Prof. Dr. Bernd Dreseler Sommersemester 2020

Übungen zur Topologie

Aufgabe 1: Sei

$$f(x) = \begin{cases} \ln|x| & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

(b) $f' \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ kann durch

$$f'(\psi) = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\psi(x)}{x} \, dx$$

für $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ berechnet werden.

Aufgabe 25: Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für ein $1 \leq p \leq \infty$ und für $N \geq 1$ sei

$$g_N(\xi) = \int_{\|x\| \leq N} f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} \, dx.$$

Zeigen Sie, dass

$$g_N \to \hat{f} \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \text{ für } N \to \infty.$$

Aufgabe 26: Zeigen Sie, dass $e^{inx} \to 0$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 27: Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ist die *Dilatation* $\delta^\lambda(f)$ für $\lambda > 0$ definiert durch $\delta^\lambda(f)(x) = f(\lambda x)$. Eine temperierte Distribution $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ heisst homogen vom Grad $\gamma \in \mathbb{C}$, falls für alle $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$T(\delta^\lambda(\psi)) = \lambda^{-n-\gamma} T(\psi) \quad \text{für alle } \lambda > 0.$$

Zeigen Sie:

(a) dass die Diracsche δ-Distribution δ_0 homogen vom Grad -n ist.

(b) Ist T homogen vom Grad γ, so ist für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ $\partial^\alpha T$ homogen vom Grad $\gamma - |\alpha|$.

(c) T ist homogen vom Grad γ genau dann wenn $\hat{T}$ homogen vom Grad $-n-\gamma$ ist.