

Übungen 6 zu Analysis III, WS 2020

1. Zeigen Sie: Für eine stetige Funktion f auf der Kugel

$$K = \bar{K}_r(0) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$$

gilt:

$$\int_K f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_B \left(\int_{-\sqrt{r^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz \right) d(x, y),$$

wobei $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$. Integrieren Sie $f(x, y, z) = z^2$ über diese Kugel!

2. Als *Schwerpunkt* einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit positivem Volumen V definiert man den Punkt $S = (s_1, \dots, s_n)$ mit

$$s_\nu := \frac{1}{V} \int_K x_\nu d^n x, \quad \nu = 1, \dots, n.$$

Berechnen Sie den Schwerpunkt

- (a) des Halbkreises $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$;
(b) eines Kegels $K(B, h) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid y \in [0, h], x \in (1 - \frac{y}{h})B\}$ für $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt und $h > 0$.
3. Zu $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiere man $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch $S(x_1, \dots, x_n) := \left(\frac{x_1}{s_1}, \dots, \frac{x_n}{s_n} \right)$. Zeigen Sie:

- (a) Ist f über \mathbb{R}^n integrierbar, dann auch $f \circ S$, und es gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \left(\frac{x_1}{s_1}, \dots, \frac{x_n}{s_n} \right) d^n x = |s_1 \cdot \dots \cdot s_n| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d^n x.$$

- (b) Mit $A \subset \mathbb{R}^n$ ist auch $S^{-1}(A)$ messbar und hat das Volumen $v(S^{-1}(A)) = |s_1 \cdot \dots \cdot s_n| \cdot v(A)$. Was ergibt sich als Volumen eines dreidimensionalen Ellipsoids?