Aufgabe 5. Der Zylinder Z ist die Niveaufläche $f^{-1}(1)$ der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) := x^2 + y^2$, welche offensichtlich beliebig oft stetig partiell differenzierbar ist (alle partiellen Ableitungen ab dritter Ordnung verschwinden und sind daher stetig). Beachte, dass $f'(x, y, z) = (2x, 2y, 0) \neq (0, 0, 0)$ für alle $(x, y, z) \in f^{-1}(1)$. Also ist $f'(x, y, z)$ stets eine 1×3-Matrix vom Rang 1, mithin 1 ein regulärer Wert von f. Nach Satz 12.10 ist $f^{-1}(1)$ eine 2-dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$.

1 **Aufgabe 6.** *Lösung mittels Lagrange-Multiplikatoren*: Für die stetig differenzierbare

2 Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) := \frac{1}{4}x^2 + y^2 - 1$ ist 0 ein regulärer Wert, weil $g'(x,y) = (\frac{1}{2}x, 2y) \neq (0,0)$ für alle $(x,y) \in M := g^{-1}(0)$ (vgl. Seite 240, Beispiel 5). Die Ellipse M ist abgeschlossen und beschränkt, mithin eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Die stetige Funktion $f|_M : M \to \mathbb{R}$ nimmt daher an einer Stelle $(x_0, y_0) \in M$ ein globales Maximum an, also $f(x_0, y_0) = \max f(M)$. Nach Satz 12.11 gibt es eine reelle Zahl λ mit

$$f'(x_0, y_0) = \lambda \cdot g'(x_0, y_0)\,.$$

Wir haben $f'(x,y) = (1,1)$ und $g'(x,y) = (\frac{1}{2}x, 2y)$. Aus $f'(1,1) = (1,1) = \lambda \cdot (\frac{1}{2}x_0, 2y_0)$ schließen wir $\lambda \neq 0$, weiter

$$\tfrac{1}{\lambda} = \tfrac{1}{2}x_0 = 2y_0,$$

somit $x_0 = 4y_0$. Wegen $(x_0, y_0) = (4y_0, y_0) \in M$ ist $\frac{1}{4}(4y_0)^2 + y_0^2 = 5y_0^2 = 1$, also $y_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ und somit $x_0 = \pm\frac{4}{\sqrt{5}}$. Nun ist $f(-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}) < 0$ und $f(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}) > 0$. Das globale Maximum der Funktion $f|_M$ ist also $f(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}) = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

Alternative Lösung via Parametrisierung: Die Aufgabe kann alternativ auch gelöst werden, indem man die Ellipse M parametrisiert, etwa mittels der surjektiven Abbildung

$$\gamma\colon \mathbb{R} \to M, \qquad \gamma(\phi) := (2\cos\phi, \sin\phi)\,,$$

und nun das Maximum von $f \circ \gamma$ bestimmt. Dazu berechnen wir mittels Additionstheorem:

$$\begin{aligned} f(\gamma(\phi)) &= 2\cos\phi + \sin\phi = \sqrt{5}\cdot(\tfrac{2}{\sqrt{5}}\cos\phi + \tfrac{1}{\sqrt{5}}\sin\phi) \\ &= \sqrt{5}(\cos\phi_0\cos\phi + \sin\phi_0\sin\phi) = \sqrt{5}\cdot\cos(\phi - \phi_0) \end{aligned}$$

mit $\phi_0 := \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$. Hierbei wurde benutzt, dass der Vektor $(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}) \in \mathbb{R}^2$ im 1. Quadranten und auf dem Einheitskreis liegt, sich also in der Form $(\cos\phi_0, \sin\phi_0)$ schreiben lässt für genau ein $\phi_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Da $\cos(\phi - \phi_0)$ maximal 1 wird, ist wegen voriger Formel offensichtlich $\sqrt{5}$ das Maximum von $f \circ \gamma$ und somit auch von $f|_M$.

