Korollar 2.23 *Die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ ist ein stetiger, linearer Homomorphismus der involutiven Banachalgebra $(L^1(\mathbb{R}^n), +, *, ^*; \|\cdot\|_1)$ in die involutive Banachalgebra $(C_\infty(\mathbb{R}^n), +, \cdot, \overline{}; \|\cdot\|_\infty)$.*

Mittels der Fourierumkehrformel, welche wir als nächstes beweisen werden, und der Tatsache, daß $\mathcal{S}$ dicht in C_∞ liegt, folgt zudem, daß die sogenannte **Fourieralgebra**

$$A(\mathbb{R}^n) := \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}^n)) \subset C_\infty(\mathbb{R}^n)$$

dicht in $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ liegt.

2.6 Umkehrung der Fouriertransformation

Lemma 2.24 *Es bezeichne Φ_n auf $\mathbb{R}^n$ die* **Gaußfunktion**

$$\Phi_n(x) := e^{-|x|^2/2}, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann liegt Φ_n in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, und es gilt

$$\hat{\Phi}_n = (2\pi)^{n/2}\Phi_n. \tag{2.18}$$

Insbesondere ist

$$1 = \Phi_n(0) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{\Phi}_n(\xi)\, d\xi. \tag{2.19}$$

Beweis. Da $|\cdot|^{2N}e^{-|\cdot|^2/2}$ für jedes $N \in \mathbb{N}$ beschränkt ist, folgt leicht, daß $\Phi_n \in \mathcal{S}_n$ ist.
Sei nun zunächst $n = 1$. $y = \Phi_1$ erfüllt die Differentialgleichung

$$y' + xy = 0. \tag{2.20}$$

Nach (2.16) gilt ferner

$$(\hat{\Phi}_1)' = iD\hat{\Phi}_1 = -i\widehat{(x\Phi_1)},$$

also mit (2.20)

$$(\hat{\Phi}_1)' = -i\widehat{(-\Phi_1')} = \widehat{(-D\Phi_1)} = -\xi\hat{\Phi}_1.$$

Somit erfüllt auch $\hat{\Phi}_1$ die Differentialgleichung (2.20), und folglich ist $(\hat{\Phi}_1/\Phi_1)' \equiv 0$, d.h. $\hat{\Phi}_1/\Phi_1$ ist konstant.
Nun ist aber $\Phi_1(0) = 1$, und

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_1(0) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \left(\int \int e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy \right)^{1/2} \\ &= \left(\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\infty} e^{-r^2/2} r\, dr d\theta \right)^{1/2} = \sqrt{2\pi}. \end{aligned}$$

Somit folgt $\hat{\Phi}_1/\Phi_1 = \frac{\sqrt{2\pi}}{1} = (2\pi)^{1/2}$, also

$$\hat{\Phi}_1 = (2\pi)^{1/2}\Phi_1.$$

Ist n beliebig, so gilt wegen $\Phi_n(x) = \Phi_1(x_1)\cdots\Phi_1(x_n)$ und Fubinis Theorem offenbar $\hat{\Phi}_n(\xi) = \hat{\Phi}_1(\xi_1)\cdots\hat{\Phi}_1(\xi_n)$. Damit folgt sofort (2.18), und dann auch (2.19), da

$$\begin{aligned}\Phi_n(0) &= (2\pi)^{-n/2}\hat{\Phi}_n(0) = (2\pi)^{-n/2}\int \Phi_n(x)\,dx \\ &= (2\pi)^{-n}\int \hat{\Phi}_n(x)\,dx.\end{aligned}$$

Q.E.D.

Einen alternativen Beweis kann man mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel führen (Übung).

Satz 2.25 *Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$\int f\hat{g}\,dx = \int \hat{f}g\ dx. \tag{2.21}$$

Beweis. Nach Fubini ist

$$\begin{aligned}\int f\hat{g}\,dx &= \int\left(\int f(x)g(y)e^{-ix\cdot y}dy\right)dx \\ &= \int\left(\int f(x)g(y)e^{-ix\cdot y}dx\right)dy = \int \hat{f}(y)g(y)dy.\end{aligned}$$

Q.E.D.

