$f(x) = \cos(ax) \quad \text{für} \quad -\pi \leq x < \pi\,.$$

(a) Man berechne die Fourier-Reihe von f für das Periodizitätsintervall $[-\pi, \pi]$ und zeige, dass sie gleichmäßig gegen f konvergiert.
(b) Man beweise für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ die Formel

$$\pi \cot(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2}\,.$$

Hinweis: Man betrachte die Fourier-Reihe aus (a) an der Stelle $x = \pi$.

Aufgabe 2: Das Eulersche Sinusprodukt
Man zeige, dass für $-1 < x < +1$ gilt:

$$\sin(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)\,.$$

Hinweis: Man bilde für $0 < x < 1$ die logarithmische Ableitung $\dfrac{\mathrm{d} \log \sin(\pi x)}{\mathrm{d}x}$ und verwende die Resultate aus Aufgabe 1. *Bemerkung:* Diese Produktformel wird

in der Funktionentheorie mit Hilfe des analytischen Fortsetzungsprinzips auf ganz $\mathbb{C}$ ausgedehnt, so dass hier die Ein- schränkung $-1 < x < 1$ nicht ins Gewicht fällt. $\square$