3

Aufgabe 7. Wir berechnen $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ye^{-x-y} - xye^{-x-y} = (1-x)\cdot y \cdot e^{-x-y}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cdot(1-y)\cdot e^{-x-y}$. Für gegebene $x_0, y_0 > 0$ ist also $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \neq 0$ außer für $x_0 = 1$, und es ist $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$ außer für $y_0 = 1$. Nach Satz 12.7 lässt sich also die durch (x_0, y_0) verlaufende Höhenlinie von f im Falle $y_0 \neq 1$ lokal als Graph einer stetig differenzierbaren Funktion von x beschreiben, während sie sich für $x_0 \neq 1$ als Graph einer stetig differenzierbaren Funktion von y beschreiben lässt. Im Punkt $(1,1)$, und nur dort, nimmt die Funktion f ihr globales Maximum $f(1,1) = e^{-2}$ an (das sieht man vielleicht am leichtesten, indem man $f(x,y) = (xe^{-x})\cdot(ye^{-y})$ schreibt und sich überlegt, dass die Funktion $x \mapsto xe^{-x}$ einer Variablen ein globales Maximum genau für $x = 1$ annimmt). Die Höhenlinie $f^{-1}(e^{-2})$ ist also die einpunktige Menge $\{(1,1)\}$.

Im Gegensatz zur Situation in Aufgabe 3 ist es in der jetzigen Aufgabe nicht mehr möglich, die Höhenlinien als Graphen explizit hinschreibbarer Funktionen zu beschreiben. Dennoch können wir genauso problemlos wie dort mit dem Satz von den impliziten Funktionen argumentieren.

4

Aufgabe 8. Offensichtlich ist f eine beliebig oft stetig differenzierbare Funktion (alle partiellen Ableitung ab 2. Ordnung verschwinden übrigens und sind daher trivialerweise stetig). Für $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in f^{-1}(1)$ ist $x_1x_4 - x_2x_3 = 1$, folglich $x \neq 0$ und somit auch $f'(x) = (x_4, -x_3, -x_2, x_1) \neq (0,0,0,0)$; die 1×4-Matrix $f'(x)$ hat also vollen Rang. Wir haben gezeigt, dass 1 ein regulärer Wert der C^∞-Funktion $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ ist. Nach Satz 12.10 ist $f^{-1}(1)$ eine 3-dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^4$.

Folglich ist die "spezielle lineare Gruppe" $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ (siehe Übungsblatt!) eine C^∞-Untermannigfaltigkeit von $L(\mathbb{R}^2)$. Untergruppen von $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$, welche C^∞-Untermannigfaltigkeiten von $L(\mathbb{R}^n)$ sind, nennt man übrigens "lineare Liegruppen."

Aufgabe 9. Es ist $f(1,0,0,1) = (1,0,0,1)$ und

$$f'(x_1,x_2,x_3,x_4) = \begin{pmatrix} 2x_1 & x_3 & x_2 & 0 \\ x_2 & x_1+x_4 & 0 & x_2 \\ x_3 & 0 & x_1+x_4 & x_3 \\ 0 & x_3 & x_2 & 2x_4 \end{pmatrix}.$$

Also ist $f'(1,0,0,1) = 2\cdot\mathbf{1}$ das Zweifache der Einheitsmatrix und somit eine invertierbare Matrix. Nach Satz 12.5 ist f lokal um $(1,0,0,1)$ invertierbar, mit stetig differenzierbarer lokaler Umkehrfunktion. Es gibt also offene Umgebungen U von $(1,0,0,1)$ und V von $f(1,0,0,1) = (1,0,0,1)$ in $\mathbb{R}^4$ derart, dass $f(U) = V$ und derart, dass $f|_U : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist. Dann leistet $w := (f|_U)^{-1} \colon V \to U$ das Gewünschte.

Aufgabe 10. Diese Aufgabe ist etwas technisch, illustriert aber besonders direkt das Hauptanliegen von Kapitel 12 ("Lösen von Gleichungen").

