Übungsblatt 1

Funktionalanalysis WS 21/22

11.10.2021

Aufgabe 1

Es sei

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{x = (x_i)_0^\infty : x_i \in \mathbb{R} \text{ für } i \in \mathbb{N}\}.$$

Für $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sei

$$\|x\|_{l^p} = \begin{cases} \left(\sum_{i=0}^\infty |x_i|^p\right)^{1/p}, 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|, p = \infty. \end{cases}$$

Sei $l^p := \left\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|x\|_{l^p} < \infty\right\}$. Man zeige, daß l^p ein reeller normierter Vektorraum (mit Norm $\|\cdot\|_{l^p}$) ist, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert.

Aufgabe 2

Es sei $X = C[a,b]$ der normierte Raum der stetigen Funktionen auf $[a,b]$. $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ mit der Norm $\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Man zeige, daß X ein Banachraum ist und daß der Unterraum $C^1[a,b]$ der stetig differenzierbaren Funktionen auf $[a,b]$ in X nicht abgeschlossen ist und somit $(C^1[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ kein vollständiger Raum ist. Geben Sie unendlich-dimensionale Unterräume von X an, die in X nicht dicht liegen.

Aufgabe 3

Man zeige, daß $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit

$$d(x,y) = \sum_{i=0}^\infty 2^{-i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}$$

ein vollständiger metrischer Raum ist.

Aufgabe 4

Es sei $S \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt und $C(S)$ der Raum der stetigen Funktionen von S nach $\mathbb{C}$. Man zeige: Hat S unendlich viele Elemente, so gilt $\dim C(S) = \infty$.