Übungen 6 zu Analysis III, WS 2020

18. Zeigen Sie: Für eine stetige Funktion f auf der Kugel

$$K = \bar{K}_r(0) := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 \le r^2 \right\}$$

gilt:

$$\int_K f(x,y,z)d(x,y,z) = \int_B \left(\int_{-\sqrt{r^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} f(x,y,z)dz \right) d(x,y),$$

wobei $B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 \le r^2 \right\}$. Integrieren Sie $f(x,y,z) = z^2$ über diese Kugel!

19. Als *Schwerpunkt* einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit positivem Volumen V definiert man den Punkt $S = (s_1, \ldots, s_n)$ mit

$$s_\nu := \frac{1}{V} \int_K x_\nu d^n x, \quad \nu = 1, \ldots, n.$$

Berechnen Sie den Schwerpunkt

(a) des Halbkreises $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 \le 1, y \ge 0 \right\}$;

(b) eines Kegels $K(B,h) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^n \,|\, y \in [0,h], x \in (1-\frac{y}{h})B \right\}$ für $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt und $h > 0$.

20. Zu $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ definiere man $S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ durch $S(x_1, \ldots, x_n) := \left(\frac{x_1}{s_1}, \ldots, \frac{x_n}{s_n}\right)$. Zeigen Sie:

(a) Ist f über $\mathbb{R}^n$ integrierbar, dann auch $f \circ S$, und es gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{x_1}{s_1}, \ldots, \frac{x_n}{s_n}\right) d^n x = |s_1 \cdot \ldots \cdot s_n| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d^n x.$$

(b) Mit $A \subset \mathbb{R}^n$ ist auch $S^{-1}(A)$ messbar und hat das Volumen $v(S^{-1}(A)) = |s_1 \cdot \ldots \cdot s_n| \cdot v(A)$. Was ergibt sich als Volumen eines dreidimensionalen Ellipsoids?