Prof. Dr. Bernd Dreseler — Sommersemester 2020

Übungen zur Harmonischen Analyse

Aufgabe 1: Seien φ, $f \in \mathcal{S}(R^n)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1$. Für $\varepsilon > 0$ setze $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(\varepsilon^{-1}x)$. Zeigen Sie, dass

$$\varphi_\varepsilon * f \to f \quad \text{in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ für } \varepsilon \to 0.$$

Aufgabe 2: Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ reellwertig und $1 \le p < \infty$. Dann gilt

$$\|f\|_\infty^2 \le 2\|f\|_p\|f'\|_{p'}$$

mit $(1/p) + (1/p') = 1$. *Hinweis:* Es gilt

$$f(x)^2 = \int_{-\infty}^{x} \frac{d}{dt} f(t)^2\,dt$$

Aufgabe 3: Es sei μ ein positives Maß auf $\mathbb{R}^n$ so dass ein $k > 0$ existiert mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|)^{-k}\,d\mu(x) < \infty.$$

Zeigen Sie, dass

$$\psi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\,d\mu(x)$$

in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ liegt.

Aufgabe 4: Sei $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Zeigen Sie, dass

$$\widehat{\big(\partial^\alpha \delta_0\big)} = \big(ix\big)^\alpha$$

Aufgabe 5: Sei $a < b$. Zeigen Sie, dass

$$(1_{[a,b]})' = \delta_b - \delta_a$$

in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ gilt.