Aufgabe 6.6: Partialbruchzerlegung der Cotangens-Funktion
Es sei $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die periodische Funktion mit

$$f(x) = \cos(ax) \quad \text{für} \quad -\pi \le x < \pi\,.$$

(a) Man berechne die Fourier-Reihe von f für das Periodizitätsintervall $[-\pi, \pi]$ und zeige, dass sie gleichmäßig gegen f konvergiert.
(b) Man beweise für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ die Formel

$$\pi \cot(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2}\,.$$

Hinweis: Man betrachte die Fourier-Reihe aus (a) an der Stelle $x = \pi$.

Lösung:
(a) Die Fourier-Koeffizienten c_n von f lauten für alle $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(at) e^{-int}\, dt = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{i(a-n)t} + e^{-i(a+n)t} \right) dt \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{e^{i(a-n)t}}{i(a-n)} - \frac{e^{-i(a+n)t}}{i(a+n)} \right]_{t=-\pi}^{t=\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^{i(a-n)\pi} - e^{-i(a-n)\pi}}{2i} \cdot \frac{1}{a-n} + \frac{e^{i(a+n)\pi} - e^{-i(a+n)\pi}}{2i} \cdot \frac{1}{a+n} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin\big((a-n)\pi\big)}{a-n} + \frac{\sin\big((a+n)\pi\big)}{a+n} \right) \\
&= \frac{\sin\big((a-n)\pi\big)}{\pi} \frac{a}{a^2 - n^2} = (-1)^n \frac{\sin(a\pi)}{\pi} \frac{a}{a^2 - n^2}\,.
\end{aligned}$$

Da die Funktion f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und und stückweise stetig differenzierbar ist, konvergiert ihre Fourier-Reihe gleichmäßig gegen f. Damit haben wir

$$\cos(ax) = \frac{\sin(\pi a)}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2a}{a^2 - n^2} \cos(nx) \right) . \tag{1}$$

(b) Setzen wir in der Fourier-Entwicklung (1) $x = \pi$, so ergibt sich

$$\cos(\pi a) = \frac{\sin(\pi a)}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2a}{a^2 - n^2} \cos(n\pi) \right) .$$

Schreiben wir x statt a und beachten, dass $\cos(n\pi) = (-1)^n$, so ergibt sich

$$\pi \cot(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbb{Z}\}$.

Aufgabe 6.7: Das Eulersche Sinusprodukt
Man zeige, dass für $-1 < x < +1$ gilt:

$$\sin(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right) .$$

Hinweis: Man bilde für $0 < x < 1$ die logarithmische Ableitung $\dfrac{\mathrm{d} \log \sin(\pi x)}{\mathrm{d}x}$ und verwende die Resultate aus Aufgabe 1.

Bemerkung: Diese Produktformel wird in der Funktionentheorie mit Hilfe des analytischen Fortsetzungsprinzips auf ganz $\mathbb{C}$ ausgedehnt, so dass hier die Einschränkung $-1 < x < 1$ nicht ins Gewicht fällt. □

Lösung: Wir benutzen die Partialbruchzerlegung aus Aufgabe 1:

$$\pi \cot(\pi x) - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} . \tag{2}$$

Die reelle Funktion $f_n(x) = \dfrac{2|x|}{n^2 - x^2}$ ist für $x \in [0, r]$ mit $0 \le r < 1$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ monoton wachsend in x. Daraus folgt mit der Symmetrie von $f_n(x)$:

$$f_n(x) \le \frac{2r}{n^2 - r^2} \quad \forall x \in [-r, r] .$$

Außerdem gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2r}{n^2-r^2} = \frac{2r}{1-r^2} + 2r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2-r^2} \leq \frac{2r}{1-r^2} + 2r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1-r^2}$$
$$\leq \frac{2r}{1-r^2} + 2r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \,.$$

Damit konvergiert die Funktionenreihe auf der rechten Seite der Identität (6.30) absolut und gleichmäßig auf $[-r,r]$. Folglich dürfen wir sie auch für $x \in (-1,1)$ gliedweise integrieren

$$h(x) := \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t}{t^2-n^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{2t}{t^2-n^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\log\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)\right]_0^x$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right) = \log\left\{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\right\} .$$

Die Stammfunktion der linken Seite von (2) ist gemäß dem Hinweis zur Aufgabenstellung für $x \in (-1,1)$ gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} \log \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x} & \text{für} \quad x \neq 0\,, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0\,. \end{cases}$$

Da $g(0) = h(0) = 0$, haben wir für $x \in (-1,1)$

$$\log \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \log\left\{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\right\} ,$$

also

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right) .$$

Bemerkung: Für $x = \frac{1}{2}$ erhalten wir aus dem Sinusprodukt: $\frac{2}{\pi} = \prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4j^2}\right)$ und damit die Wallissche Produktformel $\frac{\pi}{2} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{(2j)^2}{(2j)^2-1}$ aus Aufgabe 1.4. □

Zusatz 6.1: Gibbs-Phänomen

Wir betrachten die 2π-periodische Fortsetzung der folgenden, auf dem Intervall $[-\pi,\pi)$ erklärten Funktion

$$f(x) := \begin{cases} -1\,, & -\pi < x < 0 \\ 0\,, & x = -\pi \ \text{ oder } \ x = 0 \\ 1\,, & 0 < x < \pi\,. \end{cases}$$