# Übungsblatt 8

Funktionalanalysis WS 2021

29.11.2021

## Aufgabe1:

Zwei normierte Räume $X$ und $Y$ heißen *isometrisch isomorph*, falls es einen isometrischen Isomorphismus $T\colon X \to Y$ gibt. Zeige:

(a) $c_{00}'$ ist isometrisch isomorph zu $\ell^1$
**Hinweis:** $c_{00}$ bezeichnet in dieser Vorlesung immer den Raum der abbrechenden Folgen, also der Folgen $(x_n)$, für die es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n = 0$ für alle $n \geq n_0$ gibt. In dieser Aufgabe sei $c_{00}$ mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$ versehen.

(b) $c_0'$ ist isometrisch isomorph zu $\ell^1$

(c) $c'$ ist isometrisch isomorph zu $\ell^1$

(d) Keine zwei der Räume $c_{00}$, $c_0$ und $c$ sind zueinander isometrisch isomorph.

## Aufgabe 2:

Zeige, dass es ein $\varphi \in c_0'$ gibt mit $|\varphi(x)| < \|\varphi\|\,\|x\|$ für alle $x \in c_0$, $x \neq 0$! Schlussfolgere hieraus, dass die abgeschlossene Einheitskugel $\{x \in c_0 : \|x\|_\infty \leq 1\}$ nicht kompakt ist! (3)

## Aufgabe 3:

Sei $X$ ein unendlichdimensionaler Banachraum und $(b_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine Basis von $X$. Jedes $x \in X$ besitzt eine eindeutige Darstellung

$$x = \sum_{\alpha\in I} \lambda_\alpha(x) b_\alpha$$

als (endliche) Linearkombination der Basisvektoren, also genau eine Darstellung, bei der nur für endlich viele $\alpha \in I$ der Koeffizient $\lambda_\alpha(x)$ nicht verschwindet. Dadurch werden lineare Funktionen $\lambda_\alpha\colon X \to \mathbb{C}$ definiert. Zeige, dass mindestens eines der linearen Funktionale $\lambda_\alpha$ unstetig ist.