

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (Rangatz). Zeige, dass der Zylinder $Z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ eine 2-dimensionale C^∞ -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^3 ist.

Aufgabe 2 (Extrema unter Nebenbedingungen). Finde das Maximum der Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + y$ unter der Nebenbedingung $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$.

Aufgabe 3 (Satz über implizite Funktionen). Wir betrachten die stetig differenzierbare Funktion $f:]0, \infty[\times]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = xye^{-x-y}$. Für welche $x_0, y_0 > 0$ lässt sich die durch (x_0, y_0) verlaufende Höhenlinie von f nahe (x_0, y_0) als Graph einer stetig differenzierbaren Funktion von x (bzw. von y) darstellen? (Du brauchst nur eine hinreichende Bedingung anzugeben!) Wie sieht die durch $(1, 1)$ verlaufende Höhenlinie aus?

Aufgabe 4 (Rangatz). Betrachte die Funktion

$$f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) := x_1 \cdot x_4 - x_2 \cdot x_3.$$

Zeige, dass $f^{-1}(1)$ eine 3-dimensionale C^∞ -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^4 ist.