Theorem 2.26 (Fourier-Umkehrformel) *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ so, daß $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$f(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}\,d\xi \tag{2.22}$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. Sei Φ_n die Gaußfunktion aus Lemma 2.24, für die wir bereits die Umkehrformel kennen, und setze $\varphi := (2\pi)^{-n}\hat{\Phi}_n = (2\pi)^{-n/2}\Phi_n$. Dann ist $\int \varphi\,dx = 1$, und wir betrachten die approximierende Eins $\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $\varepsilon > 0$ (vergl. Bemerkung 2.4).

Der Grundgedanke des Beweises wird darin bestehen, f durch „Superpositionen“ von Translaten skalierter Gaußfunktionen, für welche die Fourierumkehrformel i.w. in Lemma 2.26 bewiesen wurde, zu approximieren. Nach Theorem 2.13 gilt nämlich

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|f - f * \varphi_\varepsilon\|_1 = 0, \tag{2.23}$$

wobei $f * \varphi_\varepsilon = \int f(y)\lambda_y \varphi_\varepsilon \, dy$.
Ferner ist nach Satz 2.1 $\varphi_\varepsilon = (2\pi)^{-n}\widehat{\Phi_n(\varepsilon\cdot\ )}$, folglich nach Satz 2.25, da Φ_n symmetrisch ist:

$$\begin{aligned} f * \varphi_\varepsilon(x) &= \int f(x-y)\ (2\pi)^{-n}\widehat{\Phi_n(\varepsilon\cdot\ )}(y)\, dy \\ &= (2\pi)^{-n} \int f(x+y)\widehat{\Phi_n(\varepsilon\cdot\ )}(y)\, dy \\ &= (2\pi)^{-n} \int (\lambda_{-x} f)^\wedge(\xi)\, \Phi_n(\varepsilon\xi)\, d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int \hat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi}\, \Phi_n(\varepsilon\xi)\, d\xi. \end{aligned}$$

Nun ist $\hat{f}$ integrierbar, Φ_n ist beschränkt und $\Phi_n(\varepsilon\xi)$ strebt für $\varepsilon \to 0$ punktweise gegen $\Phi_n(0)$. Daher folgt nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f * \varphi_\varepsilon(x) = (2\pi)^{-n} \int \hat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi}\, d\xi$$

für jedes $x \in \mathbb{R}^n$. Andererseits folgt aus (2.23), daß für eine Folge $\varepsilon_j \searrow 0$ gilt: $f(x) = \lim_{j\to\infty} f * \varphi_{\varepsilon_j}(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$. Damit ergibt sich (2.22).

Q.E.D.

Die Fourierumkehrformel besitzt z.B. für $n = 1$ folgende *physikalische Interpretation*: Sei $f(t)$ ein von der Zeit t abhängiges Signal, welches den Voraussetzungen von Theorem 2.26 genügt. Dann ist

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\tau) e^{i\tau t} dt,$$

d.h. f läßt sich in „Eigenschwingungen“ $e^{i\tau t} = \cos(\tau t) + i \sin(\tau t)$ der „Frequenzen“ $\tau \in \mathbb{R}$ zerlegen, wobei $\hat{f}(\tau)$ die „Amplitude“ oder „Dichteverteilung“ der Frequenzen darstellt.

Korollar 2.27 (Eindeutigkeitssatz) *Sind $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, und ist $\hat{f} = \hat{g}$, so ist $f = g$.*

Beweis. Seien $f, g \in \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{f} = \hat{g}$. Dann ist $h := f - g \in \mathcal{L}^1$, $\hat{h} = 0 \in \mathcal{L}^1$, und somit $h(x) = 0$ f.ü. nach Theorem 2.26. Es folgt $f = g$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Q.E.D.

Definition. Wir definieren die **Fourier-Kotransformierte** $\overline{\mathcal{F}}f$ einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ durch

$$\overline{\mathcal{F}}f(\xi) := \int f(x) e^{i\xi\cdot x}\, dx = \hat{f}(-\xi).$$

Ferner setzen wir für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$

$$\check{f}(x) := f(-x), \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Mit $f \in \mathcal{S}$ liegt auch $\check{f}$ in $\mathcal{S}$. Beachte auch, daß für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$(\overline{\mathcal{F}}f)^\vee = \mathcal{F}f, \quad \mathcal{F}(\check{f}) = \overline{\mathcal{F}}f, \tag{2.24}$$

$$(f * g)^\vee = \check{g} * \check{f} = \check{f} * \check{g}. \tag{2.25}$$

Als weitere Folge erhalten wir

Theorem 2.28 *(a) Die Fouriertransformation $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist ein linearer Isomorphismus, mit Umkehrabbildung $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}$.*
(b) Sind $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, so sind auch $\varphi\psi$ und $\varphi * \psi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, und es gilt

$$(\varphi * \psi)^\wedge = \hat{\varphi}\ \hat{\psi}, \quad (\varphi\psi)^\wedge = (2\pi)^{-n}\hat{\varphi} * \hat{\psi}. \tag{2.26}$$