Wir berechnen $f(0,0) = (0,0)$ und

$$f'(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} e^{x_2} & x_1e^{x_2} \\ -x_2 & 1-x_1 \end{pmatrix}; \tag{1}$$

insbesondere ist also $f'(0,0) = \mathbf{1}$ die Einheitsmatrix. Wir befinden uns also in der in (12.5) im Beweis von Satz 12.5 beschriebenen Situation. Wie im dortigen Beweis definieren wir $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x) = x - f(x)$ für $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$. Können wir $r > 0$ finden mit

$$\|g'(x)\| \le \tfrac{1}{2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } \|x\|_2 \le r, \tag{2}$$

so sind, weil die Kugel $U_{2r}(0)$ trivialerweise im Definitionsbereich $\mathbb{R}^2$ von f enthalten ist, alle im Beweis von Satz 12.5 an r gestellten Bedingungen erfüllt und es existiert daher, wie dort gezeigt, für jedes $y \in \mathbb{R}^2$ mit $\|y\|_2 < \frac{r}{2}$ genau ein $x \in \mathbb{R}^2$ mit $\|x\|_2 \le r$ und $f(x) = y$. Wir können also $R := \frac{r}{2}$ wählen.

Es bleibt, ein $r > 0$ mit den beschriebenen Eigenschaften explizit zu finden. In (2) kommt die Operatornorm von $g'(x)$ vor. Da sich die Operatornorm einer Matrix $A = (a_{ij}) \in L(\mathbb{R}^2)$ im allgemeinen nicht leicht ausrechnen lässt, schätzen wir lieber durch etwas Einfaches nach oben ab:

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right\| &\le \left\| \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \right\| \\ &= |a_{11}| + |a_{12}| + |a_{21}| + |a_{22}|. \end{aligned}$$

Damit die Ungleichung (2) erfüllt ist, genügt es also, alle Matrixeinträge von

$$g'(x) = \mathbf{1} - f'(x) = \begin{pmatrix} 1-e^{x_2} & -x_1e^{x_2} \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

betragsmäßig kleiner als $\frac{1}{8}$ zu machen. Für $x = (x_1,x_2)$ mit $\|x\|_2 < \frac{1}{8}$ gilt $|x_1|, |x_2| < \frac{1}{8}$; nach (3) sind dann also die beiden Einträge in der zweiten Zeile von $g'(x) = \mathbf{1} - f'(x)$

dem Betrage nach kleiner als $\frac{1}{8}$. Der Betrag des $(1,2)$-Eintrag von $g'(x)$ ist $|x_1 e^{x_2}| = |x_1| e^{x_2} \leq |x_1| e^{\frac{1}{8}} \leq |x_1| \cdot e \leq 3|x_1|$. Für $\|x\|_2 \leq \frac{1}{24}$ gilt also $|x_1 e^{x_2}| \leq \frac{1}{8}$. Der Betrag des $(1,1)$-Eintrags von $g'(x)$ ist $|e^{x_2} - 1| = |e^{x_2} - e^0| = |x_2 e^{\xi(x_2)}|$ für ein $\xi(x_2)$ zwischen 0 und x_2, aufgrund des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung. Für $\|x\|_2 < \frac{1}{24}$ haben wir also $|e^{x_2} - 1| = |x_2 e^{\xi(x_2)}| \leq \frac{1}{24} e^{\frac{1}{24}} \leq \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$. Also ist (2) mit $r = \frac{1}{24}$ erfüllt. Wie oben überlegt, hat dann $R := \frac{r}{2} = \frac{1}{48}$ die in der Aufgabenstellung geforderten Eigenschaften: für jedes $y \in \mathbb{R}^2$ mit $\|y\|_2 < \frac{1}{48}$ existiert ein $x \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = y$.

Aufgabe 11. Beachte zunächst, dass f wegen $d(f(x), f(y)) \leq \alpha_1 \cdot d(x,y)$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante α_1 ist und somit insbesondere stetig.

