Übungsblatt 11

Funktionalanalysis I WS 2021

10.01.2022

Aufgabe 1
Seien X ein normierter Raum, $x \in X$ und $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass x_n genau dann schwach gegen x konvergiert, wenn die Folge (x_n) beschränkt ist und eine dichte Teilmenge $Y \subset X'$ existiert derart, dass $Tx_n \to Tx$ für alle $T \in Y$.

Aufgabe 2
Seien X ein Banachraum und K eine bezüglich der Normtopologie kompakte Teilmenge von X. Weiterhin sei (x_n) eine Folge in K mit $x_n \rightharpoonup x \in X$. Zeigen Sie, dass

$$\|x_n - x\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

" x_n schwach gegen x "

Aufgabe 3 (
Seien X, Y Banachräume sowie (x_n) eine Folge in X und $T \colon X \to Y$ ein linearer Operator. Zeigen Sie:

a) Konvergiert (x_n) schwach gegen $x \in X$ und ist T stetig, so konvergiert (Tx_n) schwach gegen Tx.

b) Konvergiert (x_n) schwach gegen $x \in X$ und ist $\overline{T(B_1(0))}$ kompakt in Y, so konvergiert (Tx_n) stark gegen Tx.

c) Es gilt auch die Umkehrung in a), d.h. bildet T für beliebiges $x \in X$ jede schwach gegen x konvergente Folge auf eine schwach gegen Tx konvergente Folge ab, so ist T stetig.

Aufgabe 4
Sei $e^{(k)}$ die Folge in ℓ^2 mit $e^{(k)}_n = \delta_{nk}$. Zeigen Sie, dass $(e^{(k)})_k$ in ℓ^2 schwach konvergiert, aber nicht konvergiert.
Hinweis: In der Vorlesung am 14.06.16 wird gezeigt, dass der Dualraum von ℓ^2 isometrisch isomorph zu ℓ^2 ist.

—