Beweis. (a) Mit $\varphi \in \mathcal{S}$ sind nach Korollar 2.20 auch $\mathcal{F}\varphi$ und $\overline{\mathcal{F}}\varphi$ in $\mathcal{S}$. Somit gilt nach der Fourierumkehrformel (2.22) $\varphi(x) = (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}\varphi)(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$, und da φ stetig ist, gilt dies dann sogar für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Mit (2.24) erhalten wir dann zudem

$$\check{\varphi} = (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}\check{\varphi}) = (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}(\overline{\mathcal{F}}\varphi) = (2\pi)^{-n}(\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}\varphi)^\vee,$$

also

$$\varphi = (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}\varphi) = (2\pi)^{-n}\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}\varphi),$$

woraus sich die Behauptung ergibt.
(b) Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$. Nach der Leibnizregel gilt für jedes $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$D^\alpha(\varphi\psi) = \sum_{\beta \le \alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} D^\beta\varphi\, D^{\alpha-\beta}\psi, \tag{2.27}$$

wobei wir wie üblich setzen $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$, und wobei $\beta \le \alpha$ bedeute, daß $\beta_j \le \alpha_j$ für $j = 1, \ldots, n$. Damit folgt leicht, daß $\varphi\psi \in \mathcal{S}$.

Die Formel $(\varphi * \psi)^\wedge = \hat{\varphi}\hat{\psi}$ gilt nach Satz 2.3. Somit ist nach (a) insbesondere auch $\varphi * \psi = \mathcal{F}^{-1}(\hat{\varphi}\hat{\psi}) \in \mathcal{S}$. Nach Teil (a) ergibt sich hieraus

$$\varphi\psi = \mathcal{F}((\mathcal{F}^{-1}\varphi) * (\mathcal{F}^{-1}\psi)),$$

also

$$(\varphi\psi)^\wedge = (2\pi)^{-2n}\mathcal{F}^2(\overline{\mathcal{F}}\varphi * \overline{\mathcal{F}}\psi).$$

Wegen $\mathcal{F}^2 f(x) = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f(-x) = (2\pi)^n \check{f}(x)$ ergibt sich daher mit (2.24), (2.25)

$$\begin{aligned} (\varphi\psi)^\wedge &= (2\pi)^{-n}(\overline{\mathcal{F}}\varphi * \overline{\mathcal{F}}\psi)^\vee = (2\pi)^{-n}(\overline{\mathcal{F}}\varphi)^\vee * (\overline{\mathcal{F}}\psi)^\vee \\ &= (2\pi)^{-n}\hat{\varphi} * \hat{\psi}. \end{aligned}$$

Q.E.D.

2.7 L^2-Theorie: Der Satz von Plancherel

Wir bezeichnen für $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit

$$(f, g) := \int f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

das Skalarprodukt auf dem Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}^n)$. Damit ist also die L^2-Norm gegeben durch $\|f\|_2 = (f, f)^{1/2}$.

Satz 2.29 (Parsevals Formel) *Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$(\varphi, \psi) = (2\pi)^{-n}(\hat{\varphi}, \hat{\psi}). \tag{2.28}$$

Beweis. Betrachte $f := \varphi * \psi^*$. Dann ist nach Theorem 2.28 $f \in \mathcal{S}_n$, so daß nach der Fourierumkehrformel gilt:

$$\begin{aligned} (\varphi, \psi) &= \int \varphi(x)\psi^*(-x)\, dx = \varphi * \psi^*(0) = f(0) \\ &= (2\pi)^{-n} \int \hat{f}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Ferner ist $\hat{f} = \hat{\varphi}\hat{\psi}^* = \hat{\varphi}\overline{\hat{\psi}}$. Es folgt

$$(\varphi, \psi) = (2\pi)^{-n}(\hat{\varphi}, \hat{\psi}).$$

Q.E.D.