Sei $x_0 \in X$. Für natürliche Zahlen $m > n > 1$ schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} d(f^m(x_0), f^n(x_0)) &\leq \sum_{k=n}^{m-1} d(f^{k+1}(x_0), f^k(x_0)) = \sum_{k=n}^{m-1} d(f^k(f(x_0)), f^k(x_0)) \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \alpha_k \cdot d(f(x_0), x_0)\,, \end{aligned} \tag{4}$$

wobei zuerst die Dreiecksungleichung angewandt wurde, anschließend die Voraussetzung der Aufgabe benutzt. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert wegen der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ eine positive natürliche Zahl N derart, dass $\sum_{n=N}^{\infty} \alpha_n < \frac{\varepsilon}{1 + d(f(x_0), x_0)}$. Für alle $m > n \geq N$ gilt nach obiger Abschätzung dann

$$d(f^m(x_0), f^n(x_0)) \leq \left(\sum_{k=n}^{m-1} \alpha_k \right) \cdot d(f(x_0), x_0) \leq \left(\sum_{k=N}^{\infty} \alpha_k \right) \cdot d(f(x_0), x_0) < \varepsilon\,.$$

Wir haben gezeigt, dass $(f^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, mithin konvergent gegen ein $\widetilde{x} \in X$ wegen der Vollständigkeit von X. Aufgrunde der Stetigkeit von f ist dann $f(\widetilde{x}) = f(\lim_{n\to\infty} f^n(x_0)) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x_0) = \widetilde{x}$ und somit $\widetilde{x}$ ein Fixpunkt von f. Lassen wir $m \to \infty$ gehen in (4), so erhalten wir die gewünschte Fehlerabschätzung:

$$d(\widetilde{x}, f^n(x_0)) \leq \left(\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k \right) \cdot d(f(x_0), x_0)\,.$$

Ist schließlich auch $\widetilde{y}$ ein Fixpunkt von f, so wählen wir eine positive natürliche Zahl n mit $\alpha_n < 1$. Wegen $d(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = d(f^n(\widetilde{x}), f^n(\widetilde{y})) \leq \alpha_n \cdot d(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ muss dann $d(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = 0$ sein, also $\widetilde{x} = \widetilde{y}$.

Den Banachschen Fixpunktsatz mit $d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x,y)$, wobei $L < 1$ erhalten wir als Spezialfall des eben bewiesenen "Weissingerschen Fixpunktsatzes," indem wir $\alpha_n := L^n$ wählen ($\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ ist dann also eine geometrische Reihe).

Aufgabe 12. Zwei Stück wichtige Skizzen siehe LZM!

Aufgabe 1. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz besitzt die Kontraktion f^n einen eindeutigen Fixpunkt $\widetilde{x}$. Nun ist wegen $f^n(f(\widetilde{x})) = f^{n+1}(\widetilde{x}) = f(f^n(\widetilde{x})) = f(\widetilde{x})$ auch $f(\widetilde{x})$ ein Fixpunkt von f^n, somit $f(\widetilde{x}) = \widetilde{x}$ wegen der Eindeutigkeit. Also ist $\widetilde{x}$ ein Fixpunkt von f. Dies ist der einzige Fixpunkt von f, denn ist y ein Fixpunkt von f, so auch von f^n und daher $y = \widetilde{x}$.

Aufgabe 2. (a) Die Ableitung von f an der Stelle (x, y) berechnen wir zu

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix},$$

mit Determinante $\det f'(x,y) = (e^x)^2 \cdot ((\cos y)^2 + (\sin y)^2) = e^{2x} \neq 0$. Also ist $f'(x,y)$ invertierbar.

