Prof. Dr. Bernd Dreseler Sommersemester 2020

# Übungen zur Harmonischen Analyse

---

**Aufgabe 1:** Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ist die *Dilatation* $\delta^\lambda(f)$ für $\lambda > 0$ definiert durch $\delta^\lambda(f)(x) = f(\lambda x)$. Eine temperierte Distribution $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ heisst homogen vom Grad $\gamma \in \mathbb{C}$, falls für alle $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$T(\delta^\lambda(\psi)) = \lambda^{-n-\gamma}T(\psi) \quad \text{für alle } \lambda > 0.$$

Zeigen Sie:

(a) dass die Diracsche $\delta$-Distribution $\delta_0$ homogen vom Grad -$n$ ist.

(b) Ist $T$ homogen vom Grad $\gamma$, so ist für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ $\partial^\alpha T$ homogen vom Grad $\gamma - |\alpha|$.

(c) $T$ ist homogen vom Grad $\gamma$ genau dann wenn $\hat{T}$ homogen vom Grad $-n - \gamma$ ist.

**Aufgabe 2:**

Sind die folgenden Abbildungen $T\colon \mathfrak{D}(\boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{C}$ Distributionen aus $\mathfrak{D}'(\boldsymbol{R})$?

(a) $T\varphi = (\varphi(0))^2$;

(b) $T\varphi = \int\limits^{+\infty} |\varphi(t)|\, dt$;

(c) $T\varphi = \int\limits_0^1 \varphi^{(k)}(t)\, dt, \ k \in \boldsymbol{N}$;

(d) $T\varphi = \sup\limits_{t \in \boldsymbol{R}} \varphi(t)$;

(c) $T\varphi = \lim\limits_{\nu \to \infty} \left\{ \sum\limits_{\mu=1}^{\nu} \varphi\left(\frac{1}{\mu}\right) - \nu\, \varphi(0) - \varphi'(0) \log \nu \right\}$,

Anleitung: Man beachte, daß $\lim\limits_{\nu \to \infty} \left( \sum\limits_{\mu=1}^{\nu} \mu^{-1} - \log \nu \right)$ existiert.