Prof. Dr. Bernd Dreseler
Übungen zu Analysis III, WS 2020/21
Universität Siegen

Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Sei $c(t) := (\sin t, \cos t, t)$ für $t \in \mathbb{R}$ - die sogenannte *Schraubenlinie* oder *Helix*. Man skizziere die Spur von c und zeige, dass es kein $\tau \in [0, 2\pi]$ gibt mit

$$\frac{c(2\pi) - c(0)}{2\pi} = c'(\tau).$$

Wieso ist dies kein Widerspruch zum Mittelwertsatz ?

Aufgabe 2

Man zeige: Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^4}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad , & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ist stetig auf $\mathbb{R}^2$, die partiellen Ableitungen existieren überall, aber f ist nicht stetig partiell differenzierbar. Ist f in $(0,0)$ differenzierbar ?

Aufgabe 3

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad , & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Man zeige, dass f überall zweimal partiell differenzierbar ist, dass aber gilt

$$D_2 D_1 f(0,0) \neq D_1 D_2 f(0,0).$$

Aufgabe 4

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Man zeige:

"Der Gradient von f steht senkrecht auf den Niveauflächen".

D.h.: Ist $a \in \mathbb{R},\ x \in N_a(f) = \{y \in U : f(y) = a\}$ und $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve, $c(t) = x,\ t \in I$ und $c(I) \subset N_a(f)$. Dann gilt $c'(t) \perp \text{grad } f(x)$.