Übungsblatt 2

Funktionalanalysis WS 2021/22

18.10.2021

Aufgabe 1

Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Zu $x \in X$ nennt man $K_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ offene ε-Kugel um x mit dem Radius ε. Eine Teilmenge A von X heißt offen, wenn für alle $x \in A$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $K_\varepsilon(x) \subset A$. A heißt abgeschlossen, wenn $X \setminus A$ offen ist. Man zeige:

(a) $K_\varepsilon(x)$ ist offen;
(b) $\{y \in X : d(x, y) \leq \varepsilon\}$ ist abgeschlossen;
(c) $\{y \in X : d(x, y) = \varepsilon\}$ ist abgeschlossen.

Aufgabe 2

Man zeige, daß in einem normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ gilt:

$$\overline{\{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}} = \{y \in X : d(x, y) \leq \varepsilon\}$$

und gebe ein Gegenbeispiel dafür an, dass diese Aussage in beliebigen metrischen Räumen falsch ist (zu $A \subset X$ versteht man unter $\overline{A}$ die Menge aller Punkte in X, die Grenzwerte von Folgen in A sind).

Aufgabe 3

Es sei a p *eine* positive reelle Zahl. Man untersuche, welche der Funktionen $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definieren:

(a) $d(x, y) = |x - y|^p$;
(b) $d(x, y) = |x^p - y^p|$.

Aufgabe 4

Man zeige für $f \in C[a, b]$, daß

$$\lim_{p \to \infty} \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|$$

.