Prof. Dr. Bernd Dreseler
Übungen zu Analysis III, WS 2020/21
Universität Siegen

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (Banachscher Fixpunktsatz). Es sei (X, d) ein nichtleerer, vollständiger metrischer Raum, n eine positive natürliche Zahl und $f : X \to X$ eine Selbstabbildung derart, dass die n-fache Komposition $f^n := f \circ f \circ \cdots \circ f$ eine Kontraktion ist. Zeige, dass f genau einen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 2 (Satz über Umkehrfunktion). In dieser Aufgabe geht es um Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z = x + iy \mapsto e^z = e^x e^{iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y$. Wir identifizieren $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ und betrachten also die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)\,.$$

(a) Zeige, dass $f'(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ invertierbar ist.

(b) Zeige, dass f den Streifen $S := \mathbb{R}\times\,]-\pi, \pi[$ auf die geschlitzte Ebene

$$E := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \colon x \leq 0\}$$

abbildet (also $f(S) = E$), und dass $f|_S \colon S \to E$ ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 3 (Satz über implizite Funktionen). Wir betrachten die stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := x^4 + y^4$.

(a) Skizziere grob einige Höhenlinien von f.

(b) Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ berechne $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

(c) Für welche Punkte $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ist die durch (x_0, y_0) verlaufende Höhenlinie von f nahe (x_0, y_0) als Graph einer stetig differenzierbaren Funktion η von x darstellbar,[1] bzw. als Graph einer stetig differenzierbaren Funktion ξ von y (d.h. in der Form $(\xi(y), y)$) ? Argumentiere mit dem Satz über implizite Funktionen !

(d) Wie sehen die in Teil (c) vorkommenden Funktionen η und ξ konkret aus ?

Aufgabe 4 (Lösen von Gleichungen). Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (x_1 \cdot e^{x_2}, (1 - x_1) \cdot x_2).$$

Berechne $f(0, 0)$, $f'(x_1, x_2)$ und insbesondere $f'(0, 0)$. Finde ein $R > 0$ derart, dass die Gleichung $f(x) = y$ für jedes $y \in \mathbb{R}^2$ mit $\|y\|_2 < R$ eine Lösung $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ besitzt.
[Hinweis: Beweis von Satz 12.5 !].