(b) Wir wissen, dass die Abbildung

$$p\colon]0,\infty[\times]-\pi,\pi[\to E, \quad (r,\phi) \mapsto r\cdot(\cos\phi, \sin\phi),$$

welche den Polarkoordinaten (r,ϕ) den entsprechenden Punkt $p(r,\phi) \in E$ zuordnet, eine Bijektion ist (s. Skript S. 230). Die reelle Exponentialfunktion $\mathbb{R} \to]0,\infty[$ ist eine Bijektion (mit Umkehrfunktion $\ln\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$), weswegen auch

$$g\colon \mathbb{R}\times]-\pi,\pi[\to]0,\infty[\times]-\pi,\pi[, \quad g(x,y) := (e^x, y)$$

eine Bijektion ist. Also ist auch die Komposition $f|_S = p \circ g : S \to E$ eine Bijektion. Da $f'(x,y)$ für alle $(x,y) \in S$ nach Teil (a) invertierbar ist, ist die Bijektion $f|_S$ nach Folgerung 12.6 ein Diffeomorphismus.

Aufgabe 3. (a) Wegen $f(x,y) = x^4 + y^4 \geq 0$ sind die Höhenlinien $f^{-1}(c)$ für $c < 0$ die leere Menge. Weiter ist $f^{-1}(0) = \{(0,0)\}$. Für $c > 0$ ist

$$\begin{aligned} f^{-1}(c) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^4 + y^4 = c\} \\ &= \{(x, \sqrt[4]{c - x^4}) : -\sqrt[4]{c} \leq x \leq \sqrt[4]{c}\} \cup \{(x, -\sqrt[4]{c - x^4}) : -\sqrt[4]{c} \leq x \leq \sqrt[4]{c}\}. \end{aligned}$$

Skizze siehe LZM!

(b) Es ist $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3$.

(c) Genau für $y_0 \neq 0$ gilt $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 4(y_0)^3 \neq 0$. Für alle $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $y_0 \neq 0$ gibt es also nach Satz 12.7 (angewandt auf $f - f(x_0,y_0)$) offene Umgebungen U von x_0, V von y_0 und eine stetig differenzierbare Abbildung $\eta\colon U \to V$ derart, dass $f^{-1}(f(x_0,y_0)) \cap (U \times V) = \{(x, \eta(x)) \colon x \in U\}$.

Analog können wir für $x_0 \neq 0$ wegen $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 4(x_0)^3 \neq 0$ die Höhenlinie $f^{-1}(f(x_0,y_0))$ nahe (x_0,y_0) als Graph einer Funktion von y beschreiben.

(d) Gegeben $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ kürzen wir $c := f(x_0, y_0)$ ab. Geeignetes Auflösen von $x^4 + y^4 = c$ nach x (bzw. y) bei gegebenem y (bzw. x) zeigt, dass

$$\begin{array}{lcll}
f^{-1}(c) \cap (\,]-\sqrt[4]{c}, \sqrt[4]{c}[\,\times\,]0,\infty[) & = & \{\,(x, \sqrt[4]{c - x^4}) & : x \in]-\sqrt[4]{c}, \sqrt[4]{c}[\,\} \\
f^{-1}(c) \cap (\,]-\sqrt[4]{c}, \sqrt[4]{c}[\,\times\,]-\infty,0[) & = & \{(\,x, -\sqrt[4]{c - x^4}) & : x \in]-\sqrt[4]{c}, \sqrt[4]{c}[\,\} \\
f^{-1}(c) \cap (\,]0,\infty[\,\times\,]-\sqrt[4]{c}, \sqrt[4]{c}[\,) & = & \{\,(\sqrt[4]{c - y^4}, y) & : y \in]-\sqrt[4]{c}, \sqrt[4]{c}[\,\} \\
f^{-1}(c) \cap (\,]-\infty,0[\,\times\,]-\sqrt[4]{c}, \sqrt[4]{c}[\,) & = & \{\,(-\sqrt[4]{c - y^4}, y) & : y \in]-\sqrt[4]{c}, \sqrt[4]{c}[\,\}\,.
\end{array}$$

