Übungsblatt 7

Funktionalanalysis WS 2021

22.11.2021

Aufgabe 1

Es sei $\mathcal{P}$ der Vektorraum aller reellwertiger Polynome auf $\mathbb{R}$. Für ein Polynom $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ setze man $\|p\| = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$. Man zeige

(a) $(\mathcal{P}, \|\cdot\|)$ ist ein normierter Raum. Ist er vollständig ?

(b) Man untersuche, ob die folgenden linearen Abbildungen $l : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ stetig sind und berechne ggf. ihre Norm:

i. $l(p) = \int_0^1 p(t)dt$;

ii. $l(p) = p'(0)$;

iii.: $l(p) = p'(1)$.

Aufgabe 2

Es sei $(\mathcal{P}, \|\cdot\|)$ wie in Aufgabe 1. Man untersuche folgende lineare Abbildungen $T : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ auf Stetigkeit und berechne ggf. ihre Norm:

(a) $(Tp)(t) = p(t+1)$;

(b) $(Tp)(t) = \int_0^t p(s)ds$.

Aufgabe 3

Man beweise: Auf jedem unendlichdimensionalen normierten Raum existiert eine unstetige lineare Abbildung. (Hinweis: Arbeiten Sie mit einer algebraischen Basis des Vektorraumes).

Aufgabe 4

Es sei X ein normierter Raum, und es seien $S, T : X \to X$ lineare Abbildungen mit

$$ST - TS = Id_X.$$

Man zeige, dass dann S oder T unstetig ist. (Anleitung: Man zeige, dass $ST^{n+1} - T^{n+1}S = (n+1)T^n$).