Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf das Skript zur "Fourieranalysis und Distributionentheorie", das Sie per E-Mail erhalten haben. Wählen Sie mindestens drei zur Bearbeitung aus.

Aufgabe 1

Beweisen Sie Theorem 2.2 (ii).

Aufgabe 2

Führen Sie den erwähnten Beweis aus Bemerkung 2.4:
Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & x \geq 1 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{supp} \varphi = \overline{B_1(0)}$ und $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 3

Ergänzen Sie den fehlenden Teil des Beweises von 2.6: Zeigen Sie, dass für $1 < p \leq \infty$ der Raum $\mathcal{T}$ aller Treppenfunktionen dicht in $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ liegt.

Aufgabe 4

Führen Sie den Beweis von 2.9 für den fehlenden Fall $p = \infty$.

Aufgabe 5

Beweisen Sie Bemerkung 2.19:
Eine Funktion $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist genau dann eine Schwarzfunktion, wenn $D^\alpha(x^\beta \varphi)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ beschränkt ist.
(Hinweis: Leibnizformel)