Wir können also im Fall $y_0 > 0$ (bzw. $y_0 < 0$) bei möglichst großem Definitionsbereich

$$\begin{array}{lll}
\eta : \ ]-\sqrt[4]{c}, \sqrt[4]{c}[\, \to]0,\infty[\,, & \eta(x) := \sqrt[4]{c - x^4} & \text{bzw.} \\
\eta : \ ]-\sqrt[4]{c}, \sqrt[4]{c}[\, \to]-\infty,0[\,, & \eta(x) := -\sqrt[4]{c - x^4} &
\end{array}$$

wählen, im Falle $x_0 > 0$ (bzw. $x_0 < 0$)

$$\begin{array}{lll}
\xi : \ ]-\sqrt[4]{c}, \sqrt[4]{c}[\, \to]0,\infty[& \xi(y) := \sqrt[4]{c - y^4} & \text{bzw.} \\
\xi : \ ]-\sqrt[4]{c}, \sqrt[4]{c}[\, \to]-\infty,0[& \xi(y) := -\sqrt[4]{c - y^4}\,. &
\end{array}$$

Aufgabe 4. Diese Aufgabe ist etwas technisch, illustriert aber besonders direkt das Hauptanliegen von Kapitel 12 ("Lösen von Gleichungen").

Wir berechnen $f(0,0) = (0,0)$ und

$$f'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} e^{x_2} & x_1 e^{x_2} \\ -x_2 & 1 - x_1 \end{pmatrix}; \tag{1}$$

insbesondere ist also $f'(0,0) = \mathbf{1}$ die Einheitsmatrix. Wir befinden uns also in der in (12.5) im Beweis von Satz 12.5 beschriebenen Situation. Wie im dortigen Beweis definieren wir $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x) = x - f(x)$ für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Können wir $r > 0$ finden mit

$$\|g'(x)\| \leq \tfrac{1}{2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } \|x\|_2 \leq r, \tag{2}$$

so sind, weil die Kugel $U_{2r}(0)$ trivialerweise im Definitionsbereich $\mathbb{R}^2$ von f enthalten ist, alle im Beweis von Satz 12.5 an r gestellten Bedingungen erfüllt und es existiert daher, wie dort gezeigt, für jedes $y \in \mathbb{R}^2$ mit $\|y\|_2 < \frac{r}{2}$ genau ein $x \in \mathbb{R}^2$ mit $\|x\|_2 \leq r$ und $f(x) = y$. Wir können also $R := \frac{r}{2}$ wählen.

Es bleibt, ein $r > 0$ mit den beschriebenen Eigenschaften explizit zu finden. In (2) kommt die Operatornorm von $g'(x)$ vor. Da sich die Operatornorm einer Matrix $A = (a_{ij}) \in L(\mathbb{R}^2)$ im allgemeinen nicht leicht ausrechnen lässt, schätzen wir lieber durch etwas Einfaches nach oben ab:

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right\| &\leq \left\| \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \right\| \\ &= |a_{11}| + |a_{12}| + |a_{21}| + |a_{22}|. \end{aligned}$$

Damit die Ungleichung (2) erfüllt ist, genügt es also, alle Matrixeinträge von

$$g'(x) = \mathbf{1} - f'(x) = \begin{pmatrix} 1 - e^{x_2} & -x_1 e^{x_2} \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

betragsmäßig kleiner als $\frac{1}{8}$ zu machen. Für $x = (x_1, x_2)$ mit $\|x\|_2 < \frac{1}{8}$ gilt $|x_1|, |x_2| < \frac{1}{8}$; nach (3) sind dann also die beiden Einträge in der zweiten Zeile von $g'(x) = \mathbf{1} - f'(x)$ dem Betrage nach kleiner als $\frac{1}{8}$. Der Betrag des $(1,2)$-Eintrag von $g'(x)$ ist $|x_1 e^{x_2}| = |x_1| e^{x_2} \leq |x_1| e^{\frac{1}{8}} \leq |x_1| \cdot e \leq 3|x_1|$. Für $\|x\|_2 \leq \frac{1}{24}$ gilt also $|x_1 e^{x_2}| \leq \frac{1}{8}$. Der Betrag des $(1,1)$-Eintrags von $g'(x)$ ist $|e^{x_2} - 1| = |e^{x_2} - e^0| = |x_2 e^{\xi(x_2)}|$ für ein $\xi(x_2)$ zwischen 0 und x_2, aufgrund des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung. Für $\|x\|_2 < \frac{1}{24}$ haben wir also $|e^{x_2} - 1| = |x_2 e^{\xi(x_2)}| \leq \frac{1}{24} e^{\frac{1}{24}} \leq \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$. Also ist (2) mit $r = \frac{1}{24}$ erfüllt. Wie oben überlegt, hat dann $R := \frac{r}{2} = \frac{1}{48}$ die in der Aufgabenstellung geforderten Eigenschaften: für jedes $y \in \mathbb{R}^2$ mit $\|y\|_2 < \frac{1}{48}$ existiert ein $x \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = y$.

