Übungsblatt 3

Funktionalanalysis WS 2021/22

25.10.2021

Aufgabe 1

Es sei X der Banachraum $\mathbb{R}^2$ mit der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Man zeige, dass es in X abgeschlossene konvexe Mengen A gibt, in denen unendlich viele Punkte x liegen mit

$$dist(0, A) = \|x\|_\infty.$$

Aufgabe 2

Für $x = (s_n) \in l^1$ setze man

$$\|y\| = \sup_n \left| \sum_{j=1}^{n} s_j \right|.$$

Man zeige, dass $(l^1, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum ist. Ist es auch ein Banachraum ?

Aufgabe 3

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $1 \le p \le q < \infty$. Man zeige: $L^q[a,b] \subset L^p[a,b]$ und für $f \in L^q[a,b]$

$$\frac{\|f\|_p}{(b-a)^{1/p}} \le \frac{\|f\|_q}{(b-a)^{1/q}}.$$

(b) Sei I ein unbeschränktes Intervall in $\mathbb{R}$ und $1 \le p \ne q < \infty$. Man zeige, dass weder $L^q[I] \subset L^p[I]$ noch $L^p[I] \subset L^q[I]$ gilt.