Übungen 5 zu Analysis III, WS 2020

1. Eine Funktion $f : A \longrightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n$ heisst *Riemann-integrierbar,* wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen φ und ψ gibt mit

$$\varphi \leq f_A \leq \psi \quad \text{und} \quad \|\varphi - \psi\|_1 < \varepsilon.$$

   Zeigen Sie:

   (a) Jede Regelfunktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.

   (b) Jede Riemann-integrierbare Funktion $f : A \longrightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n$, ist Lebesgue-integrierbar, und es gilt

$$\int_A f dx = \sup \left\{ \int_A \varphi dx \,\middle|\, \varphi \text{ Treppenfunktion mit } \varphi \leq f_A \right\}.$$

2. Es seien f, g Regelfunktionen auf $[a, b)$ mit folgenden
Eigenschaften:

   (a) f hat eine beschränkte Stammfunktion.

   (b) g ist eine monotone $\mathcal{C}^1$-Funktion (differenzierbar mit stetiger Ableitung) mit $g(x) \longrightarrow 0$ für $x \longrightarrow b$.

   Zeigen Sie: Das Integral $\int_a^b fg dx$ existiert.

3. Integrieren Sie die Funktion $x^n y^m, n, m \in \mathbb{N}$, über das Quadrat $[0, 1]^2$ und das Dreieck $\Delta^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\}$.

4. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

   (a) $\int_A x^2 y d(x, y)$, $A = [-1, 1] \times [0, 1]$;

   (b) $\int_A y^2 d(x, y)$, A ist Inneres der Ellipse $4x^2 + y^2 = 4$;

   (c) $\int_A xy d(x, y)$, A ist Bereich zwischen der Parabel $y = x^2$ und der Geraden $y = x + 2$.