Lösungsskizzen zu Übungsblatt 1

Analysis III WS 2020/21

Aufgabe 1

Für die Ableitung von c gilt

$$c'(t) = (\cos t, -\sin t, 1).$$

Andererseits gilt

$$\frac{c(2\pi) - c(0)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}(\sin 2\pi - \sin 0, \cos 2\pi - \cos 0, 2\pi - 0) = (0, 0, 1).$$

Damit dieser Wert für ein τ als Ableitung angenommen werden kann, müsste gelten

$$\cos\tau = \sin\tau = 0,$$

und das ist bekanntlich nie der Fall.

Ein Widerspruch zum Mittelwertsatz ist dies nicht, da in einem Mittelwertsatz der Form "Es gibt ein τ, so dass ..." der Bildraum immer $\mathbb{R}$ ist, in diesem Fall aber der $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 2

Die Stetigkeit von f außerhalb des Ursprungs ist offensichtlich, da stetige Funktionen miteinander verknüpft werden. Um die Stetigkeit im Ursprung zu beweisen, muss gezeigt werden, dass $\lim\limits_{x\to 0, y\to 0}\left|\frac{xy^3}{x^2+y^4}\right| = 0$, egal wie x und y gegen 0 gehen.

Dazu ist folgende Formel, die für beliebige reelle a und b gilt, hilfreich: $a^2 + b^4 \geq 2ab^2$. Diese folgt aus der zweiten binomischen Formel:

$$(a - b^2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab^2 + b^4 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^4 \geq 2ab^2$$

Damit folgt dann

$$\frac{xy^3}{x^2 + y^4} \leq \frac{y(x^2 + y^4)}{2(x^2 + y^4)} = \frac{y}{2}.$$

Und diese Funktion geht offensichtlich gegen 0, wenn x und y auf irgendeine Art und Weise gegen 0 gehen.

Das Berechnen der partiellen Ableitungen außerhalb des Nullpunktes erfolgt einfach durch gewöhnliches Ableiten, die andere Variable wird dabei als Konstante angesehen:

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= \frac{y^3(x^2 + y^4) - xy^3 \cdot 2x}{(x^2 + y^4)^2} \\ &= \frac{x^2y^3 + y^7 - 2x^2y^3}{(x^2 + y^4)^2} \\ &= \frac{y^7 - x^2y^3}{(x^2 + y^4)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2 f(x,y) &= \frac{3xy^2(x^2+y^4) - xy^3 \cdot 4y^2}{(x^2+y^4)^2} \\
&= \frac{3x^3y^2 + 3xy^6 - 4xy^6}{(x^2+y^4)^2} \\
&= \frac{3x^3y^2 - xy^6}{(x^2+y^4)^2}
\end{aligned}$$

Zur Berechnung der partiellen Ableitungen in $(0,0)$ muss hingegen der Differenzenquotient benutzt werden:

$$\begin{aligned}
D_1 f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+(h,0)) - f((0,0))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f((h,0))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^3} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2 f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+(0,h)) - f((0,0))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f((0,h))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^5} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Zu zeigen ist jetzt noch die Unstetigkeit von $D_2 f$ im Nullpunkt; dazu betrachte man die Folge $\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$; diese konvergiert offensichtlich gegen den Ursprung. da jetzt gezeigt wird, dass die Folge der Funktionswerte nicht gegen $D_2 f((0,0)) = 0$ konvergiert, ist die Unstetigkeit im Nullpunkt bewiesen. Es gilt nämlich

$$D_2 f\left(\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{3\frac{1}{n^6}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2}\frac{1}{n^6}}{\left(\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}\right)^2} = \frac{\frac{3}{n^8} - \frac{1}{n^8}}{\frac{4}{n^8}} = \frac{1}{2}.$$

