Übungsblatt 11

Analysis III WS 2020/21

26.01.2021

1. Es sei $g = 1_{[-1,1]}$. Man berechne die Fouriertransformation von $(g \star g)$ und zeige mit Hilfe des Umkehrsatzes

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = 1.$$

2. Sind f und g schnell abfallend, so auch $f \star g$.

3. Man zeige , dass die Fouriertranformation jeder Funktion $f \in \mathcal{L}^1 (\mathbb{R}^n)$ die Eigenschaft

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \widehat{f}(x) = 0$$

hat.

4. Die Fouriertransformierte einer rotationssymmetrischen Funktion $f \in \mathcal{L}^1 (\mathbb{R}^n)$ ist ebenfalls rotationssymmetrisch.

5. (a) Es sei E die Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ und $t > 0$. Man zeige

$$\int_E e^{-ix_n t} dx = (2\pi)^{n/2} \frac{1}{t^{n/2}} J_{n/2} (t)$$

wobei die Besselfunktionen für $\alpha > -\frac{1}{2}$ und $z \in \mathbb{C}$ definiert sind durch

$$J_\alpha (z) = \frac{(z/2)^\alpha}{\Gamma \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \Gamma \left(\frac{1}{2} \right)} \int_{-1}^{1} \left(1 - t^2 \right)^{\alpha - \frac{1}{2}} \cos (zt) \, dt.$$

(b) Man zeige

$$\widehat{1_E}(x) = \frac{1}{\|x\|^{n/2}} J_{n/2} (\|x\|) , \ x \in \mathbb{R}^n.$$