Der Kandidat für die Ableitung im Nullpunkt ist somit

$$df(0,0) = (D_1 f(0,0), D_2 f(0,0)) = (0,0).$$

Bedingung für Differenzierbarkeit ist also die Existenz einer Funktion ϕ, so dass $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\phi(h)}{\|h\|} = 0$ und

$$f((0,0)+(h_1,h_2)) = f((0,0)) + (0,0)(h_1,h_2) + \phi(h) \Leftrightarrow f(h_1,h_2) = \phi(h).$$

Um zu zeigen, dass f im Nullpunkt nicht differenzierbar ist, muss also jetzt gezeigt werden, dass $\lim\limits_{h\to 0} \left|\frac{f(h_1,h_2)}{\|h\|}\right| \neq 0$, also dass $\lim\limits_{h\to 0} \left|\frac{h_1 h_2^3}{(h_1^2+h_2^4)\|h\|}\right| \neq 0$ gilt.

Dazu betrachte man die Folge $\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right)$ für (h_1,h_2); die Folge der Werte des Terms müssten gegen 0 konvergieren, es gilt aber

$$\frac{h_1 h_2^3}{(h_1^2+h_2^4)\|h\|_\infty} = \frac{\frac{1}{n^5}}{\left(\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^4}\right)\frac{1}{n}} = \frac{1}{2},$$

und damit ist Konvergenz gegen 0 natürlich unmöglich.

Aufgabe 3
Zunächst die Berechnung der ersten partiellen Ableitungen außerhalb des Nullpunktes auf gewohnte Art und Weise:

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{2x(x^2+y^2)-(x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{x^2y-y^3}{x^2+y^2} + xy\frac{2x^3+2xy^2-2x^3+2xy^2}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{x^4y-x^2y^3+x^2y^3-y^5+4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 f(x,y) &= x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{-2y(x^2+y^2)-(x^2-y^2)2y}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} + xy\frac{-2x^2y-2y^3-2x^2y+2y^3}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{x^5-x^3y^2+x^3y^2-xy^4-4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{x^5-xy^4-4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

Im Ursprung wird wieder der Differenzenquotient benötigt:

$$\begin{aligned} D_1 f(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 f(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dass die zweiten partiellen Ableitungen außerhalb des Ursprungs existieren, ist klar, da dort wieder nur ein geschlossener Ausdruck zu differenzieren ist (wer möchte, kann dies natürlich ausrechnen, viel Spaß !); im Ursprung muss wieder der Differenzenquotient benutzt werden:

$$\begin{aligned} D_1 D_1 f(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{D_1 f(h,0)-D_1 f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
D_2D_2f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{D_2f(0,h)-D_2f(0,0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_1D_2f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{D_2f(h,0)-D_2f(0,0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^5}{h^4}-0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 1 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_2D_1f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{D_1f(0,h)-D_1f(0,0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h^5}{h^4}-0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} -1 \\
&= -1
\end{aligned}
$$

Damit ist gleichzeitig auch gezeigt, dass D_2D_1f und D_1D_2f im Ursprung nicht übereinstimmen.

Aufgabe 4
Zu zeigen ist also

$$(\text{grad } f(x), c'(t)) = 0.$$

Hierbei hilft die Formel

$$(\text{grad } f(x), c'(t)) = \frac{d(f \circ c)}{ds}(t),$$

Es ist also zu zeigen, dass die Funktion $f \circ c$ konstant ist. Es gilt aber

$$f \circ c(s) = f(c(s)) = a \text{ für alle } s \in I,$$

da $c(I) \subset N_a(f)$, und da für Elemente $z \in N_a(f)$ gilt $